This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

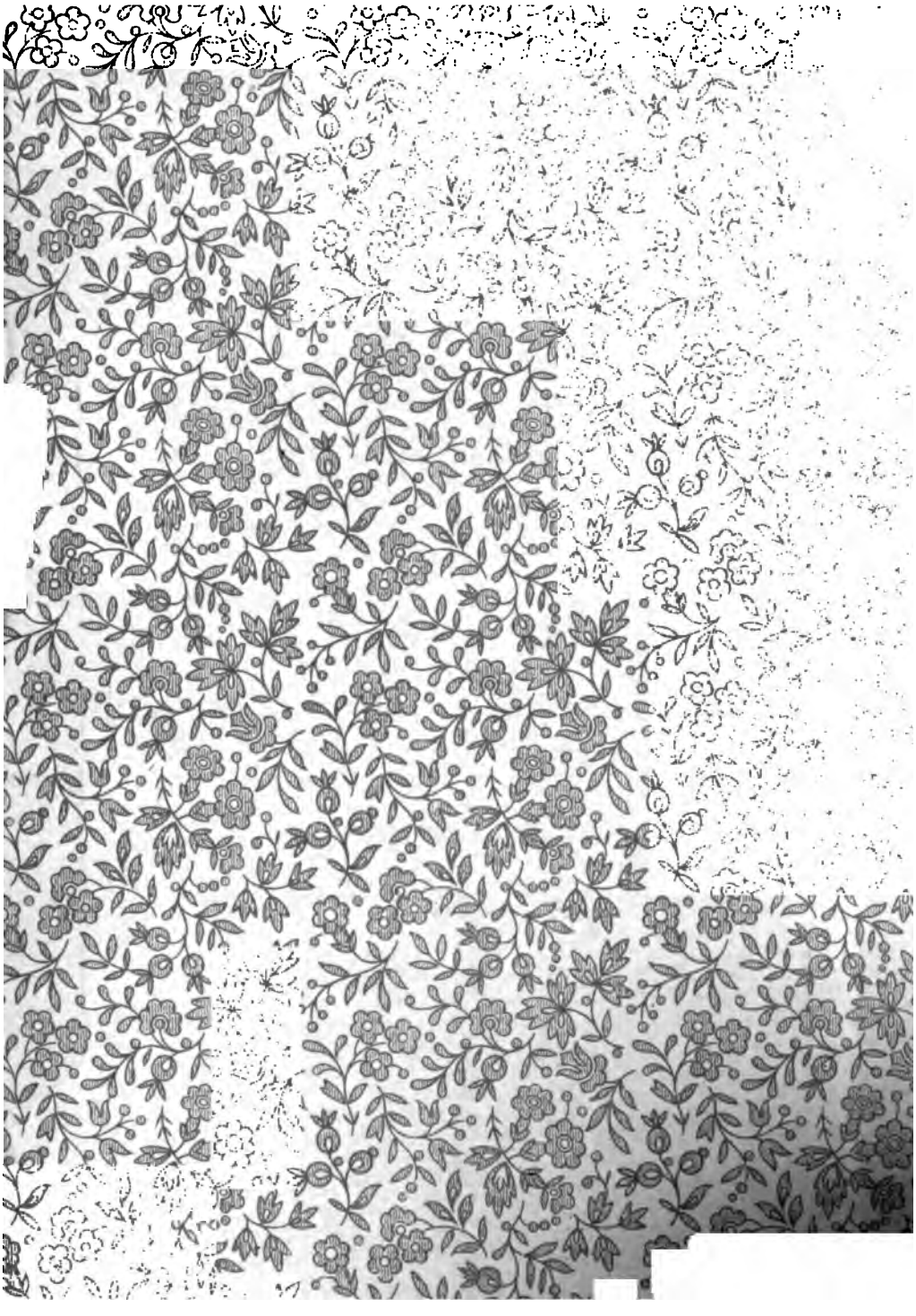
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries



MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

44. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1894.

GAUSS ERDMAGNETISCHES
OBSERVATORIUM
IN GÖTTINGEN.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
Q 28339

Inhalt des vierundvierzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Bertini, E., in Pisa. Trasformazione di una curva algebrica in un'altra con soli punti doppi 158

Castelnuovo, G., in Roma. Sulla razionalità delle involuzioni piane. . . 125

Cohn, Fritz, in Königsberg. Ueber die in recurrirender Weise gebildeten Grössen und ihren Zusammenhang mit den algebraischen Gleichungen . 473

Fricke, R., in Braunschweig. Ueber die Transformationstheorie der automorphen Functionen 97

——— ——— Die Kreisbogenvierseite und das Princip der Symmetrie 565

Hilbert, D., in Königsberg i. Pr. Ueber die Zerlegung der Ideale eines Zahlenkörpers in Primideale 1

Hurwitz, A., in Zürich. Ueber Riemann's Convergenzcriterium 83

——— ——— Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche 417

Koenigsberger, L., in Heidelberg. Ueber die vollständigen Integrale partieller Differentialgleichungssysteme 17

Korselt, A., in Pirna. Bemerkung zur Algebra der Logik. (Auszug aus einem Brief an die Redaction) 156

Kürschák, J., in Budapest. Ueber die partielle Differentialgleichung des Problems $\delta \iint V(p, q)\, dx\, dy = 0$. 9

Lilienthal, R. v., in Münster i./W. Ueber die Bedingung, unter der eine Flächenschaar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört . . 449

London, F., in Breslau. Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde 375

Lüroth, J., in Freiburg i. Br. Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Functionen. II. 539

Pasch, M., in Giessen. Verschwindende Determinanten dritten Grades aus ternären linearen Formen 89

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowsky'schen Gesellschaft für das Jahr 1897 600

Pringsheim, A., in München. Ueber Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen 41

——— ——— Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylor'schen Lehrsatzes für Functionen einer reellen Variablen . . 57

——— ——— Ueber bedingte Convergenz unendlicher Producte . . 413

Ritter, E., in Göttingen. Die multiplicativen Formen auf algebraischem Gebilde beliebigen Geschlechtes mit Anwendung auf die Theorie der automorphen Formen 261
Runge, C., in Hannover. Ueber angewandte Mathematik 437
Schilling, Fr., in Wilhelmshaven. Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen s-Function 162
Schönflies, A., in Göttingen. Ueber Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke 105
Stäckel, P., in Halle a. S. Ueber Abbildungen. 553
Weber, E. v., in München. Theorie der Flächenelemente höherer Ordnung des Raums von 3 Dimensionen 458

Ueber die Zerlegung der Ideale eines Zahlenkörpers in Primideale.

Von

David Hilbert in Königsberg i. Pr.

Die Grundlage für die Theorie der algebraischen Zahlen bildet der Satz, dass jedes Ideal eines Zahlenkörpers auf eine und nur auf eine Weise in Primideale zerlegt werden kann. Dieser Satz ist zuerst von R. Dedekind*) allgemein ausgesprochen und bewiesen worden. Einen zweiten wesentlich hiervon verschiedenen Beweis gab L. Kronecker**). Die vorliegende Abhandlung enthält einen neuen Beweis***) dieses Satzes.

Es sei ein beliebiger Zahlenkörper vom n^{ten} Grade vorgelegt; dann stelle ich folgende Definitionen auf:

Ein unendliches System von ganzen algebraischen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des Körpers, welches die Eigenschaft besitzt, dass eine jede lineare Combination $\varkappa_1\alpha_1 + \varkappa_2\alpha_2 + \cdots$ derselben wiederum dem Systeme angehört, heisst ein *Ideal* $\mathfrak{j}$ des Körpers; dabei bedeuten $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ beliebige ganze algebraische Zahlen des Körpers. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ solche m Zahlen des Ideals $\mathfrak{j}$, durch deren lineare Combination unter Benutzung ganzer algebraischer Coefficienten alle Zahlen des Ideals erhalten werden können, so setze ich kurz

$$\mathfrak{j} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Wie leicht gezeigt werden kann, giebt es im Ideal $\mathfrak{j}$ stets n Zahlen $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ von der Art, dass eine jede Zahl des Ideals gleich einer linearen Combination derselben von der Gestalt $k_1\alpha_1^0 + \cdots + k_n\alpha_n^0$ ist, wo $k_1, \ldots, k_n$ ganze rationale Zahlen sind. Die Zahlen $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$ heissen eine *Basis* des Ideals $\mathfrak{j}$.

---

*) Vorlesungen über Zahlentheorie von Dirichlet. Supplement XI.

**) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Crelle, Bd. 92.

***) Den Gedankengang dieses Beweises habe ich in der Versammlung der deutschen Mathematiker-Vereinigung München 1893 vorgetragen.

Ein Ideal, welches alle und nur die Zahlen von der Gestalt $\varkappa\eta$ enthält, wo $\varkappa$ jede beliebige ganze Zahl des Körpers darstellt, heisst ein *Hauptideal*, und wird mit (η) oder auch kurz mit η bezeichnet.

Eine jede Zahl α des Ideals $\mathfrak{j} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ heisst *congruent* 0 nach dem Ideal $\mathfrak{j}$ oder in Zeichen:

$$\alpha \equiv 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Wenn alle Zahlen eines Ideals $\mathfrak{k}$ congruent 0 nach $\mathfrak{j}$ sind, so heisst das Ideal $\mathfrak{k}$ *congruent* 0 nach $\mathfrak{j}$ oder in Zeichen

$$\mathfrak{k} \equiv 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Offenbar ist jedes Ideal $\mathfrak{j}$ congruent 0 nach dem Ideal 1 und nach dem Ideal $\mathfrak{j}$ selbst.

Ein von 1 verschiedenes Ideal $\mathfrak{p}$, welches nach keinem anderen Ideal ausser nach 1 und nach sich selbst $\equiv 0$ ist, heisst ein *Primideal*.

Wenn man jede Zahl eines Ideals $\mathfrak{j} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ mit jeder Zahl eines zweiten Ideals $\mathfrak{k} = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$ multiplicirt und die so erhaltenen Zahlen linear mittelst beliebiger ganzer algebraischer Coefficienten combinirt, so wird das so entstehende neue Ideal das *Product* jener beiden Ideale genannt d. h. in Zeichen

$$\mathfrak{j}\mathfrak{k} = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_m\beta_1, \ldots, \alpha_1\beta_l, \ldots, \alpha_m\beta_l).$$

Ein Ideal $\mathfrak{r}$ heisst durch das Ideal $\mathfrak{j}$ *theilbar*, wenn ein Ideal $\mathfrak{k}$ existirt, derart, dass $\mathfrak{r} = \mathfrak{j}\mathfrak{k}$ ist. Ist $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{j}$ theilbar, so ist $\mathfrak{r} \equiv 0$ nach dem Ideal $\mathfrak{j}$.

1. Ein Ideal $\mathfrak{j}$ kann nur nach einer endlichen Anzahl von Idealen $\equiv 0$ sein.

Zum Beweise bilde man die Norm a einer beliebigen Zahl α des Ideals $\mathfrak{j}$; ist dann etwa $\mathfrak{k}$ ein Ideal, nach welchem $\mathfrak{j} \equiv 0$ ist, so muss offenbar auch $a \equiv 0$ nach $\mathfrak{k}$ sein. Die n Basiszahlen von $\mathfrak{k}$ seien von der Gestalt

$$\begin{aligned} &k_{11}\omega_1 + k_{12}\omega_2 + \cdots + k_{1n}\omega_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &k_{n1}\omega_1 + k_{n2}\omega_2 + \cdots + k_{nn}\omega_n, \end{aligned}$$

wo $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine Basis der ganzen Zahlen des Körpers und wo $k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{nn}$ ganze rationale Zahlen sind. Bedeuten $k'_{11}, k'_{12}, \ldots, k'_{nn}$ bezüglich die kleinsten positiven Reste der Zahlen, $k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{nn}$ nach dem Modul a, so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= (k_{11}\omega_1 + \cdots + k_{1n}\omega_n, \cdots, k_{n1}\omega_1 + \cdots + k_{nn}\omega_n) \\ &= (k'_{11}\omega_1 + \cdots + k'_{1n}\omega_n, \cdots, k'_{n1}\omega_1 + \cdots + k'_{nn}\omega_n, a) \end{aligned}$$

und diese Darstellung des Ideals $\mathfrak{k}$ lässt unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung erkennen.

2. Ein jedes von 1 verschiedene Ideal $\mathfrak{j}$ ist $\equiv 0$ nach mindestens einem Primideal $\mathfrak{p}$.

Denn falls $\mathfrak{j}$ nicht schon selbst ein Primideal ist, so giebt es ein von $\mathfrak{j}$ und von 1 verschiedenes Ideal $\mathfrak{j}_1$ nach welchem $\mathfrak{j} \equiv 0$ ist. Es sei ferner $\mathfrak{j}_2$ ein von 1 und von $\mathfrak{j}_1$ verschiedenes Ideal, nach welchem $\mathfrak{j}_1 \equiv 0$ ist; $\mathfrak{j}_3$ ein von $\mathfrak{j}_2$ und 1 verschiedenes Ideal, nach welchem $\mathfrak{j}_2 \equiv 0$ ist u. s. f. In der Reihe $\mathfrak{j}, \mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \mathfrak{j}_3, \ldots$ ist jedes Ideal $\equiv 0$ nach allen folgenden Idealen. Ueberdies sind sämmtliche Ideale dieser Reihe unter einander verschieden. Denn die Annahme $\mathfrak{j}_r = \mathfrak{j}_s$, $r > s$ hätte $\mathfrak{j}_r \equiv 0$ nach $\mathfrak{j}_s$ und mithin auch nach $\mathfrak{j}_{r-1}$ zur Folge; da jedoch auch $\mathfrak{j}_{r-1} \equiv 0$ nach $\mathfrak{j}_r$ ist, so wäre nothwendig $\mathfrak{j}_{r-1} = \mathfrak{j}_r$ und dieser Umstand widerspricht der Voraussetzung. Nach Satz 1 bricht die Reihe dieser Ideale $\mathfrak{j}, \mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \mathfrak{j}_3, \ldots$ ab. Das letzte Ideal ist ein Primideal.

Der eben bewiesene Satz kann auch, wie folgt ausgesprochen werden.

Wenn ein Ideal nach keinem Primideal $\equiv 0$ ist, so ist es das Ideal 1.

3. Wenn das Product $\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ zweier Ideale $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k} \equiv 0$ ist nach einem Primideal $\mathfrak{p}$, so ist entweder $\mathfrak{j} \equiv 0$ oder $\mathfrak{k} \equiv 0$ nach dem Primideal $\mathfrak{p}$.

Ist etwa $\mathfrak{j}$ nicht $\equiv 0$ nach $\mathfrak{p}$, so bestimme man eine Zahl α des Ideals $\mathfrak{j}$, welche nicht $\equiv 0$ nach $\mathfrak{p}$ ist. Ferner bilde man aus $\mathfrak{p} = (\pi_1, \ldots, \pi_r)$ durch Hinzufügung der Zahl α das Ideal $(\pi_1, \ldots, \pi_r, \alpha)$. Dieses Ideal ist offenbar weder nach $\mathfrak{p}$ noch nach irgend einem anderen Primideal $\equiv 0$ und folglich nach Satz 2 gleich dem Ideal 1, d. h.

$$1 = \varkappa\alpha + \varkappa_1\pi_1 + \cdots + \varkappa_r\pi_r,$$

wo $\varkappa, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ geeignet gewählte ganze algebraische Zahlen des Körpers sind. Die erhaltene Gleichung lautet als Congruenz geschrieben: $1 \equiv \varkappa\alpha$ nach dem Primideal $\mathfrak{p}$. Bezeichnet nun β irgend eine Zahl des Ideals $\mathfrak{k}$, so ist nach Voraussetzung $\alpha\beta \equiv 0$ nach $\mathfrak{p}$. Und hieraus folgt nach Multiplication mit $\varkappa$ die Congruenz $\beta \equiv 0$ nach dem Primideal $\mathfrak{p}$.

4. Wenn ein Ideal $\mathfrak{j} \equiv 0$ nach einem Hauptideal (η) ist, so ist $\mathfrak{j}$ durch (η) theilbar. Aus $\eta\mathfrak{j} = \eta\mathfrak{k}$ folgt nothwendig $\mathfrak{j} = \mathfrak{k}$.

In der That, da alle Zahlen des Ideals $\mathfrak{j} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ durch die Zahl η theilbar sind, so kann man $\alpha_1 = \eta\beta_1, \ldots, \alpha_m = \eta\beta_m$ setzen und hat dann $\mathfrak{j} = (\eta)(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Ist ferner $\eta\mathfrak{j} \equiv 0$ nach $\eta\mathfrak{k}$, so folgt nach Division durch die Zahl η, dass $\mathfrak{j} \equiv 0$ nach $\mathfrak{k}$ ist. Da wegen $\eta\mathfrak{k} \equiv 0$ nach $\eta\mathfrak{j}$ in gleicher Weise auch $\mathfrak{k} \equiv 0$ nach $\mathfrak{j}$ ist, so folgt nothwendig $\mathfrak{j} = \mathfrak{k}$.

5. In einem jeden Primideal $\mathfrak{p}$ giebt es stets eine rationale Primzahl p von der Art, dass eine jede andere ganze rationale Zahl des Ideals $\mathfrak{p}$ diese Primzahl p als Factor enthält.

Zum Beweise nehme man die Norm a einer Zahl von $\mathfrak{p}$ und zerlege a in seine rationalen Primfactoren. Fasst man diese als Hauptideale auf, so ist nach Satz 3 einer derselben etwa $p \equiv 0$ nach dem Primideal $\mathfrak{p}$. Gäbe es nun in $\mathfrak{p}$ noch eine ganze rationale Zahl b, welche nicht durch p theilbar wäre, so bestimme man zwei ganze rationale Zahlen r und s derart, dass $1 = rp + sb$ ist; hieraus würde $1 \equiv 0$ nach $\mathfrak{p}$ folgen, was nicht möglich ist.

Nunmehr nehmen wir zunächst an, dass der vorgelegte Zahlenkörper ein Galois'scher*) Körper sei; dann wird aus jedem Ideal des Körpers jedenfalls wieder ein Ideal des nämlichen Körpers entstehen, wenn wir in jenem Ideal statt einer jeden Zahl eine conjugirte Zahl einsetzen. Sind insbesondere alle aus einem vorgelegten Ideal $\mathfrak{a}$ auf diese Weise entstehenden $n-1$ conjugirten Ideale mit dem vorgelegten Ideal $\mathfrak{a}$ identisch, so nenne ich das Ideal $\mathfrak{a}$ ein *ambiges* Ideal. Dieser Begriff des ambigen Ideals ist ein wesentliches Hilfsmittel meines Beweises. Von einem ambigen Ideal gilt der Satz:

I. *Wenn ein ambiges Ideal* $\mathfrak{a} \equiv 0$ *nach einem Primideal* $\mathfrak{p}$ *ist, so sind alle Zahlen von* $\mathfrak{a}$ *durch* $p^{\frac{1}{n}}$ *theilbar, wo* p *die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primzahl bedeutet.*

In der That, wenn α eine Zahl des Ideals $\mathfrak{a}$ ist, so gehören auch die zu α conjugirten Zahlen dem Ideal $\mathfrak{a}$ an; dieselben sind folglich sämmtlich $\equiv 0$ nach dem Primideal $\mathfrak{p}$. Nun sei

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

die Gleichung n^{ten} Grades mit ganzen rationalen Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ welcher die Zahl α genügt. Diese Coefficienten sind als homogene Functionen der Wurzeln der Gleichung ebenfalls $\equiv 0$ nach dem Primideal $\mathfrak{p}$ und mithin nach Satz 5 durch p theilbar. Die Zahl $\beta = \frac{\alpha}{p^{\frac{1}{n}}}$ genügt der Gleichung

$$\beta^n + \frac{a_1}{p}p^{\frac{n-1}{n}}\beta^{n-1} + \frac{a_2}{p}p^{\frac{n-2}{n}}\beta^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{p} = 0$$

und da die Coefficienten dieser Gleichung sämmtlich ganze algebraische Zahlen sind, so ist auch β eine ganze algebraische Zahl.

---

*) Auch Kronecker beweist den Satz von der Zerlegung in Primideale zuerst für einen Galois'schen Körper; doch ist es bemerkenswerth, dass für die Kronecker'sche Schlussweise dieser Gedanke keineswegs wesentlich ist. Vielmehr lässt sich das Kronecker'sche Beweisverfahren durch eine geringfügige Abänderung in der Reihenfolge der Schlüsse unmittelbar auf beliebige Körper anwenden. Der so abgeänderte Kronecker'sche Beweis kommt somit lediglich mit dem Hilfsmittel der unbestimmten Coefficienten aus.

Ferner lässt sich für ein ambiges Ideal leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes erkennen:

II. *Wenn ein ambiges Ideal* $\mathfrak{a} \equiv 0$ *nach einem Primideal* $\mathfrak{p}$ *ist, so giebt es immer eine rationale Zahl* r *von der Art, dass die Zahlen des Ideals* $\mathfrak{a}$ *durch* p^r, *aber nicht sämmtlich durch eine höhere ganze oder gebrochene Potenz von* p *theilbar sind.*

Zum Beweise wähle man eine beliebige Zahl α des Ideals $\mathfrak{a}$; dieselbe genüge der Gleichung n^{ten} Grades

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

wo allgemein a_i eine ganze rationale Zahl bedeutet, welche durch die ganze Potenz p^{g_i}, aber durch keine höhere Potenz von p theilbar ist. Die kleinste der Zahlen $\frac{g_1}{1}, \frac{g_2}{2}, \cdots, \frac{g_n}{n}$ werde r_α genannt. In allen anderen Zahlen $\alpha', \alpha'', \ldots$, des Ideals $\mathfrak{a}$ denke man sich in gleicher Weise die zugehörigen rationalen Zahlen $r_{\alpha'}, r_{\alpha''}, \ldots$ bestimmt. Da die Nenner dieser rationalen Zahlen die Zahl n nicht übersteigen, so giebt es unter ihnen nothwendig eine kleinste Zahl; ist etwa r_α diese kleinste Zahl, dann erfüllt die Zahl $r = r_\alpha$ die Bedingungen des Satzes. Denn erstens sind offenbar sämmtliche Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ durch p^{r_α} theilbar. Zweitens nehmen wir an, es wären sämmtliche Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ durch p^R theilbar, wo R eine rationale Zahl bedeutet; es müssten dann auch die Zahl α und die zu α conjugirten Zahlen durch p^R theilbar sein, und dann wären die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der obigen Gleichung bezüglich durch $p^R, p^{2R}, \ldots, p^{nR}$ theilbar. Hieraus folgt allgemein $iR \leqq g_i$ oder $R \leqq \frac{g_i}{i}$, und da r_α selbst eine der Zahlen $\frac{g_i}{i}$ ist, so ergiebt sich $R \leqq r_\alpha$; d. h. die Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ sind nicht sämmtlich durch eine höhere als die r_α^{te} Potenz von p theilbar.

Wir beweisen nun für den Galois'schen Körper der Reihe nach die folgenden Sätze:

III. *Zu jedem vorgelegten Primideal* $\mathfrak{p}$ *lässt sich stets ein Ideal* $\mathfrak{k}$ *so bestimmen, dass das Product* $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ *ein Hauptideal ist.*

Zum Beweise bilde man die $n-1$ zu $\mathfrak{p}$ conjugirten Ideale $\mathfrak{p}', \ldots, \mathfrak{p}^{(n-1)}$. Wie man durch Uebergang zu den conjugirten Körpern leicht einsieht, sind diese Ideale sämmtlich ebenfalls Primideale und allen gehört die nämliche Primzahl p zu. Das Product $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}' \ldots \mathfrak{p}^{(n-1)}$ ist offenbar ein ambiges Ideal*). Nach Satz II giebt es eine rationale

*) Bezeichnet man mit $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \ldots, \mathfrak{p}^{(\nu-1)}$ die ν von einander verschiedenen unter den n conjugirten Idealen, so ist auch bereits das Product dieser ν Ideale ein ambiges Ideal und daher gemäss der nachfolgenden Beweisführung gleich einer gebrochenen Potenz von p.

Zahl $r = \frac{t}{u}$, wo t und u ganze Zahlen sind, von der Beschaffenheit, dass die Zahlen von $\mathfrak{a}$ durch p^r, aber durch keine höhere Potenz von p theilbar sind. Das Ideal $\mathfrak{a}^u$ wird folglich durch p^t theilbar und der Quotient $\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{a}^u}{p^t}$ ist offenbar wieder ein ambiges Ideal. Wir nehmen nun an, es sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal, nach welchem $\mathfrak{b} \equiv 0$ ist. Da dann auch $\mathfrak{a}^u \equiv 0$ nach $\mathfrak{q}$ ist, so müsste nach Satz 3 entweder $\mathfrak{p} \equiv 0$ oder $\mathfrak{p}' \equiv 0, \ldots,$ oder $\mathfrak{p}^{(n-1)} \equiv 0$ nach $\mathfrak{q}$ sein. Es sei etwa $\mathfrak{p}^{(m)} \equiv 0$ nach $\mathfrak{q}$, so würde da $\mathfrak{p}^{(m)}$ ein Primideal ist, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{(m)}$ folgen, d. h. $\mathfrak{b} \equiv 0$ nach dem Primideal $\mathfrak{p}^{(m)}$ und folglich müsste nach Satz I das Ideal $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{p}^{\frac{1}{n}}$ theilbar sein; d. h. $\mathfrak{a}^u$ wäre durch $p^{t+\frac{1}{n}}$ und folglich wären die Zahlen von $\mathfrak{a}$ sämmtlich durch eine höhere als die r^{te} Potenz von p theilbar; dies widerspricht der Wahl des Exponenten r. Aus Satz 2 folgt somit $\mathfrak{b} = 1$, d. h. $\mathfrak{a}^u = p^t$. Setzen wir $\mathfrak{k} = \mathfrak{p}' \ldots \mathfrak{p}^{(n-1)} \mathfrak{a}^{u-1}$, so folgt $\mathfrak{p}\mathfrak{k} = p^t$.

IV. *Ein Ideal* $\mathfrak{j}$ *kann nur auf eine einzige Weise als Product von Primidealen dargestellt werden.*

Zum Beweise nehmen wir an, es gebe zwei Zerlegungen des Ideals $\mathfrak{j}$ etwa:

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r} \ldots \mathfrak{l},$$
$$\mathfrak{j} = \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{r}' \ldots \mathfrak{l}',$$

wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \ldots, \mathfrak{l}$ und $\mathfrak{p}', \mathfrak{q}', \mathfrak{r}', \ldots, \mathfrak{l}'$ Primideale sind. Da wegen der ersten Zerlegung das Ideal $\mathfrak{j} \equiv 0$ nach $\mathfrak{p}$ ist, so folgt aus der zweiten Zerlegung nach Satz 3, dass eines der Primideale $\mathfrak{p}', \mathfrak{q}', \mathfrak{r}', \ldots, \mathfrak{l}' \equiv 0$ nach $\mathfrak{p}$ ist. Es sei etwa $\mathfrak{p}' \equiv 0$ nach $\mathfrak{p}$; dann wird, weil $\mathfrak{p}'$ ein Primideal ist, nothwendig $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. Nun construire man nach Satz III ein Ideal $\mathfrak{k}$ von der Art, dass $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ gleich einem Hauptideal η wird und multiplicire die beiden obigen Darstellungen von $\mathfrak{j}$ mit $\mathfrak{k}$. Wegen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ folgt dann

$$\eta\mathfrak{q}\mathfrak{r} \cdots \mathfrak{l} = \eta\mathfrak{q}'\mathfrak{r}' \cdots \mathfrak{l}'$$

und hieraus nach Satz 4:

$$\mathfrak{j}' = \mathfrak{q}\mathfrak{r} \cdots \mathfrak{l} = \mathfrak{q}'\mathfrak{r}' \cdots \mathfrak{l}'.$$

Auf diese doppelte Zerlegung des Ideals $\mathfrak{j}'$ wende man das eben eingeschlagene Verfahren von neuem an: man erkennt so schliesslich die Identität der beiden vorgelegten Darstellungen des Ideals $\mathfrak{j}$.

V. *Ein jedes Ideal* $\mathfrak{j}$ *lässt sich stets als Product von Primidealen darstellen.*

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, nach welchem $\mathfrak{j} \equiv 0$ wird, so bestimme man nach Satz III ein Ideal $\mathfrak{k}$ derart, dass $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ gleich einem Hauptideal η wird. Durch Multiplication jener Congruenz mit $\mathfrak{k}$ folgt dann $\mathfrak{k}\mathfrak{j} \equiv 0$

nach dem Ideal $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ und gemäss Satz 4 ist daher $\mathfrak{k}\mathfrak{j} = \eta\mathfrak{j}'$. Nach Multiplication dieser Gleichung mit $\mathfrak{p}$ und Division durch η ergiebt sich $\mathfrak{j} = \mathfrak{p}\mathfrak{j}'$. Wenden wir auf das Ideal $\mathfrak{j}'$ das nämliche Verfahren an, wie soeben auf $\mathfrak{j}$, so ergiebt sich $\mathfrak{j}' = \mathfrak{q}\mathfrak{j}''$, wo $\mathfrak{q}$ ein Primideal bedeutet, nach welchem $\mathfrak{j}' \equiv 0$ ist. In gleicher Weise erhalten wir $\mathfrak{j}'' = \mathfrak{r}\mathfrak{j}'''$; wo $\mathfrak{r}$ ein Primideal bedeutet, nach welchem $\mathfrak{j}'' \equiv 0$ ist u. s. f. Die Einsetzung dieser Werthe von $\mathfrak{j}', \mathfrak{j}'', \ldots$ liefert für das Ideal $\mathfrak{j}$ der Reihe nach die Darstellungen $\mathfrak{j} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{j}''$, $\mathfrak{j} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\mathfrak{j}'''$, ... Nun giebt es nach Satz 1 nur eine endliche Anzahl von Idealen, nach denen $\mathfrak{j} \equiv 0$ ist. Ist m diese Anzahl, so wird jedenfalls das eingeschlagene Verfahren nach m-maliger Anwendung abbrechen. Denn es ist $\mathfrak{j} \equiv 0$ nach den Idealen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}$, ... und diese Ideale sind nach IV sämmtlich von einander verschieden. Nach Beendigung des Verfahrens erhalten wir für das Ideal $\mathfrak{j}$ die verlangte Zerlegung:

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\cdots\mathfrak{l}$$

wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \ldots, \mathfrak{l}$ Primideale sind.

Damit ist der Beweis des Satzes von der Zerlegung in Primideale für einen Galois'schen Körper vollständig geführt.

Wir betrachten nun einen beliebigen Körper niederen als n^{ten} Grades, dessen Zahlen sämmtlich auch Zahlen des eben behandelten Galois'schen Körpers sind und bezeichnen zur Unterscheidung die Zahlen und Ideale dieses niederen Körpers mit grossen Buchstaben. Wir denken uns die Zahlen des Galois'schen Körpers als rationale Functionen der Wurzel ϑ einer irreduciblen Gleichung n^{ten} Grades dargestellt und bezeichnen dann die übrigen $n - 1$ Wurzeln dieser Gleichung mit $\vartheta', \vartheta'', \ldots, \vartheta^{(n-1)}$. Diese Wurzeln sind dann rationale Functionen von ϑ und die Einsetzung derselben an Stelle von ϑ bewirkt den Uebergang zu den conjugirten Körpern. Es giebt, wie die Galois'sche Theorie lehrt, eine gewisse Gruppe G von ν Substitutionen: $\vartheta = \vartheta, \vartheta = \vartheta', \ldots, \vartheta = \vartheta^{(\nu-1)}$ von der Eigenschaft, dass jede Zahl des niederen Körpers bei einer Substitution dieser Gruppe ungeändert bleibt und dass auch umgekehrt jede bei diesen Substitutionen ungeändert bleibende Zahl des Galois'schen Körpers dem niederen Körper angehört. Nun zerlege man ein Ideal $\mathfrak{J} = (A_1, A_2, \ldots, A_l)$ des niederen Körpers im Galois'schen Körper in Primideale etwa $\mathfrak{J} = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_m$ und bestimme dann die Ideale $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_m$ derart, dass die Producte $\mathfrak{p}_1\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\mathfrak{k}_m$ Hauptideale werden. Setzen wir $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \ldots \mathfrak{k}_m$, so wird auch $\mathfrak{J}\mathfrak{k}$ gleich einem Hauptideal η und es gilt daher eine Gleichung von der Gestalt

$$\eta = A_1\varkappa_1 + A_2\varkappa_2 + \cdots + A_l\varkappa_l,$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_l$ Zahlen des Ideals $\mathfrak{k}$ sind. Auf diese Gleichung wende man die Substitutionen $\vartheta = \vartheta', \ldots, \vartheta = \vartheta^{(\nu-1)}$ an; es ergeben sich dann der Reihe nach $\nu - 1$ Gleichungen von der Gestalt

$$\eta' = A_1 x_1' + A_2 x_2' + \cdots + A_l x_l',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta^{(\nu-1)} = A_1 x_1^{(\nu-1)} + A_2 x_2^{(\nu-1)} + \cdots + A_l x_l^{(\nu-1)}.$$

Die Multiplication aller ν Gleichungen liefert

$$H = A_2^{\nu} K_1 + A_1^{\nu-1} A_2 K_2 + A_1^{\nu-2} A_2^2 K_3 + \cdots + A_l^{\nu} K_M,$$

wo sowohl $H = \eta\eta' \ldots \eta^{(\nu-1)}$ als auch die Coefficienten $K_1, \ldots, K_M$ bei Anwendung der Substitutionen der Gruppe G ungeändert bleiben und daher Zahlen des niederen Körpers sind. Bezeichnen wir das Ideal $(K_1, \ldots, K_M)$ des niederen Körpers mit $\mathfrak{K}$, so gilt im niederen Körper die Gleichung $H = \mathfrak{J}^{\nu}\mathfrak{K}$. In der That ist H in Folge der vorigen Gleichung eine Zahl des Ideals $\mathfrak{J}^{\nu}\mathfrak{K}$ und es bedarf daher nur des Nachweises, dass jede Zahl des Ideals $\mathfrak{J}^{\nu}\mathfrak{K}$ durch H theilbar ist. Nun ergiebt wegen $\eta = \mathfrak{J}\mathfrak{k}$ jede der Zahlen $A_1, \ldots, A_l$ mit jeder der Zahlen $x_1, \ldots, x_l$ multiplicirt ein durch η theilbares Product, ebenso ergiebt jede der Zahlen $A_1, \ldots, A_l$ mit jeder der Zahlen $x_1', \ldots, x_l'$ multiplicirt ein durch η' theilbares Product u. s. f. und hieraus folgt, dass das Product von irgend ν Zahlen $A_1, \ldots, A_l$, multiplicirt mit einer der Zahlen $K_1, \ldots, K_M$ durch $\eta\eta' \ldots \eta^{(\nu-1)} = H$ theilbar ist. Setzen wir $\mathfrak{J}^{\nu-1}\mathfrak{K} = \mathfrak{L}$, so wird $\mathfrak{J}\mathfrak{L} = H$ und diese Gleichung zeigt, dass zu jedem vorgelegten Ideal des niederen Körpers stets ein Ideal $\mathfrak{L}$ des niederen Körpers derart bestimmt werden kann, dass das Product $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ ein Hauptideal H des niederen Körpers wird. Aus diesem Satze kann der Satz von der eindeutigen Zerlegung eines Ideals in Primideale für den niederen Körper genau so geschlossen werden, wie oben aus Satz III die Sätze IV und V abgeleitet worden sind. Da ferner ein jeder beliebige Körper als ein Körper aufgefasst werden kann, welcher in einem Galois'schen Körper als niederer Körper enthalten ist, so haben wir hiermit den Satz von der eindeutigen Zerlegung eines Ideals allgemein als gültig erkannt.

Ostseebad Cranz, den 26. September 1893.

Ueber die partielle Differentialgleichung des Problems

$$\delta \iint V(p, q)\, dx\, dy = 0.$$

Von

Josef Kürschák in Budapest.

Es soll hier von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} r + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial p\, \partial q} s + \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} t = 0, \tag{1}$$

in der V eine gegebene Function von p und q allein ist, untersucht werden:

A) wann sie nach der Monge'schen Methode integrirbar ist, also unter welcher Bedingung sie allgemeine erste Integrale (im engeren Sinne) besitzt,

B) wie sich dann die allgemeinen ersten Integrale und die allgemeine Lösung bestimmen lassen.

Beide Fragen sind bereits in der Inauguraldissertation des Herrn Julius Vályi*) beantwortet worden; die nachfolgenden Untersuchungen enthalten aber nicht nur eine gänzlich andere Begründung der Vályi'schen Resultate, sondern auch die Ergebnisse selbst in einer bedeutend übersichtlicheren Form.

1. Der besondere Fall

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p\, \partial q}\right)^2 \equiv 0$$

lässt sich besonders leicht erledigen. Giebt man nämlich der Differentialgleichung (1) mittels der Legendre'schen Berührungstransformation die Gestalt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} T - 2 \frac{\partial^2 V}{\partial X\, \partial Y} S + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} R = 0,$$

und führt dann als unabhängige Variable

*) Diese im Jahre 1880 in Klausenburg erschienene (ungarische) Abhandlung enthält überdies auch noch einen Ansatz zur Lösung des Problems:

C) Es sollen alle V bestimmt werden, für welche die Gleichung (1) allgemeine erste Integrale besitzt.

$$\xi = \frac{\partial V}{\partial X}, \quad \eta = Y$$

ein, so geht sie über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 0.$$

In diesem Falle ist also (1) stets nach der Methode von Monge integrirbar, und ihre ersten Integrale wie auch ihre allgemeine Lösung lassen sich ohne jede Integration bestimmen. Diesen Fall können und wollen wir daher von den weiteren Betrachtungen ausschliessen.

2. Auch im allgemeinen Falle, wenn die obige Identität nicht besteht, beginnen wir mit einigen Transformationen, und zwar vorerst wieder mit der Legendre'schen Berührungstransformation:

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = px + qy - z, \quad P = x, \quad Q = y.$$

Wenn wir dabei für X und Y die Bezeichnungen p und q beibehalten, so führt dieselbe (1) über in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial p^2} - 2\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q}\frac{\partial^2 Z}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial q^2} = 0 \tag{2}$$

d. h. in die Differentialgleichung des Problems

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q}\frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q} + \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right)^2 \right) dp\, dq = 0. \tag{3}$$

Nun zerlegen wir die quadratische Form unter dem Integrationszeichen in die linearen Factoren

$$\lambda \frac{\partial Z}{\partial p} + \mu \frac{\partial Z}{\partial q}, \quad \lambda_1 \frac{\partial Z}{\partial p} + \mu_1 \frac{\partial Z}{\partial q}$$

und führen dann als unabhängige Variable solche Functionen ξ und η von p und q ein, welche den Gleichungen

$$\lambda \frac{\partial \xi}{\partial p} + \mu \frac{\partial \xi}{\partial q} = 0, \quad \lambda_1 \frac{\partial \eta}{\partial p} + \mu_1 \frac{\partial \eta}{\partial q} = 0 \tag{4}$$

genügen.

Das Problem (3) verwandelt sich hierdurch in:

$$\delta \iint \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial Z}{\partial \xi}\frac{\partial Z}{\partial \eta}\, d\xi\, d\eta = 0,$$

wo

$$\omega^2 = 2(\lambda_1 \mu - \mu_1 \lambda) = 4\sqrt{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}},$$

und die Gleichung (2) geht über in die Differentialgleichung des neuen Problems, also in die Gleichung:

$$\omega \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\frac{\partial Z}{\partial \eta} = 0,$$

die sich kürzer so schreiben lässt:

$$\frac{\partial^2 (\omega Z)}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} Z.$$

Wird zugleich auch die abhängige Variable geändert, indem man

$$\zeta = \omega Z$$

als solche betrachtet, so erhält die betrachtete partielle Differentialgleichung die Gestalt

$$\frac{1}{\zeta}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}. \tag{5}$$

Die Legendre'sche Berührungstransformation und die Punkttransformation

$$\xi = \xi(X, Y), \quad \eta = \eta(X, Y), \quad \zeta = \omega Z$$

führen also die Gleichung (1) in eine partielle Differentialgleichung von der vielfach untersuchten Form über:

$$\frac{\sigma}{\zeta} = \Lambda(\xi, \eta). \tag{6}$$

3. Von der Differentialgleichung (6) lässt sich leicht beweisen, dass sie allgemeine erste Integrale dann und nur dann besitzt, wenn

$$\Lambda \equiv 0$$

ist, und dies wieder sagt nichts anderes aus, als dass die Gleichung (6) die Lösung

$$\zeta = 1$$

besitzen soll.

Wenden wir diese Bemerkung auf die Gleichung (5) an und gehen dann zur Gleichung (2) zurück, so sehen wir, dass diese in dem betrachteten Falle die Lösung

$$Z = \omega^{-1}$$

zulassen muss.

Die partielle Differentialgleichung (1) hat aber, da immer nur Berührungstransformationen benutzt wurden, stets mit (2) und (5) gleichzeitig allgemeine erste Integrale oder keine; wir können also den Satz aussprechen:

Die partielle Differentialgleichung (1) *besitzt dann und nur dann allgemeine erste Integrale, wenn entweder*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q}\right)^2 \equiv 0$$

ist, oder aber

$$\omega^{-1} = \frac{1}{2\sqrt[4]{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}}}$$

der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\frac{\partial^2 \omega^{-1}}{\partial p^2} - 2\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q}\frac{\partial^2 \omega^{-1}}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\frac{\partial^2 \omega^{-1}}{\partial q^2} = 0 \tag{7}$$

genügt.

4. Diese Bedingungsgleichung lässt sich noch in einer anderen Weise, aber wieder aus dem Verschwinden von Λ ableiten. Die Identität

$$\Lambda \equiv 0$$

lässt sich nämlich auch so deuten, dass dann und nur dann, wenn sie besteht, für jede beliebige Lösung $Z = \varkappa$ von (2) der Differentialquotient

$$\frac{\partial^2(\varkappa\omega)}{\partial\xi\,\partial\eta}$$

verschwindet und daher das Differential von $\varkappa\omega$ die folgende Gestalt annimmt:

$$f(\xi)\,d\xi + g(\eta)\,d\eta^*).$$

Drückt man alles in p und q aus, so existirt also eine Relation von der Form:

$$(8)\quad \frac{\partial(\varkappa\omega)}{\partial p}\,dp + \frac{\partial(\varkappa\omega)}{\partial q}\,dq \equiv M(\mu\,dp - \lambda\,dq) + M_1(\mu_1\,dp - \lambda_1\,dq),$$

in der M und M_1, wenn nicht zufällig Null, integrirende Factoren respective der Differentialgleichungen

$$(9)\quad \mu\,dp - \lambda\,dq = 0$$

und

$$(9^*)\quad \mu_1\,dp - \lambda_1\,dq = 0$$

sind.

Die Relation (8) zerfällt in zwei, aus denen sich für M und M_1 die Ausdrücke ergeben:

$$(10)\quad \tfrac{1}{2}M = \frac{1}{\omega^2}\left(\lambda_1\frac{\partial(\varkappa\omega)}{\partial p} + \mu_1\frac{\partial(\varkappa\omega)}{\partial q}\right),$$

$$(10^*)\quad \tfrac{1}{2}M_1 = -\frac{1}{\omega^2}\left(\lambda\frac{\partial(\varkappa\omega)}{\partial p} + \mu\frac{\partial(\varkappa\omega)}{\partial q}\right).$$

Man hat nun nur noch explicite auszudrücken, dass

$$M(\mu\,dp - \lambda\,dq), \qquad M_1(\mu_1\,dp - \lambda_1\,dq)$$

vollständige Differentiale sind, um eine zweite Ableitung der Bedingung (7) zu erhalten. —

5. Nun ergiebt sich auch sofort die Lösung des Problems B).

Ist die Bedingungsgleichung (7) befriedigt, so kann die Gleichung (1) in folgender Weise gelöst werden.

---

*) Nehmen wir $\varkappa = 1$, so haben wir also den Satz:

Die Gleichung (1) besitzt dann und nur dann allgemeine erste Integrale, wenn die drei Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\omega}{\partial p}\,dp + \frac{\partial\omega}{\partial q}\,dq = 0, \quad \mu\,dp - \lambda\,dq = 0, \quad \mu_1\,dp - \lambda_1\,dq = 0$$

mehr als eine gemeinsame infinitesimale Transformation zulassen. Vgl. Lie-Scheffers, Vorlesungen über Differentialgleichungen. pag. 162 ff.

Man integrirt die Differentialgleichungen (9) und (9*), und gewinnt so die Integrale:

$$\xi(p, q) = C_1, \quad \eta(p, q) = C_2,$$

deren linke Seiten die Gleichungen (4) befriedigen. Es kann nun die gegebene Gleichung (1) in

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

transformirt werden. Diese hat die allgemeinen ersten Integrale

$$\frac{\partial \xi}{\partial \xi} = F(\xi), \quad \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = G(\eta)$$

und die allgemeine Gleichung

$$\xi = f(\xi) + g(\eta).$$

Die Umkehrung der Transformation ergiebt dann die ersten Integrale und die Lösung von (1).

Die einzigen Integrationen, die dieses Verfahren erfordert, nämlich die der Gleichungen (9) *und* (9*) *lassen sich nun vermöge höchstens einer Quadratur erledigen, aber auch dieser bedarf man nur ausnahmsweise.*

Wir kennen nämlich von (2) die trivialen Lösungen:

$$\varkappa = 1, p, q,$$

und diese ergeben in (10) eingesetzt, im allgemeinen die folgenden drei integrirenden Factoren von (9):

$$(12) \qquad \begin{cases} M^{(0)} = \frac{1}{\omega^2}\left(\lambda_1 \frac{\partial \omega}{\partial p} + \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial q}\right), \\ M^{(1)} = \frac{p}{\omega^2}\left(\lambda_1 \frac{\partial \omega}{\partial p} + \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial p}\right) + \frac{\lambda_1}{\omega}, \\ M^{(2)} = \frac{q}{\omega^2}\left(\lambda_1 \frac{\partial \omega}{\partial p} + \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial q}\right) + \frac{\mu_1}{\omega}. \end{cases}$$

Wir gewinnen auf diese Weise stets *wenigstens einen* integrirenden Factor von (9), denn wäre

$$M^{(0)} \equiv M^{(1)} \equiv M^{(2)} \equiv 0$$

so müssten λ_1 und μ_1 verschwinden, was nicht gleichzeitig stattfinden kann.

Wir erhalten aber nur dann *bloss einen* integrirenden Factor, wenn sich

$$M^{(0)}, M^{(2)}, M^{(3)}$$

wie constante Werthe:

$$a, b, c$$

verhalten. Es ist dies dann und nur dann der Fall, wenn

$$\lambda_1 : \mu_1 = (a - cp) : (b - cq)$$

und daher identisch:

$$(11)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}(a-cp)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}(a-cp)(b-cq) + \frac{\partial^2 V}{\partial q^2}(b-cq)^2 = 0$$

ist. In jedem anderen Falle gewinnen wir *zwei* unabhängige integrirende Factoren und in ihrem Quotienten ein Integral von (9).

In ganz analoger Weise lässt sich (9*) integriren; überdies ist in dem Ausnahmefall, wo die Ausdrücke (11) *nur einen einzigen* Multiplicator der Gleichung (9) liefern, und also V einer Gleichung von der Form (12) genügt, unmittelbar:

$$\eta = a\frac{\partial V}{\partial p} + b\frac{\partial V}{\partial q} + c\left(V - p\frac{\partial V}{\partial p} - q\frac{\partial V}{\partial q}\right).$$

eine Lösung der zweiten Gleichung (4).

Es ist nicht leicht möglich, die vorhergehende Ableitung mit der des Herrn Vályi zu vergleichen; wir müssen uns daher auf eine Vergleichung der Resultate beschränken.

Bezeichnen wir

$$q,\ p,\ V,\ \frac{\partial V}{\partial q},\ \frac{\partial V}{\partial p}$$

mit

$$x_1,\ x_2,\ V,\ p_1,\ p_2,$$

so führt die Berührungstransformation

$$X_1 = x_1,\quad X_2 = p_2,\quad H = V - p_2 x,\quad P_1 = p_1,\quad Q_1 = -x_2$$

den Ausdruck

$$D^2 \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}$$

bekanntlich in den Quotienten

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X_1^2} : \frac{\partial^2 H}{\partial X_2^2}$$

über. Bei Herrn Vályi hat nun die Bedingungsgleichung (7) die folgende Gestalt:

$$-2DD_{11} + 2D^3 D_{22} + 3D_1^2 + D^2 D_2^2 = 0$$

wo

$$D_1 = \frac{\partial D}{\partial X_1},\quad D_2 = \frac{\partial D}{\partial X_2},\quad D_{11} = \frac{\partial^2 D}{\partial X_1^2},\quad D_{22} = \frac{\partial^2 D}{\partial X_2^2}.$$

Es ist das eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für D mit der particulären Lösung

$$D = \frac{(a-b)(X_2+c)}{(a-X_1)(b-X_1)}.$$

Deuten wir hier sowohl

$$X_1,\ X_2,\ D$$

wie auch

$$a,\ b,\ c$$

als Punktcoordinaten, so bestimmt die Gleichung

$$(a - X_1)(b - X_1) D - (a - b)(X_2 + c) = 0$$

eine Berührungstransformation. Mittels dieser Transformation giebt Herr Vályi seiner Bedingungsgleichung die bemerkenswerthe Gestalt

$$(a-b)\sqrt{-\frac{\partial c}{\partial a}\frac{\partial c}{\partial b}}\frac{\partial^2 c}{\partial a \partial b} + \frac{\partial c}{\partial a}\frac{\partial c}{\partial b} - 1 = 0.$$

Die integrirenden Factoren

$$M^{(0)},\ M^{(1)},\ M^{(2)}$$

von (9) sind im Vorhergehenden zum erstenmale angegeben. Herr Vályi kennt nur das Integral

$$\frac{M^{(1)}}{M^{(0)}}$$

von (9), nicht aber dessen Zerlegung in integrirende Factoren. Eben darum muss er in den besonderen Fällen, wo dieser Ausdruck dadurch unbrauchbar wird, dass er sich auf einen (endlichen oder unendlichen) constanten Werth reducirt, mittels specieller Untersuchungen die Integration von (9) erledigen, oder wenigstens auf eine Quadratur reduciren. Wie er dies in den fünf Fällen, die dabei unterschieden werden, ausführt, halte ich nicht für nöthig, hier näher anzugeben.*)

Das Hauptresultat meiner Untersuchungen besteht also in der Auffindung der integrirenden Factoren von (9). Die Art, wie ich diese gefunden habe, führt zu einer allgemeineren Fragestellung, die zum Schlusse noch mitgetheilt werden mag.

Die Gleichungen der Form (6) lassen sich nicht nur im Falle

$$\Lambda \equiv 0$$

ohne eigentliche Integration lösen, sondern es giebt ausserdem noch eine unendliche Reihe von Fällen, in denen die Lösung (durch die Methode von Laplace) vollständig erledigt werden kann. Ferner ist evident, dass die Gleichung (1) dann und nur dann nach den Methoden der Herren Darboux**) und König***) lösbar ist, wenn sie mittels

*) Um auch des Problems C) zu gedenken, bemerke ich, dass die Bestimmung von D als Function von X_1 und X_2 die Lösung der oben angegebenen partiellen Differentialgleichung II. Ord. erheischt, worauf dann H aus einer zweiten solchen Gleichung, nämlich aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X_1^2} - D^2 \frac{\partial^2 H}{\partial X_2^2} = 0,$$

zu bestimmen ist. Weiter als bis zur Zerlegung in diese beiden Schritte führt Herr Vályi das Problem nicht und auch dieses hebt er nicht ausdrücklich hervor.

**) Annales de l'École normale. T. VII.

***) Math. Annalen. Bd. 24.

der hier benutzten Transformation in eine solche Gleichung (5) übergeht, die sich nach der Laplace'schen Methode lösen lässt. Diese Bemerkung führt zu Untersuchungen, die sich zuletzt auf die folgende Frage reduciren:

Welche Vereinfachungen treten bei der Lösung von (9) und (9*) ein, wenn sich (1) mittels erster Integrale n^{ter} Gattung, wie dieser Begriff von Herrn Julius König eingeführt ist, lösen lässt?

Die hier ausgeführte Behandlung des Grenzfalles $n = 0$ wird vielleicht auch zur Lösung der soeben gestellten allgemeineren Frage anregen und damit zu einer neuen Anwendung der schönen Untersuchungen des Herrn Darboux*) über die Integrationsmethode von Laplace führen.

*) Leçons sur la théorie gén. des surfaces. T. II, Livre IV.

Ueber die vollständigen Integrale partieller Differentialgleichungsysteme.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

Für eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1) \qquad f\left(z_1, z_2, \cdots z_n, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial z_n}\right) = 0,$$

von welcher stets angenommen werden darf, dass sie sämmtliche partielle Differentialquotienten enthält, da sonst eine oder mehrere der Variabeln nur als Parameter aufzufassen wären, wird ein Integral

$$(2) \qquad u = F(z_1, z_2, \ldots z_n, u, a_1, a_2, \ldots a_n)$$

mit den n willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ ein *vollständiges* genannt, wenn dasselbe der Differentialgleichung (1) und keiner anderen, von (1) unabhängigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, und es lauten bekanntlich die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass (2) ein vollständiges Integral ist, folgendermassen:

Ist u in (1) enthalten, dann ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinante

$$(3) \qquad \delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial a_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial a_n} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet,

ist dagegen u in (1) nicht enthalten, so ist nothwendig und hinreichend, dass $\delta = 0$ ist, dass ferner nicht alle Unterdeterminanten

erster Ordnung nach den Elementen einer Verticalreihe genommen verschwinden und dass endlich, wenn

$$(4)\quad \delta_{\sigma\varrho} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial a_1} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_{\varrho-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_{\varrho-1}} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_{\varrho-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial a_{\varrho-1}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_{\varrho+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_{\varrho+1}} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_{\varrho+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial a_{\varrho+1}} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial a_n} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, die Determinante

$$(5)\quad \delta_\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_1} & \frac{\partial F}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_2} & \frac{\partial F}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial a_2} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_n} & \frac{\partial F}{\partial a_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial a_n} \end{vmatrix}$$

ebenfalls nicht identisch verschwindet.

Sei nun ein partielles Differentialgleichungsystem

$$(6)\quad \begin{cases} f_1(z_1, z_2, \ldots z_\mu, u_1, u_2, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0, \\ \cdots \\ f_m(z_1, z_2, \ldots z_\mu, u_1, u_2, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0 \end{cases}$$

vorgelegt, in welchem $z_1, z_2, \ldots z_\mu$ die unabhängigen, $u_1, u_2, \ldots u_m$ die abhängigen Variabeln bedeuten und

$$(7)\quad p_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial z_s}$$

gesetzt ist, so werde, wenn $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1\mu}, \ldots a_{m1}, a_{m2}, \ldots a_{m\mu}$ $m\mu$ willkürliche Constanten bedeuten,

$$(8)\quad \begin{aligned} u_1 &= F_1(z_1, z_2, \ldots z_\mu, a_{11}, \ldots a_{1\mu}, \ldots a_{m1}, \ldots a_{m\mu}), \ldots \\ u_m &= F_m(z_1, z_2, \ldots z_\mu, a_{11}, \ldots a_{1\mu}, \ldots a_{m1}, \ldots a_{m\mu}) \end{aligned}$$

ein *vollständiges* Integralsystem der Differentialgleichungen (6) genannt, wenn dasselbe für beliebige Werthe der Constanten diesen Differentialgleichungen identisch genügt und keinem andern Differentialgleichungsystem sonst, das nicht aus einer Verbindung der Gleichungen (6) entsteht, also diesen äquivalent ist.

Ist die Functionaldeterminante

$$(9) \qquad \Delta_\mu = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_{1\mu}} & \frac{\partial f_1}{\partial p_{2\mu}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_{m\mu}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_{1\mu}} & \frac{\partial f_2}{\partial p_{2\mu}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial p_{m\mu}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial p_{1\mu}} & \frac{\partial f_m}{\partial p_{2\mu}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial p_{m\mu}} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, so kann das Differentialgleichungsystem (6) auf die Form gebracht werden

$$(10) \quad \begin{cases} p_{1\mu} = \varphi_1 (z_1, \ldots z_\mu, u_1, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu-1}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ p_{m\mu} = \varphi_m (z_1, \ldots z_\mu, u_1, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu-1}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}), \end{cases}$$

und wir dürfen dieses System als das Normalsystem der partiellen Differentialgleichungen zu Grunde legen, da man bekanntlich, wenn $\Delta_\mu = 0$ ist, statt der unabhängigen Variabeln $z_1, \ldots z_\mu$ durch ein lineares Substitutionssystem

$$y_1 = b_1 + c_{11} z_1 + c_{12} z_2 + \cdots + c_{1\mu} z_\mu,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_\mu = b_\mu + c_{\mu 1} z_1 + c_{\mu 2} z_2 + \cdots + c_{\mu\mu} z_\mu$$

μ neue unabhängige Variable $y_1, \ldots y_\mu$ einführen kann, für welche die transformirte Functionaldeterminante nicht verschwindet. Zugleich sei aber bemerkt, dass die Annahme, dass Δ_μ von Null verschieden ist, für die durch (8) gegebenen vollständigen Integrale die Bedingung nach sich zieht, dass die Determinante

$$(11) \quad \vartheta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{11}} & \frac{\partial F_m}{\partial a_{11}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{12}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{12}} & \frac{\partial F_1}{\partial a_{12}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{12}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{12}} & \frac{\partial F_m}{\partial a_{12}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{m\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{m\mu}} & \frac{\partial F_1}{\partial a_{m\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{m\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{m\mu}} & \frac{\partial F_m}{\partial a_{m\mu}} \end{vmatrix}$$

ebenfalls nicht verschwindet, da im entgegengesetzten Falle sich aus den Gleichungen

$$p_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \quad \cdots \quad p_{1\mu-1} = \frac{\partial F_1}{\partial z_{\mu-1}},$$
$$u_1 = F_1, \quad \cdots \quad p_{m1} = \frac{\partial F_m}{\partial z_1}, \quad \cdots \quad p_{m\mu-1} = \frac{\partial F_m}{\partial z_{\mu-1}}, \quad u_m = F_m$$

durch Elimination von $a_{11} \ldots a_{m\mu}$ eine Beziehung der Form

$$\varphi(p_{11}, \ldots p_{1\mu-1}, u_1, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}, u_m) = 0$$

ergeben würde, welche, da (8) ein vollständiges Integralsystem bilden sollte, aus (6) entspringen müsste, was wiederum vermöge der Annahme, dass Δ_μ von Null verschieden ist, nicht angeht.

Nehmen wir nun zunächst an, dass die Functionaldeterminante

$$(12) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \frac{\partial f_m}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so ist leicht ersichtlich, dass auch die Determinante

$$(13) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \ldots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{11}} & \ldots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \ldots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_\mu \partial a_{11}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{12}} & \ldots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{12}} & \ldots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{12}} & \ldots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_\mu \partial a_{12}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{m\mu}} & \ldots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{m\mu}} & \ldots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{m\mu}} & \ldots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_\mu \partial a_{m\mu}} \end{vmatrix}$$

nicht verschwinden darf; denn wäre dies der Fall, so ergäbe sich aus den Gleichungen

$$(14) \quad p_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \ \ldots \ p_{1\mu} = \frac{\partial F_1}{\partial z_\mu}, \ \ldots \ p_{m1} = \frac{\partial F_m}{\partial z_1}, \ \ldots \ p_{m\mu} = \frac{\partial F_m}{\partial z_\mu}$$

ein Zusammenhang der Form

$$(15) \qquad \psi(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0,$$

der durch die Integrale (8) identisch befriedigt würde und also, da diese ein vollständiges Integralsystem bilden sollten, zu den Differentialgleichungen des vorgelegten Systems gehören müsste, was wiederum nicht möglich ist, da in diesem Falle gegen die Voraussetzung $\Delta = 0$ sein müsste. Wir behaupten aber auch umgekehrt, dass, wenn D von Null verschieden ist, das Integralsystem (8) ein vollständiges sein wird; denn zunächst lassen sich unter dieser Voraussetzung $a_{11}, \ldots a_{1\mu}, \ldots a_{m1}, \ldots a_{m\mu}$ aus (14) als Functionen von $z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1} \ldots p_{m\mu}$ ausdrücken und liefern in (8) eingesetzt m Differentialgleichungen der Form

$$(16)\quad u_1 = \psi_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}), \ldots$$
$$u_m = \psi_m(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}),$$

und andere nicht äquivalente Differentialgleichungen können für die Integralformen (8) nicht existiren, da im entgegengesetzten Falle durch Elimination der u-Grössen sich eine von diesen freie Differentialgleichung ergeben würde, welche als eine zwischen den Grössen $z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}$ bestehende Relation das Verschwinden der Determinante D gegen die Voraussetzung nothwendig machte;

ist also die Functionaldeterminante Δ von Null verschieden, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (8) *ein vollständiges Integralsystem von* (6) *ist, die, dass D von Null verschieden ist.*

Sei nun $\Delta = 0$, werde aber angenommen, dass nicht alle Unterdeterminanten erster Ordnung nach den Elementen jeder der Horizontalreihen genommen, verschwinden, so wird man die Differentialgleichungen offenbar auf die Form bringen können

$$(17)\quad f_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0,$$

$$(18)\quad f_2(z_1, \ldots z_\mu, u_1, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0, \ldots$$
$$f_m(z_1, \ldots z_\mu, u_1, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0,$$

und es wird sich also zunächst aus (17) ergeben, dass $D = 0$ sein muss; aber es dürfen nicht *alle* Unterdeterminanten erster Ordnung von D genommen nach den Gliedern der μ^{ten}, $2\mu^{\text{ten}}$, $\ldots m\mu^{\text{ten}}$ Verticalreihe verschwinden. Denn das Nullwerden aller Unterdeterminanten erster Ordnung z. B. nach den Elementen der $m\mu^{\text{ten}}$ Verticalreihe würde die Relationen nach sich ziehen

$$(19)\quad \omega_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}, a_{11}) = 0, \ldots$$
$$\omega_{m\mu}(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}, a_{m\mu}) = 0,$$

in deren einer mindestens die a-Grösse fehlen muss, weil sich sonst $a_{11}, \ldots a_{m\mu}$ aus (19) ausrechnen und in (8) eingesetzt ein Differentialgleichungssystem liefern würde, in welchem jede Gleichung eine und nur eine u-Grösse enthielte und also mit der Bedingung $\Delta = 0$ und der Annahme eines vollständigen Integralsystems nicht vereinbar wäre; da nun das Verschwinden aller Unterdeterminanten erster Ordnung nach den Elementen jeder anderen der μ^{ten}, $2\mu^{\text{ten}}$, $\ldots m\mu^{\text{ten}}$ Verticalreihe eine ähnliche von einer a-Grösse freie Beziehung lieferte, sich somit m Differentialgleichungen der Form ergäben,

$$(20)\quad \Omega_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu-1}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0, \ldots$$
$$\Omega_m(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}) = 0,$$

diese aber sämmtlich in eine zusammenfallen müssten, weil sonst alle Unterdeterminanten erster Ordnung von Δ gegen die Voraussetzung verschwinden würden, so ergäbe sich der Gleichung (17) entsprechend die Beziehung

$$(21) \qquad \Omega(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu-1}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}) = 0,$$

deren Bestehen andererseits wiederum unmöglich ist, weil Δ_μ in (9) als von Null verschieden angenommen werden durfte. Ist nun diese nothwendige Bedingung erfüllt, dass nicht alle Unterdeterminanten erster Ordnung von D genommen nach den Gliedern der $\mu^{\text{ten}}, 2\mu^{\text{ten}}, \ldots m\mu^{\text{ten}}$ Verticalreihe verschwinden, und sei z. B. die nach dem letzten Gliede der letzten Verticalreihe von D genommene Unterdeterminante erster Ordnung

$$(22) \quad D_{m\mu} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{m\mu-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{m\mu-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{m\mu-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{m\mu-1}} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, so kann man zunächst aus den Gleichungen

$$(23) \quad p_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \cdots p_{1\mu} = \frac{\partial F_1}{\partial z_\mu}, \cdots p_{m1} = \frac{\partial F_m}{\partial z_1}, \cdots p_{m\mu-1} = \frac{\partial F_m}{\partial z_{\mu-1}}$$

die Grössen $a_{11}, \ldots a_{1\mu}, \ldots a_{m1}, \ldots a_{m\mu-1}$ als Functionen der $p_{11}, \ldots p_{m\mu-1}, z_1, \ldots z_\mu$ und $a_{m\mu}$ ausrechnen und in die Gleichung

$$(24) \qquad p_{m\mu} = \frac{\partial F_m}{\partial z_\mu}$$

einsetzen, und es wird dann, da $D = 0$ ist, $a_{m\mu}$ herausfallen, und sich eine Differentialgleichung der Form

$$(25) \qquad \psi_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0$$

ergeben, in welcher $p_{m\mu}$ nicht fehlt; setzt man die für die a-Grössen gewonnenen Werthe dagegen in (8) ein, so dass man

$$(26) \quad u_1 = \omega_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}, a_{m\mu}), \ldots$$
$$u_m = \omega_m(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}, a_{m\mu})$$

erhält, so wird zunächst $a_{m\mu}$ nicht aus allen Gleichungen (26) herausfallen dürfen, wenn die Gleichungen (8) ein vollständiges Integralsystem bilden sollen, da dann Δ gegen die Voraussetzung von Null verschieden wäre, und es folgt somit als weitere nothwendige Bedingung, dass nicht für *jedes* ϱ aus den Zahlen $1, 2, \ldots m$ die Determinante

$$(27)\quad \vartheta_\varrho = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{11}} & \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{11}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{12}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{12}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{12}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{12}} & \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{12}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{m\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{m\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{m\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{m\mu}} & \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m\mu}} \end{vmatrix}$$

verschwinden darf. Seien nun diese Bedingungen erfüllt, so ergiebt sich einerseits, wie oben gezeigt, eine Differentialgleichung der Form (25), andererseits liefern die Gleichungen (26) durch Elimination von $a_{m\mu}$ $m-1$ andere dazu gehörige Differentialgleichungen, und es ist nur noch zur Feststellung der hinreichenden Bedingungen zu sehen, ob unter den gemachten Voraussetzungen die Integrale (8) nicht noch einem andern partiellen Differentialgleichungsystem genügen können. Wäre dies aber der Fall, so könnte man durch Elimination von $p_{1\mu}, p_{2\mu}, \ldots p_{m\mu}$ aus den m Differentialgleichungen, die aus (25) und (26) entstanden, und je einer Differentialgleichung des etwa noch sonst bestehenden Differentialgleichungsystems, wenn dieses dem ersteren nicht äquivalent ist, mindestens *eine* Differentialgleichung der Form

$$(28)\quad \Omega(z_1, \ldots z_\mu, u_1, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu-1}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}) = 0$$

herleiten. Aber eine solche Beziehung kann nicht bestehen, da diese das Verschwinden der Determinante ϑ der Gleichung (11) erfordern würde, was vermöge der Annahme, dass Δ_μ von Null verschieden sein sollte, nicht möglich war.

Ist somit — unter der Voraussetzung, dass Δ_μ von Null verschieden — $\Delta = 0$, verschwinden aber nicht alle Unterdeterminanten erster Ordnung von Δ nach den Elementen einer Horizontalreihe genommen, so sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das Integralsystem (8) *ein vollständiges ist, die, dass ϑ von Null verschieden, $D = 0$ ist, mindestens eine der Unterdeterminanten erster Ordnung von D nach der μ^{ten}, $2\mu^{ten}$, ... $m\mu^{ten}$ Verticalreihe genommen nicht verschwindet, und dass endlich die aus D entstehende Determinante, in welcher statt der zum Zwecke der Herstellung der nicht verschwindenden Unterdeterminante erster Ordnung fortgelassenen Verticalreihe die Elemente $\frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{11}}, \ldots, \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m\mu}}$ gesetzt werden, für mindestens ein bestimmtes ϱ aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$ von Null verschieden ist.*

Ist nun $\Delta = 0$ und verschwinden auch alle Unterdeterminanten erster Ordnung nach den Elementen *jeder* ihrer Horizontalreihen genommen, so dass man das Differentialgleichungsystem (6) in die Form bringen kann

$$(29)\quad \varphi_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0,$$

$$(30)\quad \varphi_2(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0,$$

$$(31)\quad \varphi_3(z_1, \ldots z_\mu, u_1, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0, \ldots$$

$$\varphi_m(z_1, \ldots z_\mu, u_1, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0,$$

so erkennt man, dass, weil sich durch Elimination von $p_{m\mu}$ zwischen den beiden Gleichungen (29) und (30) eine Relation zwischen den Grössen $z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}$ ergiebt, alle Unterdeterminanten erster Ordnung von D, nach den Elementen der $m\mu^{\text{ten}}$ Verticalreihe genommen, verschwinden müssen, und da dasselbe auch für die Elimination von $p_{m-1\mu}, p_{m-2\mu}, \ldots p_{1\mu}$ gilt, so finden wir zunächst als nothwendige Bedingung, dass sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung von D genommen nach den Elementen der μ^{ten}, $2\mu^{\text{ten}}$, $\ldots$ $m\mu^{\text{ten}}$ Verticalreihe verschwinden. Nehmen wir nun an, dass nicht sämmtliche Unterdeterminanten zweiter Ordnung von Δ genommen nach den Elementen von je zwei Horizontalreihen verschwinden, so wird leicht zu sehen sein, dass dann auch nicht alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung von D genommen nach den Elementen je zweier Verticalreihen aus der Reihe der $\mu^{\text{ten}}, 2\mu^{\text{ten}}, \ldots m\mu^{\text{ten}}$ Null sein dürfen. Denn seien zunächst alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung von D, welche durch Weglassen der $(m-1)\mu^{\text{ten}}$ und $m\mu^{\text{ten}}$ Verticalreihe entstehen, Null, so erhält man $m\mu - 1$ Relationen der Form

$$(31)\quad \begin{cases} \omega_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m-11}, \ldots p_{m-1\mu-1}, p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}, a_{11}, a_{m\mu}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_{m\mu-1}(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m-11}, p_{m-1\mu-1}, p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}, a_{m\mu-1}, a_{m\mu}) = 0, \end{cases}$$

und berechnete man $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{m\mu-1}$ aus diesen Gleichungen als Functionen von $z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m-11}, \ldots p_{m-1\mu-1}, p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}, a_{m\mu}$ und setzte diese Werthe in die Gleichungen (8) ein, so erhielte man m Beziehungen

$$(32)\quad \begin{cases} u_1 = \omega_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m-11}, \ldots p_{m-1\mu-1}, p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}, a_{m\mu}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = \omega_m(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m-11}, \ldots p_{m-1\mu-1}, p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}, a_{m\mu}), \end{cases}$$

und durch Elimination von $a_{m\mu}$ zwischen der ersten und zweiten, zweiten und dritten, $\ldots$ $m - 1^{\text{ten}}$ und m^{ten} würden sich $m - 1$ Differentialgleichungen ergeben, von denen die erste u_1, die zweite u_2, $\ldots$ die $m - 1^{\text{te}}$ u_{m-1} enthielte, was unter der Voraussetzung, dass (8) ein vollständiges Integralsystem sein sollte, das Differentialgleichungsystem sich somit auf die Form (29), (30), (31) bringen lassen muss, unstatthaft ist — es werden somit mindestens in zweien der Gleichungen (31) die von $a_{m\mu}$ verschiedenen a-Grössen fehlen, und das Eliminations-

resultat von $a_{m\mu}$ zwischen diesen beiden Gleichungen somit die Form annehmen müssen

(33) $\Omega_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m-11}, \ldots p_{m-1\mu-1}, p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}) = 0,$

und stellt man der Reihe nach die μ^{te}, $2\mu^{te}$, $\ldots$ $(m-1)\mu^{te}$, $m\mu^{te}$ Verticalreihe zu je zweien zusammen, so ergeben sich (33) analog $\frac{m(m-1)}{2}$ ähnliche Beziehungen der Form

(34) $\Omega(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{\alpha 1}, \ldots p_{\alpha\mu-1}, \ldots p_{\beta 1}, \ldots p_{\beta\mu-1}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0,$

in welcher $p_{\alpha\mu}$ und $p_{\beta\mu}$ fehlen. Da aber, wenn (8) ein vollständiges Integralsystem sein soll, das Differentialgleichungsystem unter den gemachten Annahmen nur zwei von den Grössen $u_1, u_2, \ldots u_m$ freie Gleichungen haben durfte, so werden also nur zwei dieser Beziehungen von einander verschieden sein können, und sind dies z. B. diejenigen, in denen $p_{\alpha_1\mu}$ und $p_{\beta_1\mu}$, $p_{\alpha_2\mu}$ und $p_{\beta_2\mu}$ fehlen, so folgt, dass, wenn alle anderen, in denen $p_{1\mu}$, $p_{\beta_2\mu}$; $p_{2\mu}$, $p_{\beta_2\mu}$; $\ldots$ $p_{\alpha_2-1\mu}$, $p_{\beta_2\mu}$; $p_{\alpha_2+1\mu}$, $p_{\beta_2\mu}$; $\ldots$ $p_{m\mu}$, $p_{\beta_2\mu}$ fehlen, mit diesen zusammenfallen sollen, mindestens in einer jener beiden Gleichungen $p_{1\mu}$, p_{2u}, $\ldots$ $p_{m\mu}$ fehlen müssen, was wiederum der Voraussetzung, dass Δ_μ von Null verschieden ist, widerstreitet; es werden somit nicht alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung von D genommen nach den Elementen je zweier Verticalreihen aus der Reihe der μ^{ten}, $2\mu^{ten}$, $\ldots$ $m\mu^{ten}$ verschwinden dürfen.

Sei nun eine dieser Unterdeterminanten zweiter Ordnung z. B. diejenige, welche durch Weglassung der $(m-1)\mu^{ten}$ und $m\mu^{ten}$ Verticalreihe und der beiden letzten Horizontalreihen entsteht,

$$(35)\quad D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_{m-1}}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{d^2 F_{m-1}}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{m\mu-2}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_{m-1}}{\partial z_1 \partial a_{m\mu-2}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_{m-1}}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{m\mu-2}} & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{m\mu-2}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\mu-1} \partial a_{m\mu-2}} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, so kann man aus den Gleichungen

$$(36)\quad p_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \cdots p_{1\mu} = \frac{\partial F_1}{\partial z_\mu}, \cdots p_{m-11} = \frac{\partial F_{m-1}}{\partial z_1}, \cdots p_{m-1\mu-1} = \frac{\partial F_{m-1}}{\partial z_{\mu-1}},$$
$$p_{m1} = \frac{\partial F_m}{\partial z_1}, \cdots p_{m\mu-1} = \frac{\partial F_m}{\partial z_{\mu-1}}$$

die Grössen $a_{11}, \ldots a_{1\mu}, \ldots a_{m-11}, \ldots a_{m-1\mu}, a_{m1}, \ldots a_{m\mu-2}$ durch die Grössen $z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{m-1\mu-1}, p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}$ und $a_{m\mu-1}, a_{m\mu}$ ausdrücken, und setzt man diese Werthe in die Gleichungen

$$(37)\qquad p_{m-1\mu} = \frac{\partial F_{m-1}}{\partial z_\mu}, \quad p_{m\mu} = \frac{\partial F_m}{\partial z_\mu}$$

ein, so müssen die Grössen $a_{m\mu-1}$, $a_{m\mu}$ herausfallen, weil nicht nur

D sondern auch sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung von D nach den Elementen der $\mu^{\text{ten}}, 2\mu^{\text{ten}}, \ldots m\mu^{\text{ten}}$ Verticalreihe genommen verschwinden sollten, und es ergeben sich daher zwei Differentialgleichungen der Form

$$(38)\quad \begin{cases} \varphi_1(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m-11}, \ldots p_{m-1\mu}, p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}) = 0, \\ \varphi_2(z_1, \ldots z_\mu, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m-11}, \ldots p_{m-1\mu-1}, p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0, \end{cases}$$

welche ausserdem von einander verschieden sein müssen, weil in der ersten nur $p_{m-1\mu}$ und nicht $p_{m\mu}$, in der zweiten nur $p_{m\mu}$ und nicht $p_{m-1\mu}$ vorkommt. Setzt man ferner die oben für die a-Grössen aus den Gleichungen (36) ermittelten Werthe in die Gleichungen (8) ein, so dass man

$$(39)\quad \begin{cases} u_1 = \Phi_1 (z_1, .. z_\mu, p_{11}, .. p_{1\mu}, .. p_{m-11}, .. p_{m-1\mu-1}, p_{m1}, .. p_{m\mu-1}, a_{m\mu-1}, a_{m\mu}), \\ \cdots\cdots\cdots\

Es ergeben sich somit *als nothwendige Bedingungen dafür, dass für das Differentialgleichungsystem* (6), *für welches* Δ_μ *von Null verschieden,* Δ *mit seinen sämmtlichen Unterdeterminanten erster Ordnung nach den Elementen jeder der Horizontalreihen genommen verschwinden, jedoch nicht sämmtliche Unterdeterminanten zweiter Ordnung von* Δ *genommen nach den Elementen je zweier Horizontalreihen gleich Null sind, die Gleichungen* (8) *ein vollständiges Integralsystem darstellen, die, dass* ϑ *von Null verschieden,* D *mit seinen sämmtlichen Unterdeterminanten erster Ordnung genommen nach den Elementen der* $\mu^{ten}, 2\mu^{ten}, \ldots m\mu^{ten}$ *Verticalreihe verschwindet, mindestens eine der Unterdeterminanten zweiter Ordnung von D genommen nach den Elementen je zweier Verticalreihen aus der Reihe der* $\mu^{ten}, 2\mu^{ten}, \ldots m\mu^{ten}$ *von Null verschieden ist, und dass endlich die aus D entstehende Determinante, in welcher statt der zum Zwecke der Herstellung der nicht verschwindenden Unterdeterminante zweiter Ordnung fortgelassenen Verticalreihen die Elemente*

$$\frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{11}}, \ldots \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m\mu}}, \quad \frac{\partial F_\sigma}{\partial a_{11}}, \ldots \frac{\partial F_\sigma}{\partial a_{m\mu}}$$

gesetzt werden, mindestens für eine Combination der von einander verschiedenen Indices ϱ *und* σ *aus der Reihe* $1, 2, \ldots m$ *von Null verschieden ist.*

Diese für die Existenz der vollständigen Integralsysteme (8) hergeleiteten nothwendigen Bedingungen sind aber auch die hinreichenden, wenn nachgewiesen sein wird, dass die Gleichungen (8) keinem anderen Differentialgleichungsystem als den durch (38) und (41) definirten genügen können; werde nämlich angenommen, dass noch ein anderes Differentialgleichungsystem

$$(43) \quad \begin{cases} \Psi_1(z_1, \ldots z_\mu, u_1, \ldots, u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_m(z_1, \ldots z_\mu, u_1, \ldots, u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0 \end{cases}$$

dieselben Beziehungen (8) zu Integralen hat, so erhielte man durch Elimination von $p_{1\mu}, p_{2\mu}, \ldots p_{m\mu}$ aus den m Differentialgleichungen (38), (41) und je einer des Systems (43), wenn nicht (43) völlig äquivalent (38), (41) ist, mindestens *eine* Differentialgleichung der Form

$$(44) \quad \Omega(z_1, \ldots z_\mu, u_1, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\mu-1}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu-1}) = 0$$

was unmöglich ist, da die Determinante ϑ der Gleichung (11) von Null verschieden vorausgesetzt wurde.

Schliessen wir in derselben Weise weiter, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn Δ_μ von Null verschieden und Δ nebst seinen sämmtlichen Unterdeterminanten λ^{ter} Ordnung $(\lambda < m)$ nach den Elementen von je λ Horizontalreihen genommen verschwindet, während nicht sämmtliche Unterdeterminanten $\lambda + 1^{ter}$ Ordnung von Δ genommen nach den Elementen von je $\lambda + 1$ Horizontalreihen gleich Null sind, so sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (8) *ein vollständiges Integralsystem von* (6) *bilden, die, dass ϑ von Null verschieden, D mit seinen sämmtlichen Unterdeterminanten λ^{ter} Ordnung genommen nach den Elementen der μ^{ten}, $2\mu^{ten}$, ... $m\mu^{ten}$ Verticalreihe verschwindet, mindestens eine der Unterdeterminanten $\lambda + 1^{ter}$ Ordnung von D genommen nach den Elementen von je $\lambda + 1$ Verticalreihen aus der Reihe der μ^{ten}, $2\mu^{ten}$, ... $m\mu^{ten}$ von Null verschieden ist, und dass endlich die aus D entstehende Determinante, in welcher statt der zum Zwecke der Herstellung der nicht verschwindenden Unterdeterminante $\lambda + 1^{ter}$ Ordnung fortgelassenen Verticalreihen die Elemente*

$$\frac{\partial F_{\varrho_1}}{\partial a_{11}}, \ldots \frac{\partial F_{\varrho_1}}{\partial a_{m\mu}}, \ldots \frac{\partial F_{\varrho_{\lambda+1}}}{\partial a_{11}}, \ldots \frac{\partial F_{\varrho_{\lambda+1}}}{\partial a_{m\mu}}.$$

gesetzt werden, mindestens für eine Combination von einander verschiedenen Indices $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{\lambda+1}$ aus der Reihe $1, 2, \ldots m$ von Null verschieden ist.

Die eben gewonnene Aufstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das Integralsystem (8) ein vollständiges war, hatte zur Voraussetzung, dass Δ_μ von Null verschieden, wenn $\Delta = 0$ war, und es würde also die Entwicklung der Bedingungen nach dem obigen Satze in allen Fällen möglich sein, wenn nicht zu gleicher Zeit die Beziehungen stattfänden

$$\Delta = 0,\ \Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 0, \ldots \Delta_\mu = 0, \tag{45}$$

welche wir noch in anderer Form ausdrücken können; da nämlich die Gleichungen (45) aussagen, dass bei Elimination von $m-1$ der Grössen

$$u_1, u_2, \ldots u_m \quad \text{oder} \quad p_{1\lambda}, p_{2\lambda}, \ldots p_{m\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots \mu)$$

aus den Differentialgleichungen (6) stets die zugehörige m^{te} Grösse herausfällt, also Beziehungen der Form existiren

$$\varphi_1(p_{11}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\mu}) = 0,$$
$$\varphi_2(u_1, \ldots u_m, p_{11}, \ldots p_{1\lambda-1}, p_{1\lambda+1}, \ldots p_{1\mu}, \ldots p_{m1}, \ldots p_{m\lambda-1}, p_{m\lambda+1}, \ldots p_{m\mu}) = 0$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots \mu),$$

so werden die Bedingungen (45) für die Functionen F der vollständigen Integralgleichungen (8) ausser $D = 0$ noch die Beziehungen nach sich ziehen

$$(46)\quad \delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{11}} \cdots \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_{\lambda-1} \partial a_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_{\lambda+1} \partial a_{11}} \cdots \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{11}} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{11}} \cdots \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\lambda-1} \partial a_{11}} & \frac{\partial F_m}{\partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\lambda+1} \partial a_{11}} \cdots \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_\mu \partial a_{11}} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{m\mu}} \cdots \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_{\lambda-1} \partial a_{m\mu}} & \frac{\partial F_1}{\partial a_{m\mu}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_{\lambda+1} \partial a_{m\mu}} \cdots \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{m\mu}} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{m\mu}} \cdots \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\lambda-1} \partial a_{m\mu}} & \frac{\partial F_m}{\partial a_{m\mu}} & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_{\lambda+1} \partial a_{m\mu}} \cdots \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_\mu \partial a_{m\mu}} \end{vmatrix} = 0$$

für $\lambda = 1, 2, \ldots \mu$.

Nun könnte man wiederum genau, wie oben, auch für die Annahme (45) die Criterien dafür entwickeln, dass das Gleichungsystem (8) die vollständigen Integralgleichungen von (6) liefert; man kann aber, wie oben gezeigt, den Fall, dass eine der Determinanten $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_\mu$ verschwindet, überhaupt ausschliessen, da eine einfache lineare Substitution dem Differentialgleichungsystem eine nicht verschwindende Functionaldeterminante giebt.

Wir wollen nunmehr eine Anwendung der Criterien für vollständige Integrale partieller Differentialgleichungsysteme auf lineare Differentialgleichungsysteme der Form machen

$$(47)\quad \begin{cases} A_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \cdots + A_{1\mu}^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu} + \cdots + A_{m1}^{(1)} \frac{\partial u_m}{\partial z_1} + \cdots + A_{m\mu}^{(1)} \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu} = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ A_{11}^{(m)} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \cdots + A_{1\mu}^{(m)} \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu} + \cdots + A_{m1}^{(m)} \frac{\partial u_m}{\partial z_1} + \cdots + A_{m\mu}^{(m)} \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu} = 0, \end{cases}$$

worin die Grössen A Functionen der unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_\mu$ sind, für welche eine der Functionaldeterminanten $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_\mu$ z. B. Δ_μ, welches definirt ist durch

$$(48)\quad \Delta_\mu = \begin{vmatrix} A_{1\mu}^{(1)} & A_{2\mu}^{(1)} \cdots A_{m\mu}^{(1)} \\ A_{1\mu}^{(2)} & A_{2\mu}^{(2)} \cdots A_{m\mu}^{(2)} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ A_{1\mu}^{(m)} & A_{2\mu}^{(m)} \cdots A_{m\mu}^{(m)} \end{vmatrix},$$

nicht identisch gleich Null ist.

Seien nun

$$(49)\quad \begin{cases} u_{11} & u_{21} & \ldots & u_{m1}, \\ u_{12} & u_{22} & \ldots & u_{m2}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{1m\mu-m} & u_{2m\mu-m} & \ldots & u_{mm\mu-m} \end{cases}$$

$m\mu - m$ particuläre Integralsysteme, so bilden jedenfalls für beliebige Werthe der Constanten a die Ausdrücke

$$(50)\quad \begin{cases} u_1 = a_1 u_{11} + a_2 u_{12} + \cdots + a_{m\mu-m}\, u_{1m\mu-m} + a_{m\mu-m+1}, \\ u_2 = a_1 u_{21} + a_2 u_{22} + \cdots + a_{m\mu-m}\, u_{2m\mu-m} + a_{m\mu-m+2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = a_1 u_{m1} + a_2 u_{m2} + \cdots + a_{m\mu-m}\, u_{mm\mu-m} + a_{m\mu} \end{cases}$$

wiederum ein Integralsystem von (47), und wir wollen sehen, unter welchen Umständen dieses Integralsystem ein vollständiges ist. Da die abhängigen Variablen $u_1, \ldots u_m$ in allen Differentialgleichungen (47) fehlen, so sind sämmtliche Unterdeterminanten $m - 1^{ter}$ Ordnung von Δ identisch Null, und nach dem oben bewiesenen Satze sind dann die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das Integralsystem (50) ein vollständiges ist, die, dass sämmtliche Unterdeterminanten $m - 1^{ter}$ Ordnung von D

$$(51)\quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} \frac{\partial u_{11}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial u_{11}}{\partial z_\mu} \frac{\partial u_{21}}{\partial z_1} \frac{\partial u_{21}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial u_{21}}{\partial z_\mu} \cdots \frac{\partial u_{m1}}{\partial z_1} \frac{\partial u_{m1}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial u_{m1}}{\partial z_\mu} \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial z_1} \frac{\partial u_{12}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial u_{12}}{\partial z_\mu} \frac{\partial u_{22}}{\partial z_1} \frac{\partial u_{22}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial u_{22}}{\partial z_\mu} \cdots \frac{\partial u_{m2}}{\partial z_1} \frac{\partial u_{m2}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial u_{m2}}{\partial z_\mu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_{1m\mu-m}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{1m\mu-m}}{\partial z_\mu} \frac{\partial u_{2m\mu-m}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{2m\mu-m}}{\partial z_\mu} \cdots \frac{\partial u_{mm\mu-m}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{mm\mu-m}}{\partial z_\mu} \\ 0 \ldots 0 \quad 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ \vdots \\ 0 \ldots 0 \quad 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \end{vmatrix}$$

genommen nach den Elementen der $\mu^{ten}, 2\mu^{ten}, \ldots m\mu^{ten}$ Verticalreihe verschwinden, welche Bedingung jedenfalls erfüllt ist, weil die m letzten Horizontalreihen nur aus Nullen bestehen, dass ferner mindestens eine der Unterdeterminanten m^{ter} Ordnung von D genommen nach den Elementen eben dieser Verticalreihen von Null verschieden ist, und dass endlich die aus D entstehende Determinante, in welcher die $\mu^{te}, 2\mu^{te}, \ldots m\mu^{te}$ Verticalreihe durch

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_{11}}, \ldots \frac{\partial F_1}{\partial a_{m\mu}}, \frac{\partial F_2}{\partial a_{11}}, \ldots \frac{\partial F_2}{\partial a_{m\mu}}, \ldots \frac{\partial F_m}{\partial a_{11}}, \ldots \frac{\partial F_m}{\partial a_{m\mu}}$$

oder in diesem Falle durch

$$u_{11}, u_{12}, \ldots u_{1m\mu-m}, 1, 0, \ldots 0; \ldots u_{m1}, u_{m2}, \ldots u_{mm\mu-m}, 0, 0, \ldots 1$$

ersetzt wird, von Null verschieden ist. Nun wird aber, wenn wir in D die $\mu^{te}, 2\mu^{te}, \ldots m\mu^{te}$ Verticalreihe und die letzten m Horizontalreihen fortlassen, die so entstehende Unterdeterminante m^{ter} Ordnung

$$(52)\qquad D_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{11}}{\partial z_{\mu-1}} & \frac{\partial u_{21}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{21}}{\partial z_{\mu-1}} & \cdots & \frac{\partial u_{m1}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{m1}}{\partial z_{\mu-1}} \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{12}}{\partial z_{\mu-1}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{22}}{\partial z_{\mu-1}} & \cdots & \frac{\partial u_{m2}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{m2}}{\partial z_{\mu-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_{1\,m\mu-m}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{1\,m\mu-m}}{\partial z_{\mu-1}} & \frac{\partial u_{2\,m\mu-m}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{2\,m\mu-m}}{\partial z_{\mu-1}} & \cdots & \frac{\partial u_{m\,m\mu-m}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{m\,m\mu-m}}{\partial z_{\mu-1}} \end{vmatrix},$$

und es muss somit D_m so wie die Determinante

$$(53)\qquad D'_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{11}}{\partial z_{\mu-1}} u_{11} & \frac{\partial u_{21}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{21}}{\partial z_{\mu-1}} u_{21} & \cdots & \frac{\partial u_{m1}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{m1}}{\partial z_{\mu-1}} u_{m1} \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{12}}{\partial z_{\mu-1}} u_{12} & \frac{\partial u_{22}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{22}}{\partial z_{\mu-1}} u_{22} & \cdots & \frac{\partial u_{m2}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{m2}}{\partial z_{\mu-1}} u_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_{1\,m\mu-m}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{1\,m\mu-m}}{\partial z_{\mu-1}} u_{1\,m\mu-m} & \frac{\partial u_{2\,m\mu-m}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{2\,m\mu-m}}{\partial z_{\mu-1}} u_{2\,m\mu-m} & \cdots & \frac{\partial u_{m\,m\mu-m}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial u_{m\,m\mu-m}}{\partial z_{\mu-1}} u_{m\,m\mu-m} \\ 0 \cdots 0 & 1\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \cdots & 0\ \ 0 \\ 0 \cdots 0 & 0\ 0 \cdots 0 & 1 \cdots 0 \cdots & 0\ \ 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots 0 & 0\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \cdots & 0\ \ 1 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein; da jedoch, wie unmittelbar zu sehen, $D'_m = D_m$ ist, so folgt als einzige nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, *dass die Ausdrücke* (50) *ein vollständiges Integralsystem darstellen, die, dass* D_m *nicht verschwindet.*

Sei z. B. das lineare Differentialgleichungsystem

$$(54)\qquad \begin{cases} A_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + A_{12}^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial z_2} + A_{21}^{(1)} \frac{\partial u_2}{\partial z_1} + A_{22}^{(1)} \frac{\partial u_2}{\partial z_2} = 0, \\ A_{11}^{(2)} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + A_{12}^{(2)} \frac{\partial u_1}{\partial z_2} + A_{21}^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial z_1} + A_{22}^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial z_2} = 0 \end{cases}$$

gegeben, worin die Grössen A Functionen der Variabeln z_1, z_2 sind, und die Determinante

$$(55)\qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{12}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \\ A_{12}^{(2)} & A_{22}^{(2)} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein soll, so würde sich als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Ausdrücke

$$(56)\qquad u_1 = a_1 u_{11} + a_2 u_{12} + a_3, \quad u_2 = a_1 u_{21} + a_2 u_{22} + a_4,$$

in denen u_{11}, u_{21}; u_{12}, u_{22} particuläre Integralsysteme bedeuten, ein vollständiges Integralsystem darstellen, die ergeben, dass die Determinante

$$(57) \qquad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{21}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{22}}{\partial z_1} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Um zu sehen, was das Verschwinden dieser Determinante für die Beschaffenheit der particulären Integralsysteme nach sich ziehen würde, setzen wir diese in das Gleichungsystem (54) ein und erhalten

$$(58) \quad \begin{cases} A_{11}^{(x)} \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} + A_{12}^{(x)} \frac{\partial u_{11}}{\partial z_2} + A_{21}^{(x)} \frac{\partial u_{21}}{\partial z_1} + A_{22}^{(x)} \frac{\partial u_{21}}{\partial z_2} = 0 \\ A_{11}^{(x)} \frac{\partial u_{12}}{\partial z_1} + A_{12}^{(x)} \frac{\partial u_{12}}{\partial z_2} + A_{21}^{(x)} \frac{\partial u_{22}}{\partial z_1} + A_{22}^{(x)} \frac{\partial u_{22}}{\partial z_2} = 0 \end{cases} \qquad (x = 1, 2),$$

und wenn dieselben mit

$$\frac{\partial D_2}{\partial \frac{\partial u_{\lambda 1}}{\partial z_1}}, \quad \frac{\partial D_2}{\partial \frac{\partial u_{\lambda 2}}{\partial z_1}} \qquad (\lambda = 1, 2)$$

multiplicirt werden, durch Addition, da $D_2 = 0$ vorausgesetzt wird,

$$A_{12}^{(x)} \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial z_2} \frac{\partial D_2}{\partial \frac{\partial u_{\lambda 1}}{\partial z_1}} + \frac{\partial u_{12}}{\partial z_2} \frac{\partial D_2}{\partial \frac{\partial u_{\lambda 2}}{\partial z_1}} \right)$$
$$+ A_{22}^{(x)} \left(\frac{\partial u_{21}}{\partial z_2} \frac{\partial D_2}{\partial \frac{\partial u_{\lambda 1}}{\partial z_1}} + \frac{\partial u_{22}}{\partial z_2} \frac{\partial D_2}{\partial \frac{\partial u_{\lambda 2}}{\partial z_1}} \right) = 0,$$

und daher, da Δ_2 von Null verschieden vorausgesetzt war, während D_2 verschwinden sollte, das Gleichungsystem

$$(59) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_{\varrho 1}}{\partial z_1} \frac{\partial D_2}{\partial \frac{\partial u_{\lambda 1}}{\partial z_1}} + \frac{\partial u_{\varrho 2}}{\partial z_1} \frac{\partial D_2}{\partial \frac{\partial u_{\lambda 2}}{\partial z_1}} = 0, \\ \frac{\partial u_{\varrho 1}}{\partial z_2} \frac{\partial D_2}{\partial \frac{\partial u_{\lambda 1}}{\partial z_1}} + \frac{\partial u_{\varrho 2}}{\partial z_2} \frac{\partial D_2}{\partial \frac{\partial u_{\lambda 2}}{\partial z_1}} = 0; \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2 \\ \lambda = 1, 2 \end{pmatrix}$$

hieraus folgt aber unmittelbar, dass die Determinante

$$(60) \qquad \delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{\varrho 1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho 2}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial u_{\varrho 1}}{\partial z_2} & \frac{\partial u_{\varrho 2}}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

verschwindet, oder dass $u_{\varrho 2}$ eine Function von $u_{\varrho 1}$ ist, und wir finden somit *dass, wenn die Elemente der beiden particulären Integralsysteme von einander unabhängig sind, die Ausdrücke* (56) *ein vollständiges Integralsystem darstellen.*

Wir wollen die linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Classe etwas genauer untersuchen, in welchen zwei particuläre Integralsysteme u_{11}, u_{21} und u_{12}, u_{22} von einander abhängig sind oder für welche

$$u_{12} = \varphi_1(u_{11}), \qquad u_{22} = \varphi_2(u_{21}) \tag{61}$$

ist, während die partiellen Differentialgleichungen, was ohne Beschränkung der Annahme (55) zufolge möglich ist, auf die Form gebracht sein mögen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2} = \alpha_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} + \alpha_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1}, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2} = \beta_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} + \beta_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1}, \end{cases} \tag{62}$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ Functionen von z_1 und z_2 bedeuten. Da die Gleichungen (62) vermöge (61) die Beziehungen

$$\varphi_1'(u_{11}) \frac{\partial u_{11}}{\partial z_2} = \alpha_1 \varphi_1'(u_{11}) \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} + \alpha_2 \varphi_2'(u_{21}) \frac{\partial u_{21}}{\partial z_1},$$

$$\varphi_2'(u_{21}) \frac{\partial u_{21}}{\partial z_2} = \beta_1 \varphi_1'(u_{11}) \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} + \beta_2 \varphi_2'(u_{21}) \frac{\partial u_{21}}{\partial z_1},$$

oder, da u_{11}, u_{21} selbst ein Integralsystem von (62) bilden,

$$\alpha_2 \frac{\partial u_{21}}{\partial z_1} \left(\varphi_2'(u_{21}) - \varphi_1'(u_{11})\right) = 0,$$

$$\beta_1 \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} \left(\varphi_2'(u_{21}) - \varphi_1'(u_{11})\right) = 0.$$

liefern, so folgt, da für die Annahme $\alpha_2 = 0$ oder $\beta_1 = 0$ das System (62) zerfallen würde, ferner die Functionen φ_1 und φ_2 als nicht linear vorausgesetzt werden dürfen, sowohl aus der Annahme $\frac{\partial u_{21}}{\partial z_1} = 0$, $\frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} = 0$ als auch aus $\varphi_2'(u_{21}) = \varphi_1'(u_{11})$, dass u_{21} eine Function von u_{11} sein muss, und wir finden somit:

dass, wenn für ein lineares partielles Differentialgleichungssystem zweiter Classe, dessen Coefficienten nur von den unabhängigen Variabeln abhängen, zwei nicht linear von einander abhängige Integralsysteme existiren, die Elemente dieser Integralsysteme selbst von einander abhängig sind.

Um nun die Differentialgleichungsysteme (62) zu charakterisiren, für welche

$$u_{21} = \omega(u_{11}) \tag{63}$$

ist, bemerke man, dass sich vermöge der Beziehungen

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial z_2} = \alpha_1 \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} + \alpha_2 \omega'(u_{11}) \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1},$$

$$\omega'(u_{11}) \frac{\partial u_{11}}{\partial z_2} = \beta_1 \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1} + \beta_2 \omega'(u_{11}) \frac{\partial u_{11}}{\partial z_1}$$

$\omega'(u_{11})$ als Lösung der quadratischen Gleichung

(64) $\alpha_2\omega'(u_{11})^2 + (\alpha_1 - \beta_2)\omega'(u_{11}) - \beta_1 = 0$ oder $\omega'(u_{11}) = f(z_1, z_2)$

oder $u_{11} = \omega_1(f)$

ergiebt, und das Integralsystem somit in der Form

(65) $$u_{11} = \omega_1(f), \quad u_{21} = \omega[\omega_1(f)]$$

dargestellt ist, worin vermöge (64)

(66) $$\omega'[\omega_1(f)] = f$$

sein muss. Setzt man nun

(67) $$u_1 = \Omega_1(f), \quad u_2 = \Omega[\Omega_1(f)].$$

worin

(68) $$\Omega'[\Omega_1(f)] = f$$

sein soll, in das Differentialgleichungsystem (62) ein, so erhält man

$$\Omega_1'(f)\frac{\partial f}{\partial z_2} = \alpha_1\Omega_1'(f)\frac{\partial f}{\partial z_1} + \alpha_2 f\cdot\Omega_1'(f)\frac{\partial f}{\partial z_1},$$

$$f\Omega_1'(f)\frac{\partial f}{\partial z_2} = \beta_1\Omega_1'(f)\frac{\partial f}{\partial z_1} + \beta_2 f\cdot\Omega_1'(f)\frac{\partial f}{\partial z_1}$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial z_2} = \alpha_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + \alpha_2 f\frac{\partial f}{\partial z_1},$$

$$f\frac{\partial f}{\partial z_2} = \beta_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + \beta_2 f\frac{\partial f}{\partial z_1},$$

welche schon vermöge (65), (66) erfüllt sein mussten, und wir finden somit, wenn man berücksichtigt, dass für $\Omega_1(f) = f$ vermöge (68) $\Omega[\Omega_1(f)] = \frac{1}{2}f^2$ wird,

dass, wenn für ein lineares partielles Differentialgleichungssystem zweiter Classe ein Element eines particularen Integralsystems eine Function des andern ist, jedenfalls

(69) $$u_1 = f(z_1, z_2), \quad u_2 = \tfrac{1}{2}f(z_1, z_2)^2$$

ein Integralsystem bilden, wenn $f(z_1, z_2)$ die Lösung der quadratischen Gleichung

(70) $$\alpha_2\cdot f^2 + (\alpha_1 - \beta_2)f - \beta_1 = 0$$

ist, und dass auch

(71) $$u_1 = \Omega_1(f), \quad u_2 = \Omega[\Omega_1(f)],$$

worin Ω_1 eine willkürliche Function, Ω eine solche Function bedeutet, dass $\Omega'[\Omega_1(f)] = f$ ist, particuläre Integralsysteme darstellen.

So hat das partielle Differentialgleichungsystem

(72) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2} = \dfrac{1 - 2z_1z_2}{z_2^2}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} - \dfrac{z_1^2}{z_2^2}\dfrac{\partial u_2}{\partial z_1}, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2} = \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \end{cases}$$

wenn f die Lösung der quadratischen Gleichung

$$f^2 - \frac{1 - 2z_1z_2}{z_1^2} f + \frac{z_2^2}{z_1^2} = 0 \tag{73}$$

darstellt, die particulären Integralsysteme

$$u_1 = f, \quad u_2 = \frac{f^2}{2}; \quad u_1 = f^2, \quad u_2 = \frac{2}{3} f^3; \ldots .$$

Die durch (71) definirten Ausdrücke sind selbstverständlich nicht die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen (62), da, während in (71) Ω_1 sich so bestimmen lässt, dass u_1 für $z_2 = 0$ eine willkürlich vorgelegte Function von z_1 wird, u_2 dann für $z_2 = 0$ nicht mehr willkürlich als Function von z_1 gegeben werden kann.

Wir wollen hier auf die Frage der Abhängigkeit entsprechender Integralelemente oder der Elemente verschiedener Integralsysteme partieller Differentialgleichungsysteme untereinander nicht weiter eingehen, es soll nur noch kurz die Frage berührt werden, von welcher Natur die partiellen Differentialgleichungen sein müssen, wenn ihre allgemeinen Integrale willkürliche Functionen einer gewissen Anzahl particulärer Integralelemente sein sollen, eine Frage, die, wie wir an anderer Stelle sehen werden, in Zusammenhang steht mit der Herleitung der allgemeinen Integrale aus den vollständigen Integralsystemen partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

Soll also die Gestalt eines partiellen Differentialgleichungssystems

$$(74)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} = \omega_1\left(z_1, \ldots z_n, \dfrac{\partial F_1}{\partial z_2}, \ldots \dfrac{\partial F_1}{\partial z_n}, \dfrac{\partial F_2}{\partial z_2}, \ldots \dfrac{\partial F_2}{\partial z_n}, \ldots \dfrac{\partial F_\varrho}{\partial z_2}, \ldots \dfrac{\partial F_\varrho}{\partial z_n}\right), \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z_1} = \omega_2\left(z_1, \ldots z_n, \dfrac{\partial F_1}{\partial z_2}, \ldots \dfrac{\partial F_1}{\partial z_n}, \dfrac{\partial F_2}{\partial z_2}, \ldots \dfrac{\partial F_2}{\partial z_n}, \ldots \dfrac{\partial F_\varrho}{\partial z_2}, \ldots \dfrac{\partial F_\varrho}{\partial z_n}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\

in der Form ausdrücken lässt

$$F_1 = \varphi_1(f_{11}, f_{21}, \dots f_{\mu 1}), \tag{75}$$

$$F_2 = \varphi_2(f_{12}, f_{22}, \dots f_{\mu 2}), \dots F_\varrho = \varphi_\varrho(f_{1\varrho}, f_{2\varrho}, \dots f_{\mu\varrho}),$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ willkürliche Functionen bedeuten, so ist zunächst klar, dass μ nicht kleiner als $n-1$ sein kann; denn, da das Differentialgleichungssystem (74), wie bekannt, Integralsysteme besitzt, deren Elemente für $z_1 = 0$ in beliebig vorgelegte Functionen von $z_2, z_3, \dots z_n$ übergehen, so würde, wenn

$$f_{1\lambda}(0, z_2, \dots z_n) = \xi_1,$$

$$f_{2\lambda}(0, z_2, \dots z_n) = \xi_2, \dots f_{\mu\lambda}(0, z_2, \dots z_n) = \xi_\mu$$

gesetzt und daraus

$$z_2 = g_2 \quad (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\mu, z_{\mu+2}, \dots z_n), \dots$$

$$z_{\mu+1} = g_{\mu+1}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\mu, z_{\mu+2}, \dots z_n)$$

hergeleitet würde, für eine willkürlich gegebene Function

$$\Phi_\lambda(z_2, z_3, \dots z_n)$$

die gesuchte Function φ_λ der Bedingung unterliegen, dass

$$\Phi_\lambda(g_2, g_3, \dots g_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots z_n) = \varphi_\lambda(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\mu)$$

ist, und somit die Function Φ_λ gegen die Voraussetzung nur von $\mu < n-1$ von einander unabhängigen Variabeln abhängen.

Sei nun $\mu \geqq n-1$, so wählen wir statt der willkürlichen Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ der Gleichungen (75) lineare homogene Functionen der Integralsysteme von der Form

$$\begin{cases} F_1 = a_{11} f_{11} + a_{21} f_{21} + \dots + a_{n1} f_{n1}, \\ F_2 = a_{12} f_{12} + a_{22} f_{22} + \dots + a_{n2} f_{n2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_\varrho = a_{1\varrho} f_{1\varrho} + a_{2\varrho} f_{2\varrho} + \dots + a_{n\varrho} f_{n\varrho}, \end{cases} \tag{76}$$

worin die Coefficienten willkürliche Constanten bedeuten, von denen nur $a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{n\varrho}$ verschwinden, wenn $\mu = n-1$ ist. Durch Einführung dieser Werthe in die Differentialgleichungen (74) ergeben sich die für $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\varrho$ zu befriedigenden Functionalgleichungen

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11}\omega_1\left(z_1,\cdots z_n,\ \frac{\partial f_{11}}{\partial z_2},\cdots\frac{\partial f_{11}}{\partial z_n},\ \frac{\partial f_{12}}{\partial z_2},\cdots\frac{\partial f_{12}}{\partial z_n},\cdots\frac{\partial f_{1\varrho}}{\partial z_2},\cdots\frac{\partial f_{1\varrho}}{\partial z_n}\right)\\
+a_{21}\omega_1\left(z_1,\cdots z_n,\ \frac{\partial f_{21}}{\partial z_2},\cdots\frac{\partial f_{21}}{\partial z_n},\ \frac{\partial f_{22}}{\partial z_2},\cdots\frac{\partial f_{22}}{\partial z_n},\cdots\frac{\partial f_{2\varrho}}{\partial z_2},\cdots\frac{\partial f_{2\varrho}}{\partial z_n}\right)+\cdots\\
+a_{n1}\omega_1\left(z_1,\cdots z_n,\ \frac{\partial f_{n1}}{\partial z_2},\cdots\frac{\partial f_{n1}}{\partial z_n},\ \frac{\partial f_{n2}}{\partial z_2},\cdots\frac{\partial f_{n2}}{\partial z_n},\cdots\frac{\partial f_{n\varrho}}{\partial z_2},\cdots\frac{\partial f_{n\varrho}}{\partial z_n}\right)\\
=\omega_1\Big(z_1,\cdots z_n,\ a_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial z_2}+a_{21}\frac{\partial f_{21}}{\partial z_2}+\cdots+a_{n1}\frac{\partial f_{n1}}{\partial z_2},\ \cdots\\
\qquad a_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial z_n}+a_{21}\frac{\partial f_{21}}{\partial z_n}+\cdots+a_{n1}\frac{\partial f_{n1}}{\partial z_n},\cdots\\
\qquad a_{1\varrho}\frac{\partial f_{1\varrho}}{\partial z_2}+a_{2\varrho}\frac{\partial f_{2\varrho}}{\partial z_2}+\cdots+a_{n\varrho}\frac{\partial f_{n\varrho}}{\partial z_2},\cdots\\
\qquad a_{1\varrho}\frac{\partial f_{1\varrho}}{\partial z_n}+a_{2\varrho}\frac{\partial f_{2\varrho}}{\partial z_n}+\cdots+a_{n\varrho}\frac{\partial f_{n\varrho}}{\partial z_n}\Big)\\
\cdots\cdots\cdots

$$(78)\quad \begin{cases} \omega_\lambda\left(z_1,\dots z_n, \dfrac{\partial f_{11}}{\partial z_2},\dots \dfrac{\partial f_{11}}{\partial z_n},\dots \dfrac{\partial f_{1\varrho}}{\partial z_2},\dots \dfrac{\partial f_{1\varrho}}{\partial z_n}\right) \\ \qquad = \dfrac{\partial f_{1\lambda}}{\partial z_2}\dfrac{\partial \bar\omega_\lambda}{\partial Z_{\lambda 2}} + \dfrac{\partial f_{1\lambda}}{\partial z_3}\dfrac{\partial \omega_\lambda}{\partial Z_{\lambda 3}} + \dots + \dfrac{\partial f_{1\lambda}}{\partial z_n}\dfrac{\partial \bar\omega_\lambda}{\partial Z_{\lambda n}} \\ \dots\dots\dots\

$$(80)\quad \begin{cases} \omega_\lambda\left(z_1, \cdots z_n, \dfrac{\partial f_{11}}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial f_{11}}{\partial z_n}, \cdots \dfrac{\partial f_{1\varrho}}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial f_{1\varrho}}{\partial z_n}\right) \\ \qquad = \dfrac{\partial f_{1\lambda}}{\partial z_2}\dfrac{\partial \bar\omega_\lambda}{\partial Z_{\lambda 2}} + \cdots + \dfrac{\partial f_{1\lambda}}{\partial z_n}\dfrac{\partial \bar\omega_\lambda}{\partial Z_{\lambda n}} \\ \cdots\cdots\cdots\

also $\overline{\omega}_\lambda$ von $Z_{\nu 2}, Z_{\nu 3}, \ldots Z_{\nu n}$ unabhängig ist, und es folgt somit, dass wegen der Willkürlichkeit der Argumente

$$(82) \qquad \omega_\lambda\left(z_1, \ldots z_n, \frac{\partial F_1}{\partial z_2}, \ldots \frac{\partial F_1}{\partial z_n}, \ldots \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_2}, \ldots \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_n}\right) = g_{\lambda 2}\frac{\partial F_\lambda}{\partial z_2} + g_{\lambda 3}\frac{\partial F_\lambda}{\partial z_3} + \cdots + g_{\lambda n}\frac{\partial F_\lambda}{\partial z_n}$$

ist, worin $g_{\lambda 2}, g_{\lambda 3}, \ldots g_{\lambda n}$ von den Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ abhängige Functionen bedeuten, da der durch die Gleichungen (76) ausgedrückten Forderung gemäss ω_λ linear homogen in

$$\frac{\partial F_\lambda}{\partial z_2}, \frac{\partial F_\lambda}{\partial z_3}, \ldots \frac{\partial F_\lambda}{\partial z_n}$$

sein muss.

Es ergiebt sich somit der nachfolgende Satz:

Unter allen partiellen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung und beliebiger Classe

$$\Omega_1\left(z_1, z_2, \ldots z_n, \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \frac{\partial F_1}{\partial z_2}, \ldots \frac{\partial F_1}{\partial z_n}, \ldots \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_1}, \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_2}, \ldots \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_n}\right) = 0,$$

$$\Omega_2\left(z_1, z_2, \ldots z_n, \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \frac{\partial F_1}{\partial z_2}, \ldots \frac{\partial F_1}{\partial z_n}, \ldots \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_1}, \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_2}, \ldots \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_n}\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega_\varrho\left(z_1, z_2, \ldots z_n, \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \frac{\partial F_1}{\partial z_2}, \ldots \frac{\partial F_1}{\partial z_n}, \ldots \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_1}, \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_2}, \ldots \frac{\partial F_\varrho}{\partial z_n}\right) = 0$$

sind die zerfallenden linearen Differentialgleichungssysteme

$$g_{11}(z_1, \cdots z_n)\frac{\partial F_1}{\partial z_1} + g_{12}(z_1, \cdots z_n)\frac{\partial F_1}{\partial z_2} + \cdots + g_{1n}(z_1, \cdots z_n)\frac{\partial F_1}{\partial z_n} = 0,$$

$$g_{21}(z_1, \cdots z_n)\frac{\partial F_2}{\partial z_1} + g_{22}(z_1, \cdots z_n)\frac{\partial F_2}{\partial z_2} + \cdots + g_{2n}(z_1, \cdots z_n)\frac{\partial F_2}{\partial z_n} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_{\varrho 1}(z_1, \cdots z_n)\frac{\partial F_\varrho}{\partial z_1} + g_{\varrho 2}(z_1, \cdots z_n)\frac{\partial F_\varrho}{\partial z_2} + \cdots + g_{\varrho n}(z_1, \cdots z_n)\frac{\partial F_\varrho}{\partial z_n} = 0$$

die einzigen, in denen die allgemeinen Integrale sich als willkürliche Functionen einer bestimmten Anzahl particulärer Integrale darstellen lassen, und zwar sind diese Darstellungsformen

$$F_1 = \varphi_1(F_{11}, F_{12}, \ldots F_{1n-1}), \ldots F_\varrho = \varphi_\varrho(F_{\varrho 1}, F_{\varrho 2}, \ldots F_{\varrho n-1}),$$

wenn $\varphi_1, \ldots \varphi_\varrho$ willkürliche Functionen und $F_{\alpha 1}, F_{\alpha 2}, \ldots F_{\alpha n-1}$ von einander unabhängige Integrale der α^{ten} Differentialgleichung des obigen Systems bedeuten.

Heidelberg, den 20. September 1893.

Ueber Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

In der folgenden Mittheilung, welche sich an den im 42ten Bande dieser Zeitschrift von mir publicirten Aufsatz*): „Zur Theorie der Taylor'schen Reihe etc." anschliesst, will ich zunächst mit Hülfe eines elementaren functionentheoretischen Principes einen sehr einfachen Typus von analytischen Ausdrücken ableiten, welche trotz der Endlichkeit der Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung für gewisse Stellen beständig *divergirende* Taylor'sche Entwickelungen liefern (§ 1) und daran eine Betrachtung knüpfen, die zunächst zur Berichtigung eines bei Gelegenheit ähnlicher Untersuchungen von Du Bois-Reymond begangenen fundamentalen Irrthums dienen soll, sodann aber zur Aufstellung einer allgemeinen Classe von Functionen führt, welche die fragliche Singularität längs des ganzen Einheitskreises besitzen (§ 2). Daran schliessen sich dann einige functionentheoretische Bemerkungen über das Verhalten der Functionen $e^{-\frac{1}{x^2}}$ und $e^{-\frac{1}{x}}$ in der Nähe der Nullstelle (§ 3). Schliesslich wird gezeigt, dass man auch unbeschränkt differenzirbare analytische Ausdrücke herstellen kann, welche, als Functionen einer *reellen* Variabelen x aufgefasst, nur auf *einer* Seite einer Stelle $x = x_0$ durch die Taylor'sche Reihe dargestellt werden, obschon sie an der Stelle x_0 mit sämmtlichen vor- und rückwärts gebildeten Differentialquotienten endlich und stetig bleiben.

§ 1.

Ist der wahre Convergenzbezirk der Reihe:

$$f(x) = \sum_0^\infty a_\nu x^\nu \tag{1}$$

ein um den Nullpunkt beschriebener Kreis mit dem Radius R, so muss bekanntlich $f(x)$ auf der Peripherie dieses Kreises *mindestens eine* singuläre Stelle besitzen, d. h. es existirt daselbst mindestens ein Punkt A

*) a. a. O. p. 153 ff.

von der Beschaffenheit, dass der Convergenzbezirk *keiner* aus der Reihe (1) abgeleiteten Reihe:

$$(2) \qquad f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(\xi) \,.\, (x-\xi)^\nu \qquad (\text{wo: } |\xi| < R)$$

über A hinausragt und somit, wenn ξ auf dem Strahle $\overline{OA}$ liegt, den ursprünglichen Convergenzkreis in A berührt.

Sind nun die a_ν von irgend einer Stelle $\nu = n$ ab sämmtlich positiv, so lässt sich zeigen, dass gerade die Stelle $x = R$ selbst stets eine singuläre sein muss.

Nimmt man nämlich irgend einen positiven Werth $r < R$ an und setzt:

$$\xi = r \,.\, e^{\varphi i}$$

so folgt aus:

$$(3) \qquad \left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)\right| = \left|\sum_n^\infty{}_\nu \nu_n a_\nu \xi^{\nu-n}\right| \leqq \sum_n^\infty{}_\nu \nu_n \,.\, a_\nu r^{\nu-n},$$

dass die Coefficienten der Reihenentwickelung (2) von einer bestimmten Stelle $\nu = n$ ab durchweg ihre Maximalwerthe annehmen, wenn gerade $\xi = r$ wird. Daraus ergiebt sich aber, dass der Convergenzkreis der Reihe (2) für *keine* Stelle ξ mit dem absoluten Betrage r *kleiner* sein kann, als für $\xi = r$ selbst, und da *mindestens einer* dieser Convergenzkreise den ursprünglichen von innen berührt, so muss das sicher für den um $\xi = r$ zu beschreibenden der Fall sein, d. h. $x = R$ ist in der That eine singuläre Stelle für $f(x)$.

Wählt man nun eine Reihe von positiven Grössen a_ν so, dass:

$$(4) \quad \begin{cases} \text{(a)} \lim\limits_{\nu=\infty} \nu^p \,.\, a_\nu = 0 \text{ (für jedes noch so grosse, endliche, positive } p) \\ \text{(b)} \lim\limits_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{a_\nu} = 1, \end{cases}$$

so wird in Folge der Bedingung (a) nicht allein die Reihe (1), sondern auch jede durch beliebig oft wiederholte Differentiation daraus hervorgehende Reihe für $|x| = 1$ unbedingt *convergiren*, dagegen in Folge der Bedingung (b) für $|x| > 1$ *divergiren**), sodass also nach dem oben gesagten $f(x)$ in $x = 1$ eine singuläre Stelle besitzen muss.

Somit wird bei der angegebenen Wahl der Grössen a_ν durch die Reihe (1) eine analytische Function definirt, welche auf dem genannten Einheitskreise mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist, und welche dennoch für keine noch so kleine Umgebung der Stelle $x = 1$ nach Potenzen von $(x-1)$ entwickelt werden kann.

*) Man kann die Bedingung (b) offenbar auch durch die etwas allgemeinere ersetzen, dass die *obere* Unbestimmtheitsgrenze von $\sqrt[\nu]{a_\nu}$ für $\nu = \infty$ den Werth 1 haben soll.

Hierzu wäre nur noch zu zeigen, dass man in der That (auf unendlich viele Arten) Grössen a_ν so bestimmen kann, dass sie den *beiden* Bedingungen (4) genügen. Man befriedigt nun aber offenbar die Bedingung (4a) und zwar in der allgemeinsten Weise*) wenn man setzt:

$$a_\nu = \nu^{-p_\nu} = e^{-p_\nu \lg \nu}$$

wo p_ν eine positive Grösse bedeutet, die mit ν irgendwie in's Unendliche wächst. Da hiernach:

$$\sqrt[\nu]{a_\nu} = e^{-\frac{1}{\nu} p_\nu \lg \nu}$$

wird, so ist zur Erfüllung von (4b) nothwendig und hinreichend, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu} p_\nu \lg \nu = 0,$$

sodass also gesetzt werden kann:

$$\frac{1}{\nu} p_\nu \lg \nu = \frac{1}{m_\nu} \qquad \text{wo:} \quad \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty.$$

Alsdann wird:

$$p_\nu = \frac{\nu}{m_\nu \lg \nu}$$

und:

$$\lim_{\nu=\infty} p_\nu^{-1} = \lim_{\nu=\infty} \frac{m_\nu}{\left(\frac{\nu}{\lg \nu}\right)} = 0$$

und somit schliesslich:

$$a_\nu = e^{-\frac{\nu}{m_\nu}}, \tag{5}$$

wo m_ν eine positive Grösse bedeutet, die mit ν schwächer in's Unendliche wächst, als $\left(\frac{\nu}{\lg \nu}\right)$. Man kann also z. B. setzen:

$$m_\nu = \frac{\nu}{\lg a \cdot \nu^\alpha} \left(\begin{matrix} a > 1 \\ 0 < \alpha < 1 \end{matrix}\right), \quad m_\nu = \frac{\nu}{(\lg \nu)^2}, \quad m_\nu = \frac{\lg \nu}{\lg a}, \text{ etc.}$$

und demnach:

$$a_\nu = a^{-\nu^\alpha}, \quad a_\nu = \nu^{-\lg \nu}, \quad a_\nu = a^{-\frac{\nu}{\lg \nu}}, \quad \text{etc.} \; —$$

*) Man erzielt keineswegs eine grössere Allgemeinheit, wenn man etwa setzt:

$$a_\nu = c_\nu \cdot \nu^{-p_\nu}$$

wo c_ν mit unendlich wachsendem ν unter einer endlichen Grenze bleibt. Denn man kann alsdann a_ν in die Form setzen:

$$a_\nu = \nu^{\frac{\lg c_\nu}{\lg \nu} - p_\nu} = \nu^{-q_\nu},$$

wo q_ν keinen grösseren Grad von Allgemeinheit besitzt, als das ursprüngliche p_ν.

Es liegt nun nahe mit Hülfe der Substitution: $x = e^{ti}$, welche den Einheitskreis der x-Ebene auf die reelle Axe der t-Ebene so abbildet, dass dem Punkte $x = 1$ der Punkt $t = 0$ (bezw. $t = \pm 2k\pi i$) entspricht, $f(x)$ in eine Function $f(e^{ti}) = \varphi(t)$ überzuführen, welche für alle reellen t bestimmte endliche Ableitungen jeder endlichen Ordnung besitzt und dennoch nicht nach Potenzen von t (bezw. $t \mp 2k\pi$) entwickelt werden kann. Um aber hierbei völlig sicher zu gehen, ist zunächst folgende Frage zu beantworten:

Wenn $f(x)$ auf dem Einheitskreise die singuläre Stelle $x_0 = e^{t_0 i}$ besitzt, ist dann stets t_0 auch eine singuläre Stelle für $f(e^{ti})$ als Function von t aufgefasst?

Zur Beantwortung dieser Frage beweise ich den folgenden Hülfssatz:

Es sei $f(x) = \sum b_\nu x^\nu$ convergent für $x \leqq 1$, also

$$f(e^{ti}) = \varphi(t) = \sum b_\nu e^{\nu t i}$$

convergent für alle complexen t mit nicht-negativem imaginären Theil, insbesondere also für alle reellen t. Ist dann $f(x)$ regulär für eine gewisse Umgebung der auf dem Einheitskreise gelegenen Stelle $x_0 = e^{t_0 i}$ (wo also $|x_0| = 1$ und t_0 reell), so gilt das gleiche von $\varphi(t)$ in der Umgebung von $t = t_0$ — *und umgekehrt.*

Beweis. Angenommen man habe zunächst:

$$f(x) = \sum b_\nu x^\nu = \sum c_\nu (x - x_0)^\nu \quad \text{für: } |x - x_0| < r,$$

so wird:

$$\varphi(t) = \sum c_\nu \,.\, e^{-\nu t_0 i} (e^{(t-t_0)i} - 1)^\nu.$$

Da aber $\{e^{(t-t_0)i} - 1\}^\nu$ in eine beständig convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}_\nu(t - t_0) = \sum_1^\infty A_\varkappa^{(\nu)} (t - t_0)^\varkappa$ *ohne constantes Glied* entwickelt werden kann, so existirt eine gewisse Umgebung $|t - t_0| < \varrho$, für welche nicht nur $|\mathfrak{P}_\nu(t - t_0)|$, sondern auch $\sum_1^\infty |A_\varkappa^{(\nu)} (t - t_0)^\nu|$ *beliebig* klein, also insbesondere $< r$ wird. Für diesen die Stelle t_0 umgebenden Bereich von t darf dann aber nach einem bekannten (Cauchy'schen) Satze die Reihe:

$$\varphi(t) = \sum c_\nu \,.\, e^{-\nu t_0 i} \,.\, \mathfrak{P}_\nu(t - t_0)$$

in eine solche nach positiven Potenzen von $(t - t_0)$ umgeformt werden, d. h. $\varphi(t)$ ist in der That regulär in der Umgebung der Stelle $t = t_0$.

Umgekehrt: Angenommen, man habe für eine gewisse (complexe) Umgebung des reellen Werthes $t = t_0$:

$$\varphi(t) = \sum \beta_\nu (t - t_0)^\nu$$

und man setzt:

$$e^{ti} = x, \quad e^{t_0 i} = x_0 \qquad \text{(wo also: } |x_0| = 1\text{)}$$

so wird:

$$t - t_0 = \frac{1}{i} \lg \frac{x}{x_0} = \frac{1}{i} \lg \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right),$$

sodass also für:

$$|x - x_0| < |x_0|, \text{ d. h. für } |x - x_0| < 1$$

$(t - t_0)$ und daher auch $(t - t_0)^\nu$ in eine convergirende Reihe nach Potenzen von $(x - x_0)$ *ohne constantes Glied* entwickelt werden kann. Daraus ersieht man dann aber, genau wie oben, dass die Reihe:

$$\varphi(t) = \sum \beta_\nu (t - t_0)^\nu$$

für eine gewisse Umgebung von $x = x_0$ in eine solche nach positiven Potenzen von $(x - x_0)$ umgeformt werden kann, sodass also:

$$\varphi(t) = f(e^{ti}) = f(x)$$

in eine für $x = x_0$ reguläre Function übergeht. —

Aus dem eben bewiesenen Hülfssatze folgt nun ohne weiteres, dass jeder auf dem Einheitskreise gelegenen *singulären* Stelle x_0 von $f(x)$ eine reelle singuläre Stelle t_0 von $\varphi(t)$ entspricht (*vice versa*), und dass daher:

$$\varphi(t) = \sum_0^\infty a_\nu e^{\nu t i}, \tag{6}$$

sobald die Coefficienten a_ν der oben aufgestellten Form (5) angehören, eine mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endliche und stetige Function der reellen Variablen t darstellt, welche für $t = 0$ (und allgemein für $t = \pm 2k\pi i$) nicht nach der Mac Laurin'schen (bezw. Taylor'schen) Reihe entwickelbar ist.

§ 2.

Aus dem am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellten Resultate lässt sich zunächst folgern, dass *mindestens eine* der beiden, gleichfalls mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlichen und stetigen Functionen:

$$\varphi_1(t) = \sum_0^\infty a_\nu \cos \nu t, \qquad \varphi_2(t) = \sum_1^\infty a_\nu \sin \nu t$$

nicht nach der Mac Laurin'schen Reihe entwickelt werden kann. Man kann nun aber ganz direct zeigen, dass diese Eigenschaft *jeder* der beiden genannten Functionen zukommt, und zwar aus dem Grunde, weil die betreffenden Reihen für jeden noch so kleinen Werth von t *divergiren*. Man hat nämlich:

$$\varphi_1^{(2\varkappa)}(0) = (-1)^{\varkappa} \cdot \sum_1^{\infty} \nu^{2\varkappa} \cdot a_\nu, \qquad \varphi_2^{(2\varkappa-1)}(0) = (-1)^{\varkappa} \cdot \sum_1^{\infty} \nu^{2\varkappa-1} \cdot a_\nu$$

(dagegen: $\varphi_1^{(2\varkappa-1)}(0) = 0$, $\varphi_2^{(2\varkappa)}(0) = 0$). Bezeichnet man daher mit A_λ den Coefficienten von t^λ in der Mac Laurin'schen Reihe für $\varphi_1(t)$ bezw. $\varphi_2(t)$ (wobei also λ im Falle $\varphi_1(t)$ durchweg *gerade*, im Falle $\varphi_2(t)$ durchweg *ungerade*), so hat man:

$$|A_\lambda| = \frac{1}{\lambda!} \sum_\nu \nu^\lambda a_\nu = \frac{1}{\lambda!} \sum_\nu \nu^\lambda \cdot e^{-\frac{\nu}{m_\nu}} > \frac{\nu^\lambda}{\lambda!} \cdot e^{-\frac{\nu}{m_\nu}}$$

wie gross man auch ν in dem letzten Ausdrucke annehmen mag. Nimmt man nun insbesondere: $\nu \geqq \lambda$, also $m_\nu \geqq m_\lambda \geqq [m_\lambda]$ (wo $[m_\lambda]$ die grösste in m_λ enthaltene ganze Zahl bedeutet), so wird zunächst *a fortiori:*

$$|A_\lambda| > \frac{\nu^\lambda}{\lambda!} \cdot e^{-\frac{\nu}{[m_\lambda]}},$$

oder da bekanntlich*):

$$\lambda! = c_\lambda \cdot \lambda^{\lambda+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\lambda}, \qquad \text{wo: } \lim_{\lambda=\infty} c_\lambda = \sqrt{2\pi}$$

gesetzt werden kann, so hat man:

$$|A_\lambda| > c_\lambda \cdot \nu^\lambda \cdot \lambda^{-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{-\lambda-\frac{\nu}{[m_\lambda]}}.$$

Nun fixire man die oben nur der Bedingung $\nu \geqq \lambda$ unterworfene Zahl ν so, dass: $\nu = \lambda \cdot [m_\lambda]$; alsdann wird:

$$|A_\lambda| > c_\lambda \cdot [m_\lambda]^\lambda \cdot \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

und somit schliesslich:

$$|A_\lambda \cdot t^\lambda| > c_\lambda \cdot ([m_\lambda]^{\frac{1}{2}} \cdot t)^\lambda \cdot (\lambda^{-1} \cdot [m_\lambda]^\lambda)^{\frac{1}{2}},$$

woraus man erkennt, dass dieser Ausdruck mit λ in's Unendliche wächst, wie klein man auch t annehmen mag. Daraus folgt dann aber in der That, dass die Mac Laurin'sche Reihe für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ beständig divergirt.

---

*) Vgl. z. B. Meyer-Dirichlet, Vorl. über best. Integrale, p. 151.

Eine Reihe, wie die hier mit $\varphi_2(t)$ bezeichnete, hat schon Du Bois-Reymond betrachtet*) und für die specielle Wahl $a_\nu = e^{-\sqrt{\nu}}$ die Divergenz ihrer Mac Laurin'schen Entwickelung nachzuweisen versucht. Wenn er aber hieran die weitere Bemerkung knüpft, derartige Functionen seien dann überhaupt *nirgends* in Potenzreihen entwickelbar und lassen demnach keine analytische Fortsetzung in das complexe Gebiet zu, so beruht diese Behauptung (deren objective Richtigkeit vorläufig dahingestellt bleibe) auf einem vollkommenen Fehlschlusse.

Aus dem Umstande, dass die *trigonometrische* Reihe für $\varphi_2(t)$ offenbar für *keinen complexen* Werth von t convergirt**), glaubte er nämlich ohne weiteres folgern zu dürfen, dass daher $\varphi_2(t)$ für complexe Werthe von t *überhaupt nicht existire*, also nirgends nach Potenzen von $(t-t_0)$ entwickelbar sein könne. Dass diese Schlussweise aber falsch sein muss, lehrt schon ein Blick auf irgend eine der bekanntesten trigonometrischen Reihen, wie z. B.:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu} \cdot \cos \nu t = -\frac{1}{2} \lg \left(4 \sin^2 \frac{t}{2}\right),$$

welche gleichfalls für kein complexes t convergirt, während nichtsdestoweniger $\varphi(t) = -\frac{1}{2} \lg \left(4 \sin^2 \frac{t}{2}\right)$ mit einzigem Ausschlusse der Stellen $t = \pm m\pi$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, für welche die obige Reihe divergirt und $\varphi(t)$ selbst unendlich gross wird, nach Potenzen von $(t-t_0)$ entwickelbar ist und demgemäss in das complexe Gebiet hinein analytisch fortgesetzt werden kann.

Hat man nun allgemein eine *lediglich für reelle* t convergirende trigonometrische Reihe:

$$\Phi(t) = \sum (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t)$$

$$= \frac{1}{2} \sum \{ a_\nu (e^{\nu t i} + e^{-\nu t i}) - b_\nu i (e^{\nu t i} - e^{-\nu t i}) \}$$

$$= \frac{1}{2} \sum (a_\nu - b_\nu i) \cdot e^{\nu t i} + \frac{1}{2} \sum (a_\nu + b_\nu i) \cdot e^{-\nu t i}$$

*) „*Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihe*", Math. Ann. Bd. XXI, p. 117. — Man vergl. auch eine Note von Herrn G. Vivanti: „*Sulle serie di potenze*" — in der Rivista di Matematica 1893.

**) Dies gilt natürlich auch für die Reihe $\varphi_1(t)$, nämlich allgemein für:

$$\varphi(t) \pm \varphi(-t) = \sum a_\nu (e^{\nu t i} \pm e^{-\nu t i}) = \sum a_\nu (x^\nu \pm x^{-\nu}).$$

und setzt:

$$e^{ti} = x, \quad \Phi(t) \doteq F(x)$$

also:

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\sum(a_\nu - b_\nu i) \cdot x^\nu + \tfrac{1}{2}\sum(a_\nu + b_\nu i) \cdot x^{-\nu}$$

$$= F_1(x) + F_2(x^{-1})$$

so wird $F(x)$ als Reihe nach positiven und negativen ganzen Potenzen von x in Folge der über die Convergenz von $\Phi(t)$ gemachten Voraussetzung lediglich auf der Peripherie des Einheitskreises convergiren und also *in dieser besonderen Form* nur dort existiren. Dagegen wird offenbar in unendlich vielen Fällen $F(x)$ sowohl in das Innere des Einheitskreises, als auch nach aussen analytisch fortgesetzt werden können, da ja $F_1(x)$ *im Innern*, $F_2(x^{-1})$ *ausserhalb* des Kreises an sich analytisch ist und — bei passender Beschaffenheit der a_ν, b_ν — $F(x)$ eine analytische Fortsetzung *nach aussen*, $F_2(x^{-1})$ eine solche *nach innen* zulassen wird. (Man nehme z. B. für $F_1(x)$, $F_2(x)$ irgend zwei Functionen, die im Endlichen nur die singuläre Stelle $x = 1$ haben und noch für $|x| = 1$ durch eine absolut convergirende Potenzreihe in x dargestellt werden, z. B. $(1-x) \cdot \lg(1-x)$, $\sqrt{1-x}$, etc.).

Da somit $F(x)$ in unendlich vielen Fällen eine analytische Fortsetzung besitzen wird, so folgt auf Grund des in § 1 bewiesenen Hülfssatzes das gleiche für $\Phi(t)$, auch wenn die trigonometrische Reihe, welche zunächst $\Phi(t)$ für *reelle* Werthe von t definirt, ausschliesslich für solche convergirt.

Wendet man dieses Ergebniss auf den vorliegenden Fall an, so erkennt man, dass die Frage nach der Entwickelbarkeit von $\sum a_\nu \cos \nu t$ $\sum a_\nu \sin \nu t$ in Potenzreihen für alle anderen Werthe ausser $t = \pm 2\varkappa\pi$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$) lediglich davon abhängen wird, ob $\sum a_\nu x^\nu$ für irgend welche Stellen des Einheitskreises nach der Taylor'schen Reihe entwickelt werden kann, oder ob die singulären Stellen dort überall dicht liegen. Hierüber irgend eine Entscheidung unmittelbar aus der arithmetischen Natur der Coefficienten zu gewinnen, dürfte indessen schwerlich gelingen, da die für alle anderen Werthe ausser für $x = 1$ resultirenden Zeichenwechsel eine directe Schätzung der Taylor'schen Entwickelungscoefficienten bei unendlich wachsender Stellenzahl kaum möglich erscheinen lassen. Andererseits bietet aber auch die Vergleichung mit anderen Functionen, welche auf dem Convergenzkreise noch endliche Ableitungen jeder endlichen Ordnung besitzen, keinen definitiven Anhaltspunkt für eine solche Entscheidung: denn es giebt,

wie ich in der oben citirten Abhandlung ausdrücklich gezeigt habe*), deren sowohl solche, die thatsächlich die Entwickelbarkeit nur in einem *einzigen* Punkte verlieren; als auch solche, die überhaupt keine analytische Fortsetzung zulassen.

Soweit man indessen nach Analogien schliessen kann, möchte ich es für wenig wahrscheinlich halten, dass gerade die von Du Bois-Reymond betrachtete Function $f(x) = \sum e^{-\sqrt{\nu}} x^\nu$ *keine* analytische Fortsetzung besitzen sollte. Beachtet man nämlich, dass hier die Coefficienten $a_\nu = e^{-\sqrt{\nu}}$ in *ähnlich regelmässiger Weise* abnehmen, wie z. B. ν^{-1} und $(1+\varepsilon)^{-\nu}$ $(\varepsilon > 0)$, und zwar *schneller* als ν^{-1}, *langsamer* als $(1+\varepsilon)^{-\nu}$, dass andererseits:

$$\sum_1^\infty \nu^{-1} x^\nu = -\lg(1-x) \quad \text{und:} \quad \sum_1^\infty (1+\varepsilon)^{-\nu} x^\nu = \frac{x}{1+\varepsilon-x}$$

analytisch fortsetzbar sind, so könnte eine Veranlassung zu der gegentheiligen Vermuthung bezüglich der Function $\sum e^{-\sqrt{\nu}} . x^\nu$ doch lediglich in dem Umstande gefunden werden, dass hier — anders wie bei den oben erwähnten Functionen — die durch Differentiation abgeleiteten Reihen auf dem Convergenzkreise noch durchweg convergiren. Da man aber nach dem von mir a. a. O. angegebenen Verfahren leicht Potenzreihen mit der nämlichen Eigenschaft construiren kann, welche auf dem Einheitskreise zweifellos nur die eine singuläre Stelle $x = 1$ besitzen und deren Coefficienten mit $a_\nu = e^{-\sqrt{\nu}}$ die charakteristische Eigenschaft gemein haben durchweg positiv zu sein und nach einem bestimmten Gesetze regelmässig abzunehmen**), so darf man sicherlich wohl soviel sagen, dass nach Maassgabe dieser Analogien jeder bestimmte Anhalt dafür fehlt, um $\sum e^{-\sqrt{\nu}} x^\nu$ für *nicht* analytisch fortsetzbar zu halten.

Wesentlich anders liegt die Sache, wenn man die a_ν lediglich gemäss den Bedingungen (4) des § 1, im übrigen aber *völlig willkürlich* gewählt denkt. Hier muss vor allem bemerkt werden, dass die, wie ich glaube, ziemlich allgemein verbreitete Meinung, als ob ein durch-

*) a. a. O. p. 169 ff., p. 182.

**) Beispiel. Man setze für $b < 1$:

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{b^\lambda}{1+\frac{1}{\lambda}-x} = \sum_0^\infty A_\nu x^\nu$$

wo also:

$$A_\nu = \sum_1^\infty \lambda b^\lambda \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\nu+1}.$$

eine Potenzreihe mit endlichem Convergenzbereiche definirtes Functionselement *in der Regel* eine analytische Fortsetzung besitze, während die *Nicht*-Fortsetzbarkeit als eine nur in *ganz speciellen Fällen* auftretende, höchst merkwürdige Erscheinung anzusehen sei, entschieden unrichtig ist. In Wahrheit verhält es sich genau umgekehrt: *nur dann*, wenn zwischen den Reihencoefficienten von vornherein *bestimmte Beziehungen* von verhältnissmässig *specieller* Natur bestehen, kann auf eine Fortsetzbarkeit gerechnet werden, während *im allgemeinen keine* analytische Fortsetzung existiren wird.

Zur näheren Begründung dieser Bemerkung diene folgendes. Es werde gesetzt:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} c_\nu x^\nu$$

wo c_ν durchweg positiv und $\lim \sqrt[\nu]{c_\nu} = 1$ sein soll. Versteht man sodann unter p_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) eine Reihe positiver, mit ν in's Unendliche wachsender ganzer Zahlen von der Beschaffenheit, dass p_ν ein Theiler von $p_{\nu+1}$ und somit allgemein von $p_{\nu+\varrho}$ (z. B. $p_\nu = \nu!$, $p_\nu = a^\nu$, wo a eine ganze Zahl), und setzt man:

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} c_{p_\nu} \cdot x^{p_\nu} = \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu} c_{p_\nu} \cdot x^{p_\nu} + R_n(x),$$

so erkennt man aus der Beziehung:

$$R_n(x) = \sum_{n}^{\infty}{}_{\nu} c_{p_\nu} \cdot x^{p_\nu} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} c_{p_{n+\nu}} \left(x^{p_n}\right)^{\frac{p_{n+\nu}}{p_n}},$$

dass $R(x)$ und folglich auch $\varphi(x)$ sich singulär verhält für $x^{p_n} = 1$, also für die p_n Stellen, welche den Einheitswurzeln vom Grade p_n entsprechen. Daraus ergiebt sich aber, da man der Zahl n jeden beliebig grossen Werth beilegen kann, dass die singulären Stellen von $\varphi(x)$ auf dem Einheitskreise überall dicht liegen, also $\varphi(x)$ keine analytische Fortsetzung zulässt.

Bezeichnet man jetzt diejenigen Zahlen, welche nach Ausschluss der Zahlen p_ν aus der natürlichen Zahlenreihe übrig bleiben, durch q_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$), und setzt hierauf die oben definirte Function $f(x)$ in die Form:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} c_{p_\nu} \cdot x^{p_\nu} + \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} c_{q_\nu} \cdot x^{q_\nu} = \varphi(x) + \psi(x),$$

so erkennt man ohne weiteres, dass $f(x)$ nur dann eine analytische Fortsetzung besitzen wird, wenn: 1) auch die Singularitäten von $\psi(x)$ auf dem Einheitskreise überall dicht liegen; 2) zwischen den Coefficienten c_{p_ν}, c_{q_ν} *ganz bestimmte Relationen* bestehen, vermöge deren so

viele Singularitäten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ *sich gegenseitig vernichten*, dass dieselben für $\varphi(x) + \psi(x)$ nicht mehr überall dicht liegen. —

Mit Benützung der Methode, welche soeben zu der mit $\varphi(x)$ bezeichneten Function geführt hat, kann man nun offenbar ohne weiteres jetzt auch einen allgemeinen Typus von Functionen aufstellen, welche auf dem Einheitskreise noch durchweg endliche Ableitungen jeder Ordnung besitzen und *sicher* keine analytische Fortsetzung zulassen: man hat hierzu offenbar nur den Coefficienten c_ν solche Werthe beizulegen, wie sie bisher mit a_ν bezeichnet wurden. Nimmt man z. B. $a_\nu = a^{-\overset{a}{\log}\nu}$, (s. § 1), $p_\nu = a^\nu$, so ergiebt sich:

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty {}_\nu a^{-\nu^2} \cdot x^{a^\nu}.$$

Man erkennt auch, dass das früher*) von mir mitgetheilte Beispiel:

$$\varphi_1(x) = \sum \frac{1}{\nu!} x^{a^\nu}$$

gleichfalls einen speciellen Fall dieser Kategorie bildet.

§ 3.

Die in § 1 angestellten Betrachtungen legen den Versuch nahe, die von Cauchy herangezogene, in dem oben citirten Aufsatze von mir besprochene**) Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ bezw. $\mathfrak{P}(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ mit der singulären Stelle $x = 0$ dadurch zu einem einwandfreien Beispiele einer *nicht* entwickelbaren Function mit *convergirender* Mac Laurin'scher Reihe umzugestalten, dass man an Stelle des arithmetischen Ausdruckes $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ von vornherein eine für die Umgebung irgend einer reellen Stelle, z. B. $x = 1$, mit $e^{-\frac{1}{x^2}}$ gleichgeltenden Potenzreihe $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ zu Grunde legt, deren Convergenzkreis dann offenbar die imaginäre Axe im Punkte $x = 0$ tangirt. *Wenn* dann diese Potenzreihe mit ihren Ableitungen noch auf der Peripherie dieses Kreises convergirte, so würde sie in der That eine „*eigentliche*" Definition der Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ und ihrer Ableitungen für $x = 0$ liefern, und man könnte dann schliesslich, ähnlich wie in § 1, durch Substitution von $x - 1 = e^{it}$ eine Function herstellen, welche die fragliche Singularität *im Innern* eines gewissen *reellen* Intervalles besitzt. Es lässt sich indessen zeigen, dass die obige Potenzreihe für $x = 0$ *divergiren* muss.

*) a. a. O. p. 182.

**) a. a. O. p. 160.

Bezeichnet man nämlich die Summe dieser Reihe mit $P(x)$, so müsste, *wenn* die Reihe für $x = 0$ überhaupt *convergierte*, nach einem bekannten Abel'schen, von Stolz erweiterten Satze*), die Beziehung bestehen:

$$P(0) = \lim_{x=0} P(x) = \lim_{x=0} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

falls x *auf irgend einem beliebigen Strahle* aus dem *Innern* des Convergenzkreises der Stelle $x = 0$ zustrebt. Daraus ergiebt sich aber als eine *nothwendige* Bedingung für die Convergenz von $P(x)$ an der Stelle $x = 0$, dass $\lim_{x=0} e^{-\frac{1}{x^2}}$ eindeutig bestimmt (nämlich durchweg $=0$) sein müsste, gleichgültig in welcher geradlinigen Richtung man x aus dem Innern des Kreises der Nullstelle nähert.

Setzt man nun:

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \left(\text{wo: } -\tfrac{\pi}{2} < \varphi < +\tfrac{\pi}{2}\right)$$

so wird:

$$\left| e^{-\frac{1}{x^2}} \right| = e^{-\frac{1}{r^2}\cos 2\varphi}$$

bei verschwindendem r nur dann der Null zustreben, wenn $\cos 2\varphi > 0$, d. h. wenn φ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegt, dagegen ins Unendliche wachsen, wenn φ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{2}$ oder zwischen $+\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt. Daraus folgt dann aber nach dem oben gesagten in der That, dass die Reihe $P(x) = \sum c_\nu (x-1)^\nu$ an der Stelle $x = 0$ *divergiren* muss.

Die Methode, durch welche diese Erkenntniss gewonnen wurde, führt auf die Vermuthung, dass eine analoge Betrachtung für die Function $e^{-\frac{1}{x}}$ ein günstigeres Resultat ergeben könnte, da hier in dem entsprechenden Ausdrucke φ an die Stelle von 2φ tritt. Wirklich folgt auch hier aus:

$$e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)},$$

dass der absolute Betrag dieser Grösse, nämlich: $e^{-\frac{1}{r}\cos\varphi}$ für jede Wahl von φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ verschwindet, sobald man r gegen Null convergiren lässt. Das gleiche gilt aber auch für alle Differentialquotienten von $e^{-\frac{1}{x}}$, da diese durchweg als Producte von $e^{-\frac{1}{x}}$ in eine ganze Function von $\frac{1}{x}$ darstellbar sind. Entwickelt man also hier:

*) Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II, p. 157.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} = \sum c_\nu (x-1)^\nu,$$

so wird hier $\lim f(x)$ und für jedes endliche n auch $\lim f^{(n)}(x)$ den Werth 0 haben, wenn x *auf einem ganz beliebigen Strahle* aus dem Innern des Convergenzkreises der Nullstelle zustrebt.

(Beiläufig bemerkt hat es keine Schwierigkeit, die Coefficienten c_ν der obigen Potenzreihe wirklich aufzustellen. Man findet nämlich nach einer bekannten Formel*):

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)}{dx^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{x}} \left\{\left(\frac{1}{x}\right)^n - (n-1)\cdot n_1 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + (n-1)(n-2)\cdot n_2 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} - \cdots\right\}$$

und daher:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{1}{n!\,e}\{1 - (n-1)_1 \cdot n_1 + 2!\,(n-1)_2 \cdot n_2 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,(n-1)_{n-1}\cdot n_{n-1} + (-1)^n \cdot n!\, n_n\}.-)$$

Hier ist also die bei dem vorigen Beispiele erwähnte *nothwendige* Bedingung für die Convergenz der Reihe $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ und ihrer Ableitungen an der Stelle $x = 0$ erfüllt: nichtsdestoweniger lässt sich zeigen, dass dieselbe auch hier nicht stattfindet.

Für die Punkte x des Convergenzkreises hat man nämlich:

$$x = 1 + e^{\varphi i} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

also:

$$e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\varphi}\left\{\cos\frac{1}{2}\varphi - i\sin\frac{1}{2}\varphi\right\}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\varphi}{2}\right)\right\}.$$

Nähert sich jetzt x *auf* dem Convergenzkreise der Stelle $x = 0$, also φ dem Werthe π, so wächst $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ über alle Grenzen und daher besitzt der reelle, wie der imaginäre Theil von $e^{-\frac{1}{x}}$ auf dem Convergenzkreise in der Nähe der Stelle $x = 0$ unendlich viele Maxima und Minima mit der Amplitude $2.e^{-\frac{1}{2}}$, ist also für $x = 0$ unstetig. Daraus folgt aber, dass die Reihe $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ *und ihre Ableitungen* keinesfalls auf dem Convergenzkreise convergiren können, da ja in diesem Falle $\sum c_\nu (x-1)^\nu$

*) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. II, p. 6.

daselbst auch *unbedingt* und somit auch *gleichmässig* convergiren müsste, was in Folge der soeben gemachten Bemerkung über das Verhalten von $e^{-\frac{1}{x}}$ ausgeschlossen erscheint*). Es kann aber auch hier wieder $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ *nicht* dazu dienen, um eine noch auf dem Convergenzkreise mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endliche und stetige Function zu definiren.

Diese letzte Betrachtung schien mir deshalb nicht ohne Interesse, weil daraus folgendes hervorgeht:

> Wenn ein analytischer Ausdruck $f(x)$, der für das Innere eines gewissen um irgend einen Punkt α beschriebenen Kreises durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ darstellbar ist, *mit allen Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung* endlich und stetig bleibt, falls x aus dem *Innern* des Kreises *in beliebiger Richtung jedem beliebigen Punkte der Peripherie* zustrebt, so darf man hieraus dennoch *nicht* schliessen, dass $\mathfrak{P}(x-\alpha)$, $\mathfrak{P}^{(n)}(x-\alpha)$ noch auf der Peripherie convergiren müssen.

Mit anderen Worten: der oben erwähnte Abel-Stolz'sche Satz ist *nicht* umkehrbar, auch wenn $f(x)$ *mit allen Differentialquotienten* die genannten Stetigkeitsbedingungen befriedigt.

§ 4.

Zur Vervollständigung der bisherigen Ergebnisse will ich noch zeigen, dass sich auch *durch unbeschränkt differenzirbare, analytische Ausdrücke* solche Functionen einer *reellen* Variablen x definiren lassen, welche in der Umgebung einer Stelle x_0 nur auf *einer* Seite dieser Stelle durch die Taylor'sche Reihe dargestellt werden, während auf der *anderen* die Summe der dort selbstverständlich gleichfalls convergirenden Reihe mit der betreffenden Function *nicht* übereinstimmt.

Obschon man mit Hülfe der von mir in dem mehrfach citirten Aufsatze betrachteten Ausdrücke**), wie:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{1+a^\nu x} \qquad (a > 1)$$

ganz direct derartige Functionen erzeugen kann, erscheint es etwas

*) Die Reihe $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ wird, wie die Theorie der Fourier'schen Reihen lehrt, auf dem Kreise noch *bedingt* convergiren. Sie convergirt alsdann *ungleichmässig* in der Nähe der Stelle $\varphi = \pi$. Die durch gliedweise Differentiation von $\sum c_\nu (x-1)^\nu$ hervorgehenden Reihen sind dagegen auf dem Convergenzkreise *divergent*.

**) Math. Ann. Bd. 42, p. 161.

einfacher, auf dem entsprechenden Wege zunächst eine unbeschränkt differenzirbare Function herzustellen, welche nur auf der *einen* Seite einer Stelle x_0 — etwa der Nullstelle — *identisch verschwindet*, auf der anderen von Null verschieden ist, ohne dass die Continuität *der Function und ihrer sämmtlichen Differentialquotienten* an der Nullstelle irgendwelche Unterbrechung erleidet.

Wie ich a. a O. gezeigt habe, ist die in Gl. (1) mit $f(x)$ bezeichnete Function an der Nullstelle nach *rechts* stetig und besitzt durchweg endliche *rechtsseitige* Differentialquotienten, es ist nämlich:

$$(2) \quad f(0) = f(+0) = \frac{1}{e}, \quad f_+^{(n)}(0) = f^{(n)}(+0) = (-1)^n . n! \left(\frac{1}{e}\right)^{a^n}.$$

Nichtsdestoweniger wird $f(x)$ durch die entsprechende beständig convergirende Mac Laurin'sche Reihe:

$$(3) \quad \varphi(x) = \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \left(\frac{1}{e}\right)^{a^\nu} \cdot x^\nu$$

nicht dargestellt.

In Folge dessen wird also der Ausdruck:

$$(4) \quad \Phi(x) = \varphi(x) - f(x)$$

für $x = 0$ mit sämmtlichen rechtsseitigen Differentialquotienten *verschwinden*, und in der rechtsseitigen Nachbarschaft der Nullstelle mit sämmtlichen Differentialquotienten endlich und stetig sein, ohne daselbst *identisch zu verschwinden*. Daher würde eine Function $F(x)$, die für $x \leqq 0$ beständig den Werth 0, dagegen für $x \geqq 0$ den Werth $\Phi(x)$ hat, an der Nullstelle selbst mit sämmtlichen Differentialquotienten noch continuirlich sein. Wollte man nun aber versuchen eine solche Function $F(x)$ für irgend ein Intervall $(-c, +c)$ durch einen analytischen Ausdruck, etwa eine Fourier'sche Reihe wirklich darzustellen, so würde diese — wegen: $F(-c) = 0$, $F(+c) = \Phi(c)$ d. h. im allgemeinen *nicht* 0 — an den Grenzen nicht mehr gleichmässig convergiren und in Folge dessen auch *nicht gliedweise differenzirbar* sein, könnte also keinesfalls auch zur analytischen Darstellung der Differentialquotienten von $F(x)$ dienen.

Um diesem Uebelstande abzuhelfen, modificire ich nun die mit $F(x)$ bezeichnete Function noch folgendermassen. Bildet man:

$$(5) \quad \Phi(1-x) = \varphi(1-x) - f(1-x),$$

so verhält sich offenbar dieser Ausdruck in der *linksseitigen* Nachbarschaft der Stelle $x = 1$ genau so, wie $\Phi(x)$ in der *rechtsseitigen* der Nullstelle, d. h. man hat:

$$(6) \quad \Phi(1-0) = 0, \qquad \Phi^{(n)}(1-0) = 0.$$

Definirt man daher jetzt die Function $F(x)$ in der Weise, dass:

$$(7)\qquad \begin{cases} F(x) = 0 & \text{für: } -1 \leqq x \leqq 0, \\ F(x) = \Phi(x) \cdot \Phi(1-x) & \text{für: } 0 \leqq x \leqq +1 \end{cases}$$

so wird die so definirte Function $F(x)$ für das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ nicht nur mit allen Differentialquotienten continuirlich sein, sondern auch noch die Eigenschaft besitzen, dass:

$$F\ (-1+0) = F\ (1-0) = 0,$$
$$F^{(n)}(-1+0) = F^{(n)}(1-0) = 0.$$

In Folge dessen lassen sich aber $F(x)$, $F^{(n)}(x)$ in *unbedingt und gleichmässig* convergirende Fourier'sche Reihen entwickeln, d. h. schliesslich: es lässt sich $F(x)$ durch eine unbeschränkt *gliedweise differenzirbare* Fourier'sche Reihe darstellen. Man erhält auf diese Weise:

$$(8)\qquad F(a) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty {}_\nu (a_\nu \cos \nu\pi x + b_\nu \sin \nu\pi x)$$

wo:

$$(9)\qquad \left.\begin{matrix} a_\nu \\ b_\nu \end{matrix}\right\} = \int_0^1 \Phi(x) \cdot \Phi(1-x) \cdot \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \nu\pi x \cdot dx.$$

Bedeutet jetzt $\mathfrak{P}(x)$ eine für irgendwelche Umgebung der Nullstelle convergirende Potenzreihe, so wird der *analytische Ausdruck:*

$$(10)\qquad F_1(x) = F(x) + \mathfrak{P}(x)$$

in der Umgebung der Nullstelle durchweg endliche und stetige, durch litterale Ausführung der Differentiation herzustellende Differentialquotienten besitzen, aber nur *links* von der Nullstelle mit der *Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x)$ übereinstimmen.

Nimmt man speciell für $\mathfrak{P}(x)$ eine *beständig* convergirende Potenzreihe, die wie $F(x)$ die Periode 2 besitzt, z. B. $\mathfrak{P}(x) = \cos \pi x$, so wird der für jedes endliche x mit allen Differentialquotienten continuirliche Ausdruck:

$$(11)\qquad F_1(x) = \cos \pi x + F(x)$$

nur in allen denjenigen Intervallen, die *links* von einer *ungeraden, rechts* von einer *geraden* Zahl begrenzt werden, mit $\cos \pi x$ übereinstimmen. Daraus ergiebt sich, dass zwei *mit allen Differentialquotienten durchweg continuirliche* analytische Ausdrücke, auch wenn sie für unendlich viele *Strecken* einander *gleich* sind, dennoch *keineswegs identisch* zu sein brauchen.

München, Juli 1893.

Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylor'schen Lehrsatzes für Functionen einer reellen Variablen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Für Functionen einer *complexen* Variablen bestehen, seit Cauchy's fundamentalen Untersuchungen, über den Geltungsbereich der Taylor'schen Reihe keinerlei Zweifel; damit $f(x)$ in der Umgebung einer Stelle x_0 entwickelbar sei in der Form:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot (x - x_0)^\nu,$$

ist *nothwendig und hinreichend*, dass $f(x)$ für alle Werthe x im Innern eines gewissen um x_0 zu beschreibenden Kreises *eindeutig*, *endlich* und *monogen*, d. h. mit einem von der Fortschreitungsrichtung unabhängigen, endlichen Differentialquotienten versehen sei. So merkwürdig dieses Ergebniss besonders insofern erscheint, als hier schon die Existenz des *ersten* Differentialquotienten (in dem angegebenen Sinne) die *Entwickelbarkeit* von $f(x)$ nach sich zieht, so verdient doch hervorgehoben zu werden, dass diese Voraussetzung in Wahrheit eine sichtlich *stärkere* Forderung repräsentirt, als die Voraussetzung bestimmter Differentialquotienten *jeder* endlichen Ordnung für Functionen einer *reellen* Variablen. Denn während in dem zuletzt genannten Falle die betreffende Function einer zwar *unbegrenzten*, aber *abzählbaren* Menge von Bedingungen unterworfen wird, so besitzt die Anzahl von Bedingungen, welche der Existenz eines von der Fortschreitungsrichtung unabhängigen $\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ entspricht, die *Mächtigkeit eines Continuums*. Diese Erwägung lässt es daher *a priori* durchaus *begreiflich* erscheinen, dass durch die Cauchy'sche Bedingung der *Monogeneität* ein merklich *engerer* Kreis, so zu sagen eine *vollkommenere* Classe von Functionen abgegrenzt wird, als es durch die *unbeschränkte* Differenzir-

barkeit im *reellen* Sinne geschieht, und dass diejenige Eigenschaft, welche die *monogenen* Functionen einer complexen Variablen vor den *unbeschränkt differenzirbaren* einer *reellen* auszeichnet, gerade in jener *Entwickelbarkeit* nach der Taylor'schen Reihe besteht, welche Lagrange schon den letzteren ohne Weiteres zuerkannt wissen wollte.

Durch diese Bemerkung soll natürlich Cauchy's Verdienst in keiner Weise geschmälert werden: vielmehr möchte ich ausdrücklich die vollkommene Erschliessung der obigen Erkenntniss als eine der *hervorragendsten* Entdeckungen Cauchy's bezeichnen, der gerade hierdurch nicht nur als der Begründer einer *eigenen* und der daran anschliessenden Riemann'schen, sondern gewissermassen auch als der intellectuelle Urheber der Weierstrass'schen Functionentheorie erscheint. Denn der dort gewählte, scheinbar so überaus *specielle* Ausgangspunkt, bei welchem die *Entwickelbarkeit* von vornherein in die *Definition* der „analytischen" Functionen aufgenommen wird, findet doch schliesslich seine historische und logische Begründung lediglich darin, dass die *einmalige* Differenzirbarkeit (im complexen Sinne) durch Cauchy schon als ausreichende Grundlage für die Entwickelbarkeit erkannt worden war.

Darf nun die Frage nach der Entwickelbarkeit in die Taylor'sche Reihe für Functionen einer *complexen* Variablen als vollständig erledigt gelten, so liegt die Sache wesentlich anders, sobald man die unabhängige Variable auf das *reelle* Gebiet beschränkt. „Bedingungen, welche für die Taylor'sche Entwickelbarkeit einer Function *genügen*," — sagt Du Bois-Reymond in einem Aufsatze über diesen Gegenstand*) — „ergeben sich, wenn es sich um Functionen reeller Veränderlichen handelt, aus den bekannten Restausdrücken. . . . *Von den nothwendigen Bedingungen für die Taylor'sche Entwickelung, falls dergleichen vorhanden sind, haben wir aber nicht die geringste Vorstellung; ja ich glaube sogar, dass über den Spielraum, welchen sie gewähren könnten, irrige Ansichten allgemein verbreitet sind.*" Obschon dieser Ausspruch bereits aus dem Jahre 1876 bezw. 1883 stammt, so dürfte er doch bis zum heutigen Tage an Richtigkeit kaum etwas eingebüsst haben. Eine durch denselben ganz direct angeregte Mittheilung des Herrn J. König**) scheint mir die Lösung des fraglichen Problems nicht wesentlich gefördert zu haben, wie ich weiter unten noch des Näheren auseinandersetzen werde. Von weiteren Versuchen in dieser Richtung ist mir trotz genauer Controlle der betreffenden Literatur nichts bekannt geworden.

*) *Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwickelung.* Ber. der Bayr. Acad. d. Wiss. 1876. Wieder abgedruckt: Math. Ann. Bd. XXI, p. 109.

**) *Ueber die Bedingungen der Gültigkeit der Taylor'schen Reihe.* Math. Ann. Bd. XXIII, p. 450.

Was nun zunächst die oben von Du Bois-Reymond gemeinten *hinreichenden* Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung betrifft, so findet man bekanntlich mit Hülfe des sog. Rolle'schen Mittelwerthsatzes, unter der Voraussetzung, dass der Function $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = a$ *vollständige* (d. h. bei rechtsseitiger und linksseitiger Differentiation *denselben* Werth besitzende) endliche Differentialquotienten bis zur n^{ten} Ordnung zukommen:

$$(1) \qquad f(a+h) = \sum_0^{n-1} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot h^\nu + R_n,$$

wobei man dem „*Restgliede*" R_n verschiedene Formen geben kann, insbesondere die von Lagrange herrührende:

$$(2) \qquad R_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\vartheta h) \cdot h^n$$

und die Cauchy'sche: *)

$$(3) \qquad R_n = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\vartheta h)(1-\vartheta)^{n-1} \cdot h^n.$$

Dabei bedeutet ϑ einen für jedes n zwar *bestimmten* (für beide Ausdrücke verschiedenen), aber *unbekannten* Mittelwerth zwischen 0 und 1. Bleibt die vollständige Differenzirbarkeit von $f(x)$ für jedes noch so grosse endliche n bestehen, so würde das Verschwinden von $\lim_{n=\infty} R_n$ für jenen einen bestimmten Werth ϑ thatsächlich die *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung:

$$(4) \qquad f(a+h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot h^\nu$$

darstellen. Da man indessen jenen Mittelwerth ϑ und die Art seiner Abhängigkeit von n *nicht kennt*, so kann man aus dem Verschwinden von $\lim R_n$ auf die Gültigkeit der Gl. (4) nur dann einen Schluss ziehen, wenn dasselbe für *alle* dem Intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehörigen Werthe ϑ stattfindet. Hierbei würde es aber — worauf mich Herr Stolz gelegentlich aufmerksam gemacht hat — noch nicht einmal genügen, wenn der fragliche Grenzausdruck für *jeden einzelnen* dem Intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehörigen Werth ϑ verschwindet, da hieraus noch nicht ohne weiteres auf das Verschwinden des nämlichen Grenzausdruckes geschlossen werden dürfte, falls ϑ eine mit n in den Grenzen $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ *veränderliche* Grösse bedeutet. (Man betrachte z. B. Ausdrücke, wie:

*) Eine allgemeinere, diese beiden Ausdrücke als specielle Fälle umfassende Form wurde zuerst von Schlömilch, später auch von E. Roche gegeben. cf. Liouville, Journ. de Mathém. Série II, T. III, p. 271 u. 384.

$\frac{n\vartheta h}{(1+\vartheta h)^n}$, $\frac{n^2\vartheta h}{1+n^3\vartheta^3 h^3}$, welche für jedes $h \leqq 0$ und jeden dem Intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehörigen Werth ϑ bei $\lim n = \infty$ verschwinden. Setzt man dagegen von vornherein $\vartheta = \frac{1}{n}$, so geht der erste dieser Ausdrücke über in: $\frac{h}{\left(1+\frac{h}{n}\right)^n}$ und hat also für $n = \infty$ den Grenzwerth he^{-h}, während der zweite zu $\frac{nh}{1+h^3}$ wird und daher für jedes von Null verschiedene endliche h mit n in's Unendliche wächst.) Hingegen würde man die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung (4) mit Sicherheit dann erschliessen können, wenn einer der Restausdrücke (2) oder (3) mit unendlich wachsendem n *gleichmässig* verschwindet für *alle* ϑ, welche der Bedingung genügen $0 \leqq \vartheta \leqq 1$. Dies besagt, dass zu jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse ε und zu jedem einzelnen Werthe h eines gewissen, den Werth $h = 0$ enthaltenden Intervalles eine positive Zahl n existiren muss, dergestalt dass für $\nu \geqq n$:

$$\frac{1}{\nu!} \cdot |f^{(\nu)}(a+\vartheta h) \cdot h^\nu| < \varepsilon$$

bezw.:

$$\frac{1}{(\nu-1)!} \cdot |f^{(\nu)}(a+\vartheta h)| \cdot (1-\vartheta)^\nu \cdot |h^\nu| < \varepsilon$$

wird, *gleichmässig* für *alle* Werthe ϑ, welche dem Gebiete $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehören.

Das Verschwinden des Restgliedes in *diesem* Umfange giebt also thatsächlich eine zwar *hinreichende* Bedingung, deren *Nothwendigkeit* indessen zum Mindesten *fraglich* bleibt.

Geht man statt von dem Rolle'schen Satze von der Identität aus:

$$(5) \qquad f(a+h) = f(a) + \int_0^h f'(a+h-t) \cdot dt,$$

so erhält man bekanntlich durch successive partielle Integrationen wiederum eine Entwickelung von der Form (4), wobei das Restglied in der Gestalt erscheint:

$$(6) \qquad R_n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_0^h f^{(n)}(a+h-t) \cdot t^{n-1} \cdot dt.$$

Hier würde in der That das Verschwinden von $\lim R_n$ für $n = \infty$ ohne Weiteres die *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung liefern (natürlich in Verbindung mit der unbeschränkten Differenzirbarkeit von $f(x)$, welche ja für die successiven partiellen Integrationen erforderlich ist). Da uns indessen die *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen, welchen $f(x)$ im Intervalle $(a, a+h)$ zu genügen hat, damit jenes Integral

für $n = \infty$ verschwinde, völlig *unbekannt* sind, wir vielmehr wiederum nur *theils nothwendige, theils hinreichende* Bedingungen hierfür angeben können (etwa indem wir das Integral mit Hülfe des ersten Mittelwerthsatzes reduciren, wobei sich dann wieder die Restformen von Lagrange, Cauchy und Schlömilch-Roche ergeben), so wird durch Aufstellung der obigen Bedingung die vorliegende Frage nur *verschoben*, aber keineswegs *gelöst*.

Hingegen ist es mir nun neuerdings gelungen, eine, wie ich glaube, völlig befriedigende Lösung derselben aufzufinden. Das betreffende Resultat lässt sich am einfachsten dahin formuliren, dass das gleichmässige Verschwinden des **Cauchy**'schen Restgliedes für *jeden* dem Intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehörigen Werth ϑ, auch eine **nothwendige** Bedingung für die Gültigkeit der Taylor'schen Formel bildet. Hierdurch erhält der Taylor'sche Satz auch für Functionen einer ausschliesslich *reellen* Variablen eine Einfachheit und Abrundung, wie ich und wohl auch mancher, der sich mit diesem Gegenstande näher beschäftigt hat, sie kaum für möglich gehalten hätte, und es wird zugleich der bisher undefinirbar scheinende Unterschied zwischen blos *unbeschränkt differenzirbaren* und *in Potenzreihen entwickelbaren* Functionen einer *reellen* Variablen vollständig aufgeklärt.

Das merkwürdigste an diesem Ergebnisse, welches eine wirkliche Lücke in der vorliegenden wichtigen Theorie ausfüllt und daher immerhin einiger Beachtung werth sein dürfte, ist wohl freilich, dass es mit den denkbar einfachsten Mitteln gewonnen werden kann und daher den Anschein erwecken mag, als müsste es längst allgemein bekannt sein. Gerade aus diesem Grunde habe ich den obigen Ausspruch Du Bois Reymond's citirt und möchte noch hinzufügen, dass ein so ausgezeichneter Kenner der fraglichen Materie, wie Herr Stolz, in seinem erst ganz kürzlich publicirten Lehrbuche der Differentialrechnung an der betreffenden Stelle*) lediglich den oben genannten Satz des Herrn König anführt.

Im Folgenden werden nun zunächst *nothwendige* Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe aufgestellt (§ 1), welche nach einer einfachen Reduction (§ 2) auch als *hinreichende* erkannt werden (§ 3). Daran knüpfen sich allgemeine Bemerkungen über das Cauchy'sche und das Lagrange'sche Restglied, welche noch zu anderen Formen des gefundenen Hauptsatzes führen (§§ 4, 5). Der Aufsatz schliesst mit einem Rückblicke auf die bisherigen Ergebnisse über den Geltungsbereich der Taylor'schen Entwickelung und den daraus resultirenden Unterschied zwischen blos *unbeschränkt differenzirbaren* und *entwickelbaren* Functionen (§ 6).

---

*) *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung.* Bd. I, p. 110.

§ 1.

Nothwendige Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe.

Lehrsatz. *Bedeutet* $\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu h^\nu$ *eine für alle positiven* $h < R$ *convergirende Reihe und setzt man, nachdem man eine Grösse* a *willkürlich angenommen:*

$$(1) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu (x-a)^\nu = f(x) \quad \textit{für:} \quad 0 \leqq x - a < R,$$

so besitzt $f(x)$ *für das Intervall* $a \leqq x < a + R$ *eindeutig bestimmte endliche Werthe und für* $x = a$ *rechtsseitige, für* $a < x < a + R$ *vollständige endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, welche für jedes endliche ganzzahlige* p *(incl.* $p = 0$*) der Bedingung genügen:*

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} F_{\pm p,n}(h,k) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{(n \pm p)!} f^{(n)}(a+h) \cdot k^{n \pm p} = 0,$$

und zwar gleichmässig für alle Werthe (h, k)*, welche dem Gebiete:*

$$0 \leqq h \leqq h + k \leqq r \quad (\text{wo: } r < R)$$

*angehören.**)

---

*) Dieser Satz, wie die folgenden, ist absichtlich so gefasst, dass er sich zunächst nicht auf eine gewisse *Umgebung*, sondern lediglich auf eine *einseitige Nachbarschaft* einer Stelle a bezieht. Da es sich hier nämlich wesentlich um Functionen einer *reellen* Variablen handelt, so wird eine Function $\varphi(x)$, auch wenn man sich dieselbe für die rechte *und* linke Umgebung der Stelle a durch einen einheitlichen differenzirbaren analytischen Ausdruck (etwa eine Fourier'sche Reihe) definirt denkt, immerhin zu *verschiedenen* Seiten von a völlig *verschiedene* Eigenschaften besitzen können, derart, dass z. B. *rechts* von a die Beziehung:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a) \cdot h^\nu = \varphi(a+h) \quad \text{für} \quad h < R$$

gelten mag, während die Summe der für $h < R$ dann gleichfalls convergirenden Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a) \cdot (-h)^\nu$$

zur Function $\varphi(a-h)$ in gar keiner Beziehung zu stehen braucht. Dass man in der That unbeschränkt differenzirbare analytische Ausdrücke $\varphi(x)$ von solcher Beschaffenheit construiren kann, habe ich in dem vorangehenden Aufsatze gezeigt (s. p. 54).

Da es nun aber hiernach auch *einseitig* entwickelbare Functionen giebt, so würde man die Frage nach den *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe von vornherein *zu eng* fassen, wenn man dieselbe lediglich für die *Umgebung* einer Stelle a formulirte, da hierdurch die Entwickelbarkeit *ein für allemal* abhängig erscheinen würde von Eigenschaften,

Beweis. Dass $f(x)$ in dem fraglichen Intervalle eindeutig und endlich ist, folgt ohne Weiteres aus der Definitionsgleichung (1). Da ferner nach einem bekannten Satze durch gliedweise Differentiation von Gl. (1) sich ergiebt:

$$(3) \qquad \sum_{p}^{\infty}{}_{\nu} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-p+1)\cdot c_\nu (x-a)^{\nu-p} = f^{(p)}(x)$$

$$\text{für} \quad 0 \leqq x-a < R,$$

so erkennt man auch die Existenz der Differentialquotienten von $f(x)$ in dem behaupteten Umfange. Zugleich folgt aus (1) und (3) für $x = a$:

$$c_0 = f(a), \quad c_p = \frac{1}{p!} f^{(p)}(a),$$

sodass sich die Gleichungen (1) und (3), wenn man noch $x - a = h$ setzt, auch folgendermassen schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned} (4) \quad & f(a+h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)\cdot h^\nu \\ (5) \quad & f^{(p)}(a+h) = \sum_{p}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu-p)!} f^{(\nu)}(a)\cdot h^{\nu-p} \end{aligned}\right\} \text{für: } 0 \leqq h < R.$$

Setzt man ferner:

$$(6) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} |c_\nu| \,.\, (x-a)^\nu = \varphi(x)$$

so ist offenbar $\varphi(x)$ eine für das Intervall $a \leqq x < a + R$ gleichfalls wohldefinirte Function von dem nämlichen Charakter wie $f(x)$, und man hat für $0 \leqq h < R$:

$$(7) \qquad \varphi(a+h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} |c_\nu| \,.\, h^\nu = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a) \,.\, h^\nu,$$

$$(8) \qquad \varphi^{(p)}(a+h) = \sum_{p}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\nu!}{(\nu-p)!} |c_\nu| \cdot h^{\nu-p} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu-p)!} \varphi^{(\nu)}(a) \,.\, h^{\nu-p}.$$

Man erkennt hieraus, dass $\varphi(a+h)$, $\varphi^{(p)}(a+h)$ für $0 \leqq h < R$ stetige Functionen von h sind und dass für jedes noch so grosse p:

$$(9) \qquad |f^{(p)}(a+h)| \leqq \varphi^{(p)}(a+h).$$

---

welche die Function zu *beiden* Seiten der Stelle a besitzen muss. Hingegen hat es offenbar keine Schwierigkeit, aus den für die beiden einzelnen *Nachbarschaften* sich ergebenden Entwickelbarkeitsbedingungen diejenigen zusammenzusetzen, welche sich auf die *Umgebung* einer Stelle beziehen. —

Daraus folgt, dass es zum Beweise der Relation (2) sicher ausreicht, wenn man zeigt, dass die analoge Relation für $\varphi^{(n)}(a+h)$ besteht.

Man hat nun für $0 \leq h \leqq h+k < R$:

$$\varphi(a+h+k) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a) \,.\, (h+k)^\nu$$

oder, wenn man nach Potenzen von k ordnet, mit Berücksichtigung von (7) und (8):

$$\varphi(a+h+k) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a+h) \,.\, k^\nu. \tag{10}$$

Von dieser Reihe lässt sich nachweisen, dass sie nach Annahme von $r < R$ *gleichmässig* convergirt für alle (h, k), welche der Bedingung genügen $0 \leqq h \leqq h+k \leqq r$. Hierzu zerlege man zunächst die Reihe (10) in folgender Weise:

$$\begin{aligned}\varphi(a+h+k) &= \sum_0^{n-1} {}_\nu \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a+h) \,.\, k^\nu + \sum_n^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a+h) \,.\, k^\nu \\ &= S_n(h, k) + T_n(h, k).\end{aligned}$$

Nimmt man jetzt h, k beliebig innerhalb des bezeichneten Werthegebietes an und bezeichnet mit δ eine positive Grösse, welche zunächst nur der Beschränkung unterworfen sein soll, dass auch noch

$$h+k+2\delta < R,$$

ferner mit ξ, η zwei willkürliche, dem Intervalle $(-1, +1)$ angehörige Zahlen*), so wird:

$$\begin{aligned}\varphi\big(a+h+k+(\xi+\eta)\delta\big) &= \varphi\big(a+(h+\xi\delta)+(k+\eta\delta)\big) \\ &= S_n(h+\xi\delta,\ k+\eta\delta) + T_n(h+\xi\delta,\ k+\eta\delta)\end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned}T_n(h+\xi\delta, k+\eta\delta) \leqq{}& \big|\varphi\big(a+h+k+(\xi+\eta)\delta\big) - \varphi(a+h+k)\big| \\ &+ |S_n(h+\xi\delta, k+\eta\delta) - S_n(h, k)| + T_n(h,k).\end{aligned} \tag{11}$$

Ist sodann eine positive Grösse ε beliebig klein vorgelegt, so fixire man zunächst n so, dass (für das betrachtete, willkürlich gewählte, aber bestimmte Werthepaar h, k):

$$R_n(h, k) < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Da ferner $\varphi(a+h+k)$ eine stetige Function von $(h+k)$, $S_n(h, k)$

*) Im Falle $h = 0$ bezw. $k = 0$ ist ξ bezw. η auf das Intervall $(0, 1)$ zu beschränken und auch weiterhin der Begriff der „Umgebung" in dem entsprechenden Sinne zu verstehen.

eine *gleichmässig* stetige Function der beiden Variablen h und k, so muss sich ein bestimmter Werth δ so fixiren lassen, dass gleichzeitig:

$$\left|\varphi\left(a+h+k+(\xi+\eta)\,\delta\right)-\varphi(a+h+k)\right|<\tfrac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|S_n(h+\xi\delta,\ k+\eta\delta)-S_n(h,k)\right|<\tfrac{\varepsilon}{3},$$

sodass also für diese Werthe von n und δ Ungl. (11) übergeht in:

$$T_n(h+\xi\delta,\ k+\eta\delta)<\varepsilon$$

und daher, da die betreffende Reihe nur *positive* Glieder enthält, *a fortiori:*

(12) $$T_\nu(h+\xi\delta,\ k+\eta\delta)<\varepsilon,\quad \text{für: } \nu\geqq n$$

wird, d. h. die Reihe (10), als Function von h und k betrachtet, *convergirt gleichmässig* für eine gewisse *Umgebung jeder einzelnen Stelle* (h,k), welche dem Bereiche $0\leqq h\leqq h+k\leqq r$ (wo $r<R$) angehört. Daraus folgt aber nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass*), dass die Reihe *für jenen gesammten Bereich gleichmässig convergirt*, sodass also, wenn r beliebig wenig unterhalb R angenommen wird, sich n so fixiren lässt, dass:

(13) $$T_\nu(h,k)<\varepsilon$$

für $\nu\geqq n$ und alle nicht-negativen (h,k), welche der Bedingung $h+k\leqq r$ genügen. Das Analoge gilt aber offenbar um so mehr für jede Reihe von folgender Form:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(\nu+p)!}\,\varphi^{(\nu)}(a+h)\cdot k^{\nu+p}$$

und ebenso für diejenige Reihe, welche aus (10) durch p-malige Differentiation nach k entsteht, nämlich:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(\nu-p)!}\,\varphi^{(\nu)}(a+h)\cdot k^{\nu-p}.$$

Man hat somit, da alle diese Reihen nur positive Glieder enthalten, *a fortiori:*

(14) $$\frac{1}{(\nu\pm p)!}\,\varphi^{(\nu)}(a+h)\cdot k^{\nu\pm p}<\varepsilon$$

*) s. *Abhandlungen aus der Functionenlehre* p. 71, 72. Der dort gegebene Beweis bezieht sich zwar auf Reihen, deren Glieder Functionen einer *complexen* Variablen $\xi+\eta i$ sind, er gilt aber unverändert auch für den Fall, dass die Glieder irgendwelche Functionen der beiden *reellen* Variablen (ξ,η) sind. — Einen anderen Beweis des fraglichen Satzes werde ich in einem Anhange zu diesem Aufsatze mittheilen.

für $\nu \geqq n$ und $0 \leqq h \leqq h + k \leqq r$, woraus dann schliesslich mit Hülfe der Beziehung (9) die Richtigkeit der unter (2) ausgesprochenen Behauptung sich ergiebt. —

Zusatz I. Für den *einen* der späterhin an die vorstehende Betrachtung zu knüpfenden Beweise, betreffend die *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen des Taylor'schen Satzes (cf. §§ 3 und 5), würde schon der Nachweis genügen, dass der Ausdruck:

$$F_n(h, k) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a + h) \cdot k^n$$

für *jeden einzelnen Werth* k des Intervalles $0 \leqq k \leqq r < R$ mit $\lim n = \infty$ *gleichmässig* gegen Null convergirt für *alle* nicht-negativen $h \leqq r - k$ (wobei also k jedesmal constant bleibt). Dass dies der Fall ist, lässt sich nun aber sehr einfach zeigen. Denkt man sich zunächst $r < R$ und sodann $k \leqq r$ fixirt, so convergirt die Reihe (10), nämlich:

$$\varphi(a + h + k) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a + h) \cdot k^\nu$$

sicher für $h = r - k$. In Folge dessen kann man n so fixiren, dass:

$$\frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a + r - k) \cdot k^\nu < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n.$$

Da aber Gl. (8) ohne Weiteres erkennen lässt, dass für $h < h'$ stets $\varphi^{(\nu)}(a + h) < \varphi^{(\nu)}(a + h')$, so hat man auch für $h \leqq r - k$:

$$\frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a + h) \cdot k^\nu < \varepsilon \quad (\nu \geqq n)$$

und daher schliesslich wiederum nach Ungl. (9):

$$\frac{1}{\nu!} |f^{(\nu)}(a + h)| \cdot k^\nu < \varepsilon. —$$

Zusatz II. Der oben bewiesene Satz nebst Zusatz I gilt offenbar in ganz analoger Weise für ein von a nach *links* hin gelegenes Intervall, d. h. aus der Beziehung:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!} \cdot (-h)^\nu = f(a - h) \quad \text{für:} \quad 0 \leqq h < R$$

folgen die nämlichen Bedingungen bezüglich der Endlichkeit von $f(x)$, $f^{(\nu)}(x)$ und des Verschwindens von

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(n \pm p)!} f^{(n)}(a - h) \cdot k^{n \pm p}. —$$

§ 2.

Ein Hülfssatz.

Hülfssatz. *Ist $f^{(n)}(x)$ eine für jedes positive, ganzzahlige n und für $a \leqq x < a + R$ definirte Function, welche bei irgend einem bestimmten, positiven oder negativen, ganzzahligen p der Bedingung genügt:*

$$\lim_{n=\infty} F_{p,n}(h, k) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{(n+p)!} f^{(n)}(a + h) \cdot k^{n+p} = 0$$

und zwar gleichmässig für alle (h, k) des Gebietes: $0 \leqq h \leqq h + k \leqq r$, wo $r < R$, so gilt das gleiche bei jedem ganzzahligen p.

Beweis. Es ist:

$$F_{p+1,\nu}(h, k) = \frac{1}{(\nu + p + 1)!} f^{(\nu)}(a+h) \cdot k^{\nu+p+1} = \frac{k}{\nu+p+1} F_{p,\nu}(h, k),$$

und daher wird für jedes $k \leqq r$:

$$|F_{p+1,\nu}(h, k)| < |F_{p,\nu}(h, k)|,$$

sobald nur $\nu + p + 1 > r$. Daraus folgt aber, dass $\lim_{n=\infty} F_{p+1,n}(h, k)$ und daher für $q > 0$ auch allgemein: $\lim_{n=\infty} F_{p+q,n}(h, k)$ mit $\lim_{n=\infty} F_{p,n}(h, k)$ in dem behaupteten Umfange *gleichmässig* verschwindet.

Um das Analoge für $F_{p-q,\nu}(h, k)$ zu erkennen, hat man zunächst:

$$\begin{aligned} F_{p-1,\nu}(h, k) &= \frac{1}{(\nu + p - 1)!} f^{(\nu)}(a + h) \cdot k^{\nu+p-1} \\ &= \frac{1}{(\nu + p)!} f^{(\nu)}(a + h) \cdot (k + \delta)^{\nu+p} \cdot \frac{k^{\nu+p-1}}{(k + \delta)^{\nu+p}} \cdot (\nu + p) \\ &= F_{p,\nu}(h,\ k + \delta) \left(\frac{k}{k + \delta}\right)^{\nu+p-1} \cdot \frac{\nu + p}{k + \delta}. \end{aligned}$$

Nimmt man jetzt $r < R$ an, so wird sich, wie wenig auch r unterhalb R liegen mag, eine positive Grösse δ so fixiren lassen, dass auch noch $r + \delta < R$. Man hat alsdann für jedes nicht-negative $k \leqq r$:

$$|F_{p-1,\nu}(h, k)| < |F_{p,\nu}(h,\ k + \delta)| \cdot \left(\frac{r}{r + \delta}\right)^{\nu+p-1} \cdot \frac{\nu + p}{\delta}$$

und wenn man jetzt eine positive Zahl n so fixirt, dass für $\nu \geqq n$ gleichzeitig:

$$\left(\frac{r}{r + \delta}\right)^{\nu+p-1} \cdot \frac{\nu + p}{\delta} \leqq 1,$$

$$|F_{p,\nu}(h,\ k + \delta)| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad 0 \leqq h \leqq h + k \leqq r,$$

so wird in demselben Umfange auch:

$$|F_{p-1,\nu}(h, k)| < \varepsilon,$$

und daraus folgt dann schliesslich das entsprechende Resultat für $F_{p-q,\nu}(h, k)$. —

§ 3.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe.

Hauptsatz. *Damit die für das Intervall* $0 \leqq h < R$ *eindeutige Function* $f(x+h)$ *daselbst darstellbar sei durch die Taylor'sche Formel:*

$$f(a+h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot h^{\nu}$$

ist nothwendig und hinreichend:

1) *dass* $f(x)$ *für* $a \leqq x < a+R$ *endlich sei und für* $x = a$ *rechtsseitige, für* $a < x < a+R$ *vollständige endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitze;*

2) *dass für irgend einen positiven oder negativen ganzzahligen Werth* p *(incl.* $p = 0$*):*

$$\lim_{n=\infty} F_{p,n}(h,k) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{(n+p)!} f^{(n)}(a+h) \cdot k^{n} = 0$$

werde und zwar gleichmässig für alle Werthe (h,k)*, welche dem Gebiete angehören:*

$$0 \leqq h \leqq h+k \leqq r, \quad \text{wo} \quad r < R.$$*)

*) Der oben erwähnte Satz des Herrn König unterscheidet sich von dem hier gegebenen vor allem dadurch, dass unter den betreffenden Bedingungen dort eine erscheint, welche mit Anwendung der hier gebrauchten Bezeichnungen folgendermassen lauten würde:

„*Es muss* $S(x,h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x) \cdot h^{\nu}$, *als Function von* x *betrachtet, gliedweise differenzirbar sein in der Umgebung jeder Stelle* x*, welche dem Intervalle* $a \leqq x < a+R$ *angehört und für alle positiven Werthe* h*, welche der Bedingung genügen:*

$$x+h < a+R.$$"

Da wir nun aber von den *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen, welchen die Glieder einer Reihe $\Sigma f_{\nu}(x)$ unterliegen, damit dieselbe gliedweise differenzirbar sei, keinerlei Vorstellung haben (wir kennen nur theils nothwendige, theils hinreichende Bedingungen), so wird durch Einführung der obigen Bedingung der Werth des betreffenden Satzes geradezu völlig illusorisch. Dazu kommt aber noch, dass jene Bedingung noch nicht einmal ausreicht, um den König'schen Beweis zu einem einwurfsfreien zu machen. Wie Herr Stolz in seinem Lehrbuche der Diff.-Rechnung mit Recht bemerkt (p. 111), ist hierzu vielmehr noch folgendes erforderlich:

„*Es müssen* $S(x,h)$ *und* $\frac{\partial S(x,h)}{\partial x}$ *gleichmässig stetige Functionen von* (x,h) *sein in der Umgebung jeder Stelle* (x,h)*, welche den Bedingungen genügt* $a \leqq x \leqq x+h < a+R$" —

Beweis. Da die Summe der Reihe $\sum \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot h^\nu$ für $0 \leqq h < R$ einen eindeutig bestimmten Werth besitzen soll, so folgt zunächst, dass die Reihe für $0 \leqq h < R$ convergiren muss, und sodann — nach einem bekannten Satze über Potenzreihen — dass ihre Coefficienten $\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)$ eindeutig bestimmte Grössen sein müssen. Da hiernach die Reihe genau den Charakter der im Lehrsatze des § 1 betrachteten hat, so muss ihre Summe die dort angegebenen Eigenschaften besitzen, und somit ergeben sich die hier ausgesprochenen Bedingungen als *nothwendige* für die Entwickelbarkeit von $f(a + h)$.

Um sie auch als *hinreichende* zu erkennen, bemerke man zunächst, dass, nach dem eben bewiesenen Hülfssatze, das Verschwinden von $\lim_{n=\infty} F_{p,n}(h, k)$ für *irgend ein* p auch dasjenige für *jedes beliebige* endliche p nach sich zieht. Man thut daher der Allgemeinheit des Beweises keinen Abbruch, wenn man p ganz nach Belieben specialisirt.

Ich will nun die Fälle $p = 0$ und $p = -1$ betrachten und zeigen, wie man im *ersteren* Falle mit Hülfe des Lagrange'schen, im *zweiten* mit Hülfe des Cauchy'schen Restausdruckes die Richtigkeit der fraglichen Behauptung erweisen kann. Dabei führt zwar das *zweite* Verfahren, nachdem einmal die auf das Verschwinden von $\lim F_{p,n}(h, k)$ bezügliche Bedingung in dem angegebenen Umfange durch den Satz in § 1 als *nothwendig* erkannt worden ist, merklich schneller zum Ziele: ich theile jedoch auch den auf die *erste* Methode gegründeten Beweis hier mit, weil derselbe von vornherein schon eine gewisse Reduction der eben erwähnten Bedingung und damit eine erhebliche Vereinfachung des Beweises in demjenigen Theile gestattet, der sich auf die *Nothwendigkeit* jener Bedingung bezieht (cf. § 1, Zusatz I), und weil eine genauere Betrachtung gerade dieser Beweismethode schliesslich noch zu einer weiteren Herabminderung derselben führen wird (§ 5). Auf der anderen Seite wird freilich durch den vorliegenden Satz gerade das Cauchy'sche Restglied, das bisher im Vergleiche mit dem Lagrange'schen, als der *einfachsten und natürlichsten* Verallgemeinerung des Rolle'schen Satzes, mehr den Charakter einer für gewisse *specielle* Zwecke *vortheilhafteren*, immerhin aber mehr

---

eine weitere Bedingung, durch welche der Function $f(x)$ selbst wiederum Beschränkungen von durchaus uncontrollirbarer Natur auferlegt werden.

Wie nun der *hier* mitgetheilte Satz zeigt, sind die eben erwähnten Bedingungen in Wahrheit völlig *überflüssig:* die betreffenden Eigenschaften sind nur in dem Sinne *nothwendige*, als ihre Existenz stets *verificirt* werden kann, sobald die Gültigkeit der Taylor'schen Formel *feststeht;* hingegen erweisen sie sich als *nicht nothwendige* in dem Sinne, dass es keineswegs erforderlich erscheint, sie ausdrücklich unter die *Voraussetzungen* aufzunehmen, welche die Gültigkeit der Taylor'schen Formel nach sich ziehen.

nebensächlichen und etwas *künstlichen* arithmetischen Construction zu besitzen schien, in ein ganz neues Licht gerückt, sofern, wie bereits in der Einleitung bemerkt, sein Verschwinden für $n = \infty$ geradezu als *kürzeste* Form der *nothwendigen und hinreichenden* Bedingung für die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung erscheinen wird.

Ich lasse nunmehr die beiden angedeuteten Beweise unter (A) und (B) folgen.

(A) Nimmt man zunächst eine positive Grösse r *beliebig wenig* unterhalb R an, so giebt es immer noch (unendlich viele) positive ganze Zahlen m, dergestalt dass auch noch:

$$r + \frac{R}{m} < R. \tag{1}$$

In Folge dessen wird:

$$\lim_{n=\infty} F_{0,n}(h, k) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a + h) \cdot k^n = 0 \tag{2}$$

und zwar *gleichmässig* für alle (h, k) des Gebietes:

$$0 \leqq h \leqq h + k \leqq r + \frac{R}{m}.$$

Hiernach hat man insbesondere:

$$\lim \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot \left(r + \frac{R}{m}\right)^n = 0, \tag{3}$$

$$\lim \frac{1}{n!} f^{(n)}(a + h) \left(\frac{R}{m}\right)^n = 0 \quad \text{und zwar } \textit{gleichmässig} \text{ für: } 0 \leqq h \leqq r. \tag{4}$$

Da nun unter den über die Differenzirbarkeit von $f(x)$ gemachten Voraussetzungen mit Benützung der Lagrange'schen Restform sich ergiebt:

$$f(a + h) = \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot h^\nu + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\varepsilon + \vartheta h) \cdot h^n \quad (0 < \vartheta < 1) \tag{5}$$

und andererseits aus Gl. (4) folgt:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(a + \vartheta \cdot \frac{R}{m}\right) \cdot \left(\frac{R}{m}\right)^n = 0 \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1) \tag{6}$$

(da selbstverständlich m eine verhältnissmässig grosse Zahl, jedenfalls aber > 2 ist), so kann man zunächst aus Gl. (5) und (6) schliessen, dass:

$$f(a + h) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot h^\nu = S(a, h) \tag{7}$$

für $0 \leqq h \leqq \frac{R}{m}$ und daher *a fortiori* für $0 \leqq h \leqq \frac{r}{m}$. Da hiernach $h = \frac{r}{m}$ noch *im Innern* des Geltungsbereiches der Gleichung (7) und

somit auch des Convergenzbereiches der Reihe $S(a, h)$ liegt, so hat man nicht nur:

$$(8) \qquad f\left(a+\frac{r}{m}\right)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\,\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)\cdot\left(\frac{r}{m}\right)^{\nu}$$

sondern auch mit Hülfe gliedweiser Differentiation:

$$(9) \qquad f^{(\lambda)}\left(a+\frac{r}{m}\right)=\sum_{\lambda}^{\infty}{}_{\nu}\,\frac{1}{(\nu-\lambda)!}f^{(\nu)}(a)\cdot\left(\frac{r}{m}\right)^{\nu-\lambda}.$$

Um nun den Geltungsbereich der Gleichung (7) zu erweitern, hat man, von der Stelle $a+\frac{r}{m}$ ausgehend, nach Analogie von Gl. (5):

$$(10) \qquad f\left(a+\frac{r}{m}+k\right)$$
$$=\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\,\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}\left(a+\frac{r}{m}\right)\cdot k^{\nu}+\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(a+\frac{r}{m}+\vartheta k\right)\cdot k^{n}$$

und man erkennt wiederum mit Hülfe von Gl. (4), dass das Restglied (unter der selbstverständlichen Voraussetzung, dass auch $m>3$) sicher verschwindet für $k\leqq\frac{R}{m}$. Folglich wird:

$$(11) \quad f\left(a+\frac{r}{m}+k\right)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\,\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}\left(a+\frac{r}{m}\right)\cdot k^{\nu}=S\left(a+\frac{r}{m},\,k\right)$$

für: $0\leqq k\leqq\frac{R}{m}$.

Nun ist aber andererseits:

$$S\left(a,\,\frac{r}{m}+k\right)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\,\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)\cdot\left(\frac{r}{m}+k\right)^{\nu}$$

und diese in Folge der Bedingung (3) für $k\leqq\frac{R}{m}$ sicher noch absolut convergirende Reihe darf auch nach Potenzen von k geordnet werden, sodass sich ergiebt:

$$S\left(a,\,\frac{r}{m}+k\right)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\left\{\sum_{\lambda}^{\infty}{}_{\nu}\,\frac{1}{(\nu-\lambda)!}f^{(\nu)}(a)\cdot\left(\frac{r}{m}\right)^{\nu-\lambda}\right\}\cdot\frac{k^{\lambda}}{\lambda!}$$
$$=\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\,\frac{1}{\lambda!}f^{(\lambda)}\left(a+\frac{r}{m}\right)\cdot k^{\lambda}\qquad\text{(nach Gl. (8) und (9))}$$
$$=S\left(a+\frac{r}{m},\,k\right)\qquad\left(0\leqq k\leqq\frac{R}{m}\right).$$

Mit Benützung dieses Resultates geht jetzt Gl. (11) in die folgende über:

$$(12) \qquad f\left(a+\frac{r}{m}+k\right)=S\left(a,\,\frac{r}{m}+k\right)\quad\text{für: }0\leqq k\leqq\frac{R}{m}$$

oder auch, wenn man: $\frac{r}{m}+k=h$ setzt:

$$f(a+h)=S(a,h) \quad \text{für:} \quad \frac{r}{m}\leqq h\leqq \frac{r}{m}+\frac{R}{m},$$

sodass also in Verbindung mit dem bereits oben in Gl. (7) dargestellten Resultate die Gültigkeit dieser Beziehung nunmehr erwiesen ist für das Gebiet: $0\leqq h\leqq \frac{r}{m}+\frac{R}{m}$ und somit *a fortiori* für: $0\leqq h\leqq \frac{2r}{m}$, wobei wiederum der Werth $h=\frac{2r}{m}$ noch *im Innern* des betreffenden Gültigkeits- bezw. Convergenzbereiches liegt. Man kann daher in derselben Weise die wiederum zunächst sich ergebende Beziehung:

$$f\left(a+\tfrac{2r}{m}+k\right)=S\left(a+\tfrac{2r}{m},\,k\right) \quad \text{für:} \quad 0\leqq k\leqq \frac{R}{m}$$

mit Hülfe von:

$$S\left(a,\,\tfrac{2r}{m}+k\right)=\sum_0^\infty{}_\nu \tfrac{1}{\nu!}\,f^{(\nu)}(a)\cdot\left(\tfrac{2r}{m}+k\right)^\nu=S\left(a+\tfrac{2r}{m},\,k\right)$$

überführen in die folgende:

$$f\left(a+\tfrac{2r}{m}+k\right)=S\left(a,\,\tfrac{2r}{m}+k\right) \quad \text{für:} \quad 0\leqq k\leqq \frac{R}{m},$$

sodass also Gl. (7) nunmehr gelten würde für: $0\leqq h\leqq \frac{2r}{m}+\frac{R}{m}$ und *a fortiori* für: $0\leqq h\leqq \frac{3r}{m}$. Durch $(m-1)$-malige Anwendung dieses Erweiterungsverfahrens (wobei das *letzte* Mal k nur $\leqq \frac{r}{m}$ zu nehmen ist, was aber auch für das Endergebniss vollständig ausreicht) gelangt man also dazu, die Gültigkeit der Gl. (7) für: $0\leqq h\leqq r$ d. h. schliesslich für jeden der Bedingung $0\leqq h<R$ genügenden Werth h zu erweisen. —

(B) Sei jetzt:

$$(13)\qquad \lim_{n=\infty} F_{-1,n}(h,k)=\lim_{n=\infty}\frac{1}{(n-1)!}\,f^{(n)}(a+h)\cdot k^{n-1}=0$$

und zwar *gleichmässig* für: $0\leqq h\leqq h+k\leqq r$ (wo: $r<R$).

Schreibt man hier: ϑh statt h, $(1-\vartheta)h$ statt k, so wird die auf diese Weise daraus hervorgehende Beziehung:

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{1}{(n-1)!}\,f^{(n)}(a+\vartheta h)\cdot(1-\vartheta)^{n-1}\cdot h^{n-1}=0$$

sicher befriedigt werden, falls $0\leqq\vartheta\leqq 1$ und $0\leqq h\leqq r$.

Nun ergiebt sich aber mit Benützung der Cauchy'schen Restform für jedes $h\leqq r<R$:

$$(15)\quad f(a+h)=\sum_0^{n-1}{}_\nu \tfrac{1}{\nu!}\,f^{(\nu)}(a)\cdot h^\nu+\frac{1}{(n-1)!}\,f^{(n)}(a+\vartheta h)\cdot(1-\vartheta)^{n-1}\cdot h^n,$$

sodass also, da das Restglied in Gl. (15) lediglich den Factor h einmal öfter enthält als der Ausdruck in Gl. (14):

$$(16) \qquad f(a+h) = \sum_0^\infty{}' \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot h^\nu$$

wird für: $0 \leqq h \leqq r < R$. —

Zusatz. Der vorstehende Satz gilt offenbar in ganz analoger Weise für ein *links* von der Stelle a gelegenes Intervall: $a \geqq x > a - R$ bezw. $0 \geqq h > -R$.

§ 4.

Das Cauchy'sche Restglied. — Andere Form des Hauptsatzes.

Mit Rücksicht auf den unter (B) gegebenen Beweis kann man offenbar den Satz des § 3 auch folgendermassen aussprechen:

„Damit die eindeutige Function $f(a+h)$ für $0 \leqq h < R$ dargestellt werde durch die Gleichung:

$$f(a+h) = \sum_0^\infty{}' \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot h^\nu,$$

ist ausser der Endlichkeit und unbeschränkten Differenzirbarkeit (in dem oben näher angegebenen Sinne) nothwendig und hinreichend, dass das Cauchy'sche Restglied, nämlich:

$$R_n(a,h) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\vartheta h) \cdot (1-\vartheta)^{n-1} \cdot h^n$$

für jeden einzelnen den Bedingungen $0 \leqq h < R$ genügenden Werth h und alle dem Gebiete $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehörigen Werthe ϑ bei unendlich wachsendem n gleichmässig verschwinde.

Wegen der erhöhten Bedeutung, welche hierdurch gerade die Cauchy'sche Form des Restgliedes gewinnt, möge hier noch ausdrücklich auf die überaus einfache Grundlage hingewiesen werden, welche zu deren Herleitung ausreicht. Man bedarf nämlich hierzu lediglich des Rolle'schen Satzes in seiner *einfachsten*, sozusagen ganz direct aus der blossen *Definition* des Differentialquotienten hervorgehenden Form, welche folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Besitzt die für $x = a$ nach rechts, für $x = b$ nach links stetige, für $a \leqq x \leqq b$ eindeutige Function $\varphi(x)$ im Innern dieses Intervalles (also für: $a < x < b$) einen endlichen vollständigen Differentialquotienten $\varphi'(x)$ und ist:

$$\varphi(a) = \varphi(b),$$

so verschwindet $\varphi'(x)$ für einen gewissen Mittelwerth zwischen a und b, sodass also:

$$\varphi'\big(a+\vartheta(b-a)\big)=0$$

für einen gewissen positiven ächten Bruch ϑ. —

Angenommen nun die für das Intervall $a \leqq x < a+R$ eindeutige Function $f(x)$ besitze für $x=a$ rechtsseitige, für $a<x<a+R$ vollständige endliche Differentialquotienten bis zur n^{ten} Ordnung einschliesslich, so nehme man zwischen a und $a+R$ einen Werth b beliebig an und setze:

$$\varphi(x)=(x-a)\cdot f(b)+(b-x)\cdot\sum_0^{n-1}{}_\nu\,\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)\cdot(b-a)^\nu$$

$$-(b-a)\cdot\sum_0^{n-1}{}_\nu\,\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(x)\cdot(b-x)^\nu.$$

Alsdann hat man:

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0$$

und:

$$\varphi'(x)=f(b)-\sum_0^{n-1}{}_\nu\,\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)\cdot(b-a)^\nu-\frac{1}{(n-1)!}(b-a)f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}.$$

Da somit $\varphi(x)$ den Bedingungen des vorigen Satzes genügt (NB. die Rechtsstetigkeit für $x=a$ und die Linksstetigkeit für $x=b$ folgt aus der Existenz der betreffenden Differentialquotienten), so folgt, dass für einen gewissen ächten Bruch ϑ:

$$\varphi'\big(a+\vartheta(b-a)\big)=0$$

sein muss, d. h. es ist:

$$f(b)=\sum_0^{n-1}{}_\nu\,\frac{1}{\nu!}\cdot f^{(\nu)}(a)\cdot(b-a)^\nu$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}\big(a+\vartheta(b-a)\big)\cdot(1-\vartheta)^{n-1}\cdot(b-a)^n$$

oder, wenn man $b=a+h$ (wo $0\leqq h<R$) setzt:

$$f(a+h)=\sum_0^{n-1}{}_\nu\,\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)\cdot h^\nu+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\vartheta h)\cdot(1-\vartheta)^{n-1}\cdot h^n.$$

§ 5.

Das Lagrange'sche Restglied. — Weitere Umformung des Hauptsatzes.

Das bezüglich des Cauchy'schen Restgliedes gewonnene Ergebniss legt die Frage nahe, ob nicht das gleichmässige Verschwinden des Lagrange'schen Restgliedes:

(1) $$R_n(a,h) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\vartheta h) \cdot h^n \quad (0 \leqq h < R)$$

für *jeden* dem Gebiete $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ zugehörigen Werth am Ende gleichfalls als eine *nothwendige* Bedingung für die Gültigkeit der Gleichung:

(2) $$f(a+h) = \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot h^\nu \quad (0 \leqq h < R)$$

sich erweist.

Diese Frage ist indessen zu *verneinen*, wie man durch folgende Ueberlegung erkennt. Angenommen es sei $h = R$ die *wahre Convergenzgrenze* der Reihe (2), und es bestehe andererseits die Beziehung:

(3) $$\lim_{n=\infty} R_n(a,h) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\vartheta h) \cdot h^n = 0, \quad \text{für} \begin{cases} 0 \leqq h < R \\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1 \end{cases}$$

so nehme man zwei positive Grössen ϱ und r so an, dass:

$$\varrho \leqq r < R$$

und setze in Gl. (3):

$$h = r, \qquad \vartheta = \frac{\varrho}{r}.$$

Alsdann wird:

(4) $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\varrho) \cdot r^n = 0$$

und daraus würde folgen, dass die Reihe:

(5) $$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a+\varrho) \cdot k^\nu$$

für jedes positive $k < r$, also schliesslich auch für jedes positive $k < R$ convergiren muss, d. h. dass das rechtsseitige Convergenzintervall (der Convergenzradius) *aller* aus der Potenzreihe (2) durch Substitution von $h = \varrho + k$ und Entwickelung nach Potenzen von k *ableitbaren* Reihen mindestens die Grösse R hat. Da aber auch ϱ nur an die Bedingung $\varrho \leqq r$, d. h. schliesslich nur $\varrho < R$, geknüpft ist, so wäre das nur dann möglich, wenn $f(x)$ weder im Punkte $x = a + R$, noch auch, bei analytischer Fortsetzung, innerhalb der ganzen bis zum Punkte $x = a + 2R$ reichenden Strecke einen *singulären* Punkt hat. Ist insbesondere die Stelle $x = a + R$ bezw. $h = R$ nicht bloss *Convergenzgrenze* der Reihe (2), sondern auch ein *singulärer Punkt* für $f(a+h)$ — was z. B. stets der Fall ist, wenn die Coefficienten $f^{(\nu)}(a)$ von irgend einer Stelle ν ab gleiches Vorzeichen besitzen und die Reihe

$$\sum \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot h^\nu$$

oder auch eine der durch gliedweise Differentiation daraus hervorgehen-

den Reihen (und damit jede folgende) für $h = R$ schon *divergirt**) — so kann das rechtsseitige Convergenzintervall *keiner* aus der Reihe (2) *ableitbaren* Reihe von der Form (5) über die Stelle $a + R$ hinausragen, d. h. jede solche Reihe convergirt *höchstens* für:

$$k \leqq R - \varrho,$$

dagegen *sicher* für:

$$k < R - \varrho,$$

sodass also in diesem Falle der Ausdruck:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\varrho) \,.\, k^n$$

für *kein* $k > R - \varrho$, dagegen sicher für jedes positive $k < R - \varrho$ verschwindet. Da hiernach:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\vartheta h) \,.\, h^n$$

auch in diesem offenbar *ungünstigsten* und damit in *jedem* Falle für $0 \leqq h < \frac{R}{2}$ verschwinden muss, so lässt sich über die Tragweite der Lagrange'sche Restform folgendes aussagen:

Für die Gültigkeit der Beziehung:

$$f(a+h) = \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \,.\, h^\nu \quad (0 \leqq h < R)$$

ist neben der Endlichkeit und unbeschränkten Differenzirbarkeit von $f(x)$ im Intervalle $a \leqq x < a + R$ stets nothwendig, dass für jeden einzelnen Werth h des Intervalles $0 \leqq h < \frac{R}{2}$ das Lagrange'sche Restglied:

$$R_n(a, h) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\vartheta h) \,.\, h^n$$

mit $n = \infty$ gleichmässig verschwinde für alle Werthe ϑ des Intervalles $0 \leqq \vartheta \leqq 1$; dagegen nicht nothwendig, jedoch hinreichend, dass dies auch der Fall sei für: $\frac{R}{2} \leqq h < R$.

---

*) Daraus würde nämlich in Folge der Stetigkeitseigenschaften einer Potenzreihe geschlossen werden können, dass $f(a+h)$ bezw. alle Ableitungen $f^{(n)}(a+h)$ von einer bestimmten ab bei Annäherung von h an die Stelle R über alle Grenzen wachsen. — Uebrigens kann man die Voraussetzung der *Divergenz* von

$$\sum \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \,.\, R^\nu \quad \text{bezw.} \quad \sum \frac{1}{(\nu-\lambda)!} f^{(\nu)}(a) \,.\, R^{\nu-\lambda}$$

auch fallen lassen: wenn nur die Coefficienten $f^{(\nu)}(a)$ von irgend einer Stelle ab gleiches Vorzeichen besitzen, so ist die *Convergenzgrenze* $h = R$ auch stets ein *singulärer* Punkt, wie die Theorie der Functionen einer complexen Variablen ergiebt. Vgl. den vorhergehenden Aufsatz § 1.

Im übrigen giebt der in § 3 unter (A) mitgetheilte, auf die Benützung der Lagrange'schen Restform gegründete Beweis noch zu folgender Bemerkung Veranlassung. Die dabei als Ausgangspunkt dienende Bedingung (2):

$$\lim \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(a+h) \,.\, k^n = 0 \quad \text{für:} \quad 0 \leqq h \leqq h+k \leqq r + \frac{R}{m}$$

wird im Verlaufe dieses Beweises gar nicht vollständig in Anspruch genommen, vielmehr werden nur zwei daraus hervorgehende — a. a. O. mit (3) und (4) bezeichnete — speciellere Bedingungen benützt, nämlich:

$$\lim \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot \left(r + \frac{R}{m}\right)^n = 0, \quad \left(r + \frac{R}{m} < R\right)$$

$$\lim \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(a+h) \cdot \left(\frac{R}{m}\right)^n = 0 \quad (\textit{gleichmässig} \text{ für: } 0 \leqq h \leqq r).$$

Es kommt also die *Gleichmässigkeit* des Verschwindens von $\lim F_n(h,k)$ hier lediglich für *veränderliches* h in Betracht, sodass man sich beim Beweise für die *Nothwendigkeit* der betreffenden Bedingung der im *Zusatz I* des § 1 angegebenen, nicht unerheblichen Vereinfachung bedienen kann. Dies scheint mir namentlich vom didaktischen Standpunkte aus werthvoll, weil auf diese Weise jedes Eingehen auf die immerhin nicht ganz einfachen Begriffe der *gleichmässigen Stetigkeit und Convergenz* für Functionen *zweier* Variablen gänzlich vermieden werden kann.

Im übrigen ist die *erste* der obigen zwei Bedingungen gleichwerthig damit, dass die Reihe:

$$\sum \tfrac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \,.\, h^\nu$$

für *jedes* positive $h < R$ *convergirt*, während die *zweite* (in Folge der Bedeutung von m als einer *beliebig gross* zu denkenden positiven Zahl) nur erheischt, dass:

$$\lim \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(a+h) \cdot \varrho^n = 0$$

werde für einen *beliebig kleinen* positiven Werth ϱ und zwar *gleichmässig* für $0 \leqq h \leqq r$. Hiernach lässt sich der Satz des § 3 schliesslich auch in folgender Form aussprechen:

Für die Gültigkeit der Beziehung:

$$f(a+h) = \sum_0^\infty \tfrac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) h^\nu \quad \textit{für:} \quad 0 \leqq h < R$$

ist, neben der Endlichkeit und unbeschränkten Differenzirbarkeit der eindeutigen Function $f(x)$ *im Intervalle*

$$a \leqq x < a + R,$$

nothwendig und hinreichend, dass die Reihe für $h < R$

convergirt, und dass nach Annahme von $r < R$ *und* $\varrho < R - r$*:*

$$lim \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \cdot \varrho^n = 0$$

wird, und zwar gleichmässig für:

$$a \leqq x \leqq a + r.^*)$$

Mit anderen Worten: wenn nur die früher durch die Gleichung:

$$\lim \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+h) \cdot k^n = 0 \quad \text{für:} \quad 0 \leqq h \leqq h + k \leqq r$$

dargestellte Bedingung für den *Anfangspunkt* $h = 0$ erfüllt ist, so genügt es, wenn sie für die *Zwischenwerthe* $0 \leqq h \leqq r$ bei einem *beliebig klein* anzunehmenden Werthe $k = \varrho$ besteht.

Während also die Anwendung des Cauchy'schen Restgliedes die *kürzeste Form* der für die Taylor'sche Formel *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen ergab, so lehrt die vorstehende Betrachtung, dass schon ein etwas *geringeres Maass* der als *nothwendig* erkannten Bedingungen sich auch als *hinreichend* erweist. —

§ 6.

Rückblick.

Fasst man die vorstehenden Ergebnisse mit denjenigen zusammen, welche ich in einem früher publicirten Aufsatze**) *„Zur Theorie der Taylor'schen Reihe etc."* mitgetheilt habe, so lässt sich der Zusammenhang derjenigen Eigenschaften, welche für die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe als nothwendig und hinreichend sich erwiesen haben, in folgender Weise überblicken:

1) Soll die eindeutige Function $f(x)$ für alle x des Intervalles $a \leqq x < a + R$ darstellbar sein durch die Gleichung:

$$(I) \qquad f(x) = \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a) \cdot (x-a)^\nu$$

---

*) Man darf diese Bedingung nicht etwa so fassen: es muss für jedes x innerhalb des Intervalles $(a, a+R)$ eine (mit x veränderliche) angebbare positive Grösse ϱ_x existiren, derart, dass:

$$\lim \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \cdot \varrho_x^n = 0$$

wird. Denn hiermit wäre nicht ausgeschlossen, dass innerhalb des Intervalles $(a, a+R)$ Stellen x' existiren könnten, in deren Umgebung die *untere Grenze* für ϱ_x den Werth 0 hat (was nur in der Nachbarschaft der Endstelle $a+R$ zulässig ist). Dass dieser Fall, in welchen offenbar x' ein *singulärer* Punkt für $f(0)$ sein muss, wirklich eintreten kann, habe ich bei früherer Gelegenheit gezeigt: Math. Ann. Bd. 42, p. 181. Fussnote.

**) Math. Ann. Bd. 42, p. 153 ff.

so erscheint es zweifellos als *nothwendig*, dass $f(x)$ für alle Werthe x des fraglichen Intervalles endlich und unbeschränkt differenzirbar ist.

2) Diese von Lagrange schon für *hinreichend* gehaltenen Bedingungen sind es in Wahrheit nicht. Denn, auch wenn sie erfüllt sind, so braucht die Reihe (I) für kein noch so kleines $(x - a)$ zu *convergiren*, wie das Beispiel

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{1+\alpha^\nu x} \quad (\alpha > 1)$$

in der Umgebung der Stelle $x = 0$ zeigt.*) Es muss also noch *die* Bedingung hinzukommen, dass die Reihe (I) für jedes positive

$$(x - a) = r < R$$

convergire, eine Bedingung, die auch völlig gleichwerthig ist mit der folgenden:

(II) $\lim \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot r^n = 0$ für jedes positive $r < R$,

d. h. es genügt nicht, dass $f^{(n)}(a)$ für jedes *endliche* n selbst *endlich* ist, sondern es darf $f^{(n)}(a)$ *mit unendlich wachsendem* n *höchstens in dem Maasse ins Unendliche wachsen*, wie es Gl. (II) zulässt.

3) Ist auch diese Bedingung erfüllt, so braucht die Summe der Reihe (I) doch noch keineswegs den Werth $f(x)$ zu haben, wie wiederum das dem oben angeführten ähnliche Beispiel:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{1+\alpha^\nu x} \quad (\alpha > 1)$$

in der Umgebung der Stelle $x = 0$ zeigt**). Es muss (s. § 5) nach Annahme von $r < R$ und $\varrho < R - r$:

(III) $$\lim \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \cdot \varrho^n = 0$$

werden und zwar *gleichmässig* für alle Werthe x des Intervalles $a \leqq x \leqq a + r$. Obschon diese Bedingung mit den vorangehenden zusammen nach § 5 nunmehr für die Gültigkeit der Gleichung (I) *ausreicht*, so erscheint es vielleicht etwas übersichtlicher, sie im Anschlusse an die im § 3 gegebene Formulirung durch die folgende zwar etwas *stärkere*, nichtsdestoweniger gleichfalls als *nothwendig* erkannte (s. § 1) zu ersetzen:

(IV) $\lim \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \cdot (a + r - x)^n = 0$ und zwar *gleichmässig* für:

$$a \leqq x \leqq a + r < a + R,$$

da dieselbe die Bedingung (II) gleich mit umfasst.

---

*) a. a. O. p. 159.

**) a. a. O. p. 161.

Hiernach ergiebt sich:

Das charakteristische Merkmal, welches die in Potenzreihen entwickelbaren Functionen von den bloss unbeschränkt differenzirbaren auszeichnet, besteht lediglich in gewissen, durch die Gleichungen (II) und (III) bezw. (IV) genau präcisirten Beschränkungen bezüglich des Unendlichwerdens von $f^{(n)}(x)$ für unendlich wachsendes n.

Anhang.

Der von Hrn. Weierstrass a. a. O. mitgetheilte Beweis des im § 1 citirten Satzes, dass *eine Reihe, welche in der Umgebung jeder Stelle im Innern oder auf der Grenze eines gegebenen Bereiches gleichmässig convergirt, in dem ganzen Bereiche gleichmässig convergirt*, ist völlig analog demjenigen, welchen Herr Lüroth*) für die *gleichmässige Stetigkeit* einer Function zweier Variablen gegeben hat, und der sich übrigens auch ohne Weiteres auf Functionen beliebig vieler Variablen übertragen lässt. Beide Beweise beruhen auf dem Umstande, dass die jedem Punkte (x, y) zuzuordnende *„Umgebung"* eine obere Grenze $\varrho(x, y)$ besitzt, welche eine *stetige* Function von (x, y) ist und somit nach einem bekannten Fundamentalsatze des Herrn Weierstrass mindestens für *eine* bestimmte Stelle (x', y') ein *Minimum* werden muss: letzteres muss in Folge der Voraussetzung angebbar von Null verschieden sein, woraus dann die Richtigkeit der fraglichen Behauptungen sich leicht ergiebt.

Man kann indessen den vorliegenden Satz auch beweisen, ohne von jenem Fundamentalsatze des Herrn Weierstrass Gebrauch zu machen, in ganz analoger Weise, wie Heine**) den Satz von der gleichmässigen Stetigkeit zunächst für Functionen *einer* reellen Variablen bewiesen und Herr Thomae***) diesen Beweis auf Functionen *zweier* Variablen übertragen hat.

Angenommen es sei $\sum f_\lambda(x, y)$ gleichmässig convergent in der Nähe jeder Stelle (x, y), die im Inneren oder auf der Grenze eines gewissen Bereiches (A) liegt. Bedeutet dann (x_0, y_0) irgend eine Stelle dieses Bereiches und setzt man:

$$(1) \qquad \left| \sum_{\nu}^{\infty} f_\lambda(x, y) \right| = T_\nu(x, y),$$

*) Math. Ann. Bd. VI, p. 319.

**) Crelle's Journal, Bd. 74, p. 188.

***) Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen p. 29 ff.

so giebt es nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Zahl n_0 und einen Radius ϱ_0, derart dass

$$T_\nu(x, y) < \varepsilon \tag{2}$$

wird für $\nu \geqq n_0$ und alle Stellen (x, y), welche im Innern oder auf der Peripherie eines um (x_0, y_0) mit dem Radius ϱ_0 beschriebenen Kreises liegen*). Nimmt man jetzt auf der Peripherie dieses Kreises, der kurzweg als der Kreis oder die Umgebung (ϱ_0) bezeichnet werden möge, eine Stelle (x_1, y_1) beliebig an (mit der einzigen Beschränkung, dass (x_1, y_1) nicht gerade eine Stelle der Gesammtbegrenzung sein soll), so existirt ein Kreis (ϱ_1) und eine Zahl n_1, derart dass Ungl. (2) erfüllt ist für alle Stellen im Innern und auf der Peripherie von (ϱ_1), sobald $\nu \geqq n_1$. Bedeutet also n die *grössere* der beiden Zahlen n_0 und n_1, so gilt Ungl. (2) für alle Stellen des aus den beiden Kreisen (ϱ_0) und (ϱ_1) (einschl. der Begrenzung) zusammengesetzten Bereiches (B), sobald $\nu \geqq n$. Es ist klar, dass man durch Fortsetzung dieses Verfahrens den Geltungsbereich (B) der Ungl. (2) mit Festlegung einer bestimmten Zahl n als unterer Grenze für ν beständig vergrössern kann, und es kommt also lediglich darauf an zu zeigen, dass man auf diese Weise stets nach einer *endlichen* Anzahl derartiger Operationen dazu gelangen kann, denselben auf den vorgelegten Bereich (A) auszudehnen. Hierzu genügt offenbar der Nachweis, dass man *jede* beliebige Stelle von (A) nebst einer gewissen endlichen Umgebung durch eine endliche Anzahl der angegebenen Operationen dem Bereiche (B) einverleiben kann. Wäre dies nun *nicht* der Fall, so müssten die Radien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_k, \ldots$ mit wachsendem k unter jede Grenze herabsinken, sobald man sich bei dem angedeuteten Verfahren einer oder mehreren bestimmten Stellen (x', y') von (A) nähert. Dies ist aber unmöglich: da nämlich jeder solchen Stelle (x', y') in Folge der Voraussetzung eine bestimmte Umgebung (ϱ') in dem angegebenen Sinne zugeordnet werden kann, so gehört zu jeder Stelle (x_k, y_k), die um weniger als $\frac{1}{2}\varrho'$ von (x', y') entfernt ist, eine Umgebung (ϱ_k), deren Radius ϱ_k sicher $> \frac{1}{2}\varrho'$ ist, sodass also ϱ_k stets oberhalb einer endlichen Grenze bleibt. Hiermit ist aber der ausgesprochene Satz bewiesen.**)

Schliesslich möchte ich zu dem in § 1 gegebenen Beweise für die gleichmässige Convergenz der Reihe $\sum \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(a + h) \cdot k^\nu$ noch folgendes bemerken. Derselbe beruht offenbar darauf, dass hier aus

*) Liegt (x_0, y_0) auf der Begrenzung von (A) oder in hinlänglicher Nähe derselben, so kommt als „Umgebung" von (x_0, y_0) nur derjenige Theil des Kreises in Betracht, welcher in das Innere und auf die Begrenzung von (A) fällt.

**) Beide Beweise des betreffenden Satzes lassen sich offenbar ohne Weiteres auch auf Reihen übertragen, deren Glieder Functionen beliebig vieler Variablen sind.

der *Stetigkeit* der Reihensumme die gleichmässige Convergenz der Reihe gefolgert werden kann, was doch bekanntlich im Allgemeinen *nicht* der Fall ist (man betrachte z. B. die Reihe:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left\{ \frac{\nu x}{1+\nu^2 x^2} - \frac{(\nu+1)x}{1+(\nu+1)^2 x^2} \right\} = \frac{x}{1+x^2},$$

welche bei reell veränderlichem x auch in der Nähe von $x = 0$ *stetig* ist, aber wegen:

$$R_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

dort *ungleichmässig* convergirt). Hingegen kann man offenbar mit Anwendung des in § 1 benützten Verfahrens zu folgendem Satze gelangen:

Ist für das Innere und die Grenze eines Bereiches (A) *die Reihe* $\sum f_\nu$, *deren Glieder daselbst stetige Functionen beliebig vieler Variablen sind, absolut convergent und ist* $F = \sum |f_\nu|$ *für jenen Bereich* (A) *eine stetige Function der betreffenden Variablen, so convergirt* $\sum |f_\nu|$ *und also auch* $\sum f_\nu$ *für den Bereich* (A) *gleichmässig.*

August und December 1893.

Ueber Riemann's Convergenzcriterium.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In seiner Abhandlung „Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihe" hat Riemann*) ein Convergenzcriterum aufgestellt, welches wegen seiner ausgedehnten und leichten Anwendbarkeit (namentlich auf mehrfache Reihen) Beachtung verdient. Da der von Riemann gegebene Beweis des Criteriums, bei welchem sich dasselbe als eine Umformung eines andern von Cauchy herrührenden darstellt, für die Auffassung nicht ganz leicht ist, so habe ich einen directeren und durchsichtigeren Beweis aufgesucht, den ich in den folgenden Zeilen kurz darlegen will.

Das Criterium selber lässt sich so aussprechen:

Es sei b eine endliche Grösse, x eine Variable, die nur die Werthe, welche gleich oder grösser als b sind, annehmen soll. Sind nun $f(x)$ und $g(x)$ zwei Functionen, die beständig positiv sind und von denen die erste mit wachsendem x abnimmt, die zweite (bis ins Unendliche) zunimmt, und ist die Anzahl der Glieder einer Reihe mit positiven Gliedern, die gleich oder grösser als $f(x)$ sind, gleich oder kleiner als $g(x)$, so convergirt die Reihe, wenn das Integral $\int_b^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$ convergirt.

Ich zeige zunächst, dass sich die Glieder der Reihe, die ich mit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bezeichne, der Grösse nach anordnen lassen, so dass man also die Ungleichungen

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \ldots \ldots \tag{1}$$

voraussetzen darf. Zu dem Ende bezeichne ich mit k irgend eine positive Grösse und wähle den besonderen Werth ξ der Variabeln x so, dass $k \geqq f(\xi)$ ist. Letzteres ist sicher möglich. Denn wäre beständig $k < f(x)$, so würde $\int_b^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$ grösser als $k \cdot \int_b^\infty g'(x)\,dx$, also unendlich sein; gegen die Voraussetzung.

*) Gesammelte mathematische Werke (Leipzig 1892), Seite 482.

Die Glieder der Reihe, die $\geqq k$ sind, sind nun auch $\geqq f(\xi)$. Ihre Anzahl ist daher $\leqq g(\xi)$ und folglich *endlich*. Aus dieser Thatsache, dass nur endlich viele Glieder der Reihe eine beliebig gewählte positive Grösse übersteigen, ergiebt sich nun leicht die Möglichkeit, die Glieder der Grösse nach zu ordnen. Um diese Anordnung zu erhalten, brauchen wir nämlich offenbar nur die Glieder der Reihe, die $\geqq 1$ sind, sodann die Glieder, die < 1, aber $\geqq \frac{1}{2}$, sodann diejenigen, die $< \frac{1}{2}$ aber $\geqq \frac{1}{3}$ sind u. s. f., je nach absteigender Grösse geordnet, aneinander zu reihen.

Wenn die Variable x von b bis ins Unendliche wächst, so durchläuft $g(x)$ nach Voraussetzung das Intervall $g(b)$ bis ∞. Sei m eine ganze Zahl, die grösser als $g(b)$ ist und seien $x_0, x_1, x_2, \ldots$ diejenigen Werthe von x, für welche $g(x)$ die Werthe $m, m+1, m+2, \ldots$ bez. annimmt, so dass

$$g(x_0) = m, \quad g(x_1) = m+1, \quad g(x_2) = m+2, \ldots \tag{2}$$

ist. Offenbar befriedigen die Grössen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ die Ungleichungen

$$b < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots. \tag{3}$$

Nach Voraussetzung ist nun die Anzahl der Glieder in der Reihe $a_0, a_1, a_2, \ldots$, die gleich oder grösser als $f(x_n)$ sind, nicht grösser als $g(x_n) = m+n$. Daher ist sicher $a_{m+n} < f(x_n)$. Denn wäre $a_{m+n} \geqq f(x_n)$, so würden die $m+n+1$ Glieder $a_0, a_1, \ldots, a_{m+n}$ gleich oder grösser als $f(x_n)$ sein. Es bestehen also die Ungleichungen

$$a_m < f(x_0), \quad a_{m+1} < f(x_1), \quad a_{m+2} < f(x_2), \ldots, \tag{4}$$

und folglich ist

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+n} < f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n). \tag{5}$$

Nun ist aber ferner, wie leicht zu sehen,

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = f(x_1)\int_{x_0}^{x_1} g'(x)\,dx + f(x_2)\int_{x_1}^{x_2} g'(x)\,dx + \cdots + f(x_n)\int_{x_{n-1}}^{x_n} g'(x)\,dx$$

kleiner als

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)g'(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)g'(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,g'(x)\,dx < \int_{b}^{\infty} f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Daher schliesslich

$$(6)\quad a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+n} < \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, g'(x)\, dx < \int_{b}^{\infty} f(x)\, g'(x)\, dx.$$

Die Summe von beliebig vielen auf a_m folgenden Gliedern der Reihe bleibt also unter der festen endlichen Grösse $\int_{b}^{\infty} f(x)\, g'(x)\, dx$; die Reihe ist folglich convergent, w. z. b. w. Dem hiermit bewiesenen Convergenzcriterium stellt sich das folgende Divergenzcriterium zur Seite:

Es sei b eine endliche Grösse, x eine Variable, die nur die Werthe, welche gleich oder grösser als b sind, annehmen soll. Sind nun $f(x)$ und $g(x)$ zwei Functionen, die beständig positiv sind und von denen die erste mit wachsendem x abnimmt, die zweite (bis ins Unendliche) zunimmt, und ist die Anzahl der Glieder einer Reihe mit positiven Gliedern, die gleich oder grösser als $f(x)$ sind, gleich oder grösser als $g(x)$, so divergirt die Reihe, wenn das Integral $\int_{b}^{\infty} f(x)\, g'(x)\, dx$ divergirt.

Der Beweis hierfür ist in ganz ähnlicher Weise zu führen, wie der Beweis für das Convergenzcriterium. Wir bemerken zunächst, dass wir nur den Fall zu betrachten brauchen, wo jede beliebig angenommene positive Zahl k nur von einer endlichen Anzahl von Gliedern der Reihe übertroffen wird, wo folglich die Glieder $a_0, a_1, a_2, \ldots$ der Reihe nach absteigender Grösse geordnet werden können. Denn für den Fall, dass unendlich viele Glieder der Reihe eine positive Zahl k überschreiten, leuchtet die Divergenz der Reihe unmittelbar ein. Wir dürfen also annehmen, dass die Ungleichungen

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \ldots$$

bestehen. Wenn nun, wie oben, m eine ganze Zahl grösser als $g(b)$ bezeichnet, und $x_0, x_1, x_2, \ldots$ diejenigen Werthe von x sind, die den Gleichungen

$$g(x_0) = m, \quad g(x_1) = m + 1, \quad g(x_2) = m + 2, \ldots$$

genügen, so wird allgemein $a_{m+n-1} \geqq f(x_n)$ sein. Denn die Anzahl derjenigen Glieder der Reihe, die $\geqq f(x_n)$ sind, beträgt nach Voraussetzung mindestens $g(x_n) = m + n$. Hiernach ist

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+n-1} \geqq f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$

Nun hat man ferner:

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$
$$= f(x_1)\int_{x_1}^{x_2} g'(x)\, dx + f(x_2)\int_{x_2}^{x_3} g'(x)\, dx + \cdots + f(x_n)\int_{x_n}^{x_{n+1}} g'(x)\, dx,$$

und die rechte Seite ist grösser als

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,g'(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_3} f(x)g'(x)\,dx+\cdots+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,g'(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Es ist also

$$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{m+n-1}>\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Da x_{n+1} mit wachsendem n über alle Grenzen wächst, so wird das auf der rechten Seite stehende Integral und also auch

$$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{m+n-1}$$

mit wachsendem n unendlich. Mit anderen Worten: die Reihe

$$a_0+a_1+a_2+\cdots$$

divergirt, w. z. b. w.

Um eine Anwendung von den entwickelten Criterien zu geben, betrachten wir die p-fach unendliche Reihe

$$\sum_{m_1, m_2, \cdots, m_p} f\big(\varphi(m_1, m_2, \ldots m_p)\big).$$

Die Function $f(x)$ möge von einem bestimmten Werthe $x=b$ an beständig positiv sein und mit wachsendem x abnehmen. Für alle in Betracht kommenden Werthe der Summationsbuchstaben $m_1, m_2, \ldots, m_p$ möge ferner $\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p)\geqq b$ sein und die Anzahl derjenigen Combinationen $m_1, m_2, \ldots m_p$, welche der Bedingung

$$\varphi(m_1, m_2, \ldots. m_p)\leqq x$$

genügen — eine Anzahl, die wir mit $A(x)$ bezeichnen wollen — genüge der Ungleichung

$$g_1(x)\leqq A(x)\leqq g(x),$$

wo $g(x)$ und $g_1(x)$ positive Functionen bezeichnen, die mit wachsendem x beständig und bis ins Unendliche zunehmen. Dann convergirt die p-fach unendliche Reihe, wenn das Integral $\int_b^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$ convergirt, sie divergirt, wenn das Integral $\int_b^\infty f(x)\,g_1'(x)\,dx$ divergirt. Denn die Anzahl der Glieder der Reihe, die $\geqq f(x)$ sind, ist unter den gemachten Voraussetzungen $\leqq g(x)$ und $\geqq g_1(x)$.

Ist insbesondere

$$\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p)=m_1^2+m_2^2+\cdots+m_p^2$$

und wird die Summe über alle diejenigen ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_p$

ausgedehnt, für welche $m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2 \geqq b$ ist, so ist die Anzahl $A(x)$ der Combinationen $m_1, m_2, \ldots m_p$, für welche

$$m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2 \leqq x$$

ist, sicher kleiner als $C \cdot x^{\frac{p}{2}}$, wo C eine geeignet gewählte positive Constante bedeutet. Man erkennt dies sofort, wenn man bemerkt, dass für jede dieser Combinationen

$$|m_1| \leqq \sqrt{x},\ |m_2| \leqq \sqrt{x}, \ldots, |m_p| \leqq \sqrt{x}$$

sein muss. Man kann also $g(x) = C \cdot x^{\frac{p}{2}}$ und ebenso, wie man leicht sieht, $g_1(x) = C' x^{\frac{p}{2}}$ setzen, wo C' ebenfalls eine geeignet gewählte positive Constante bezeichnet. Da diejenigen Combinationen m_1, $m_2, \ldots, m_p$, für welche $m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2 < b$ ist, nur in endlicher Zahl vorhanden sind, so können die ihnen entsprechenden Glieder, sofern sie einen endlichen Werth haben, unbeschadet der Convergenz oder Divergenz der Reihe, in die Reihe aufgenommen werden. Man hat also folgenden Satz:

Wenn die Function $f(x)$ von einem bestimmten Werthe $x = b$ an beständig positiv ist und mit wachsendem x abnimmt, so convergirt oder divergirt die p-fach unendliche Reihe

$$\sum_{m_1, m_2, \cdots, m_p}{}' f(m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2),$$

je nachdem das Integral

$$\int_b^\infty f(x)\, x^{\frac{p}{2} - 1}\, dx$$

convergirt oder divergirt.

Die Summationsbuchstaben m_1, m_2, ..., m_p durchlaufen unabhängig von einander alle ganzen Zahlen von $-\infty$ und $+\infty$, mit Ausschluss derjenigen Combinationen, für welche etwa das entsprechende Glied der Reihe unendlich wird.

Derselbe Satz gilt auch noch, wie man in ganz ähnlicher Weise zeigt, für den Fall, dass an Stelle von $m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2$ eine quadratische Function von $m_1, m_2, \ldots, m_p$ tritt, in welcher die Glieder zweiter Dimension eine definite quadratische Form von nicht verschwindender Determinante bilden. Bemerkenswerthe specielle Fälle erhält man durch die Annahme $f(x) = \frac{1}{x^r}$ und $f(x) = e^{-x}$.

Dem ersten Fall entsprechen die von Eisenstein in seiner Abhandlung „Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind" (Crelle's Journal Bd. 35) betrachteten Reihen, dem zweiten Falle entspricht die p-fach unendliche Thetareihe*).

Zürich, den 21. September 1893.

*) Diese und ähnliche Reihen hat einer meiner Schüler, Herr C. Jaccottet, in einer der eidgenössischen polytechnischen Schule eingereichten Diplomarbeit, nach der obigen Methode untersucht. Eben diese Arbeit des Herrn Jaccottet hat mir den Anlass zu den oben mitgetheilten Entwicklungen geboten.

Verschwindende Determinanten dritten Grades aus ternären linearen Formen.

Von

M. Pasch in Giessen.

Bei linearen Systemen von bilinearen Formen spielt bekanntlich der Fall eine besondere Rolle, wo die Determinanten aller Formen des Systems verschwinden. Die Arbeit „Ueber bilineare Formen und deren geometrische Anwendung“ diese Annalen 1891 Bd. 38 S. 24*) veranlasste mich zu näherer Beschäftigung mit dem linearen Systeme, welches aus drei bilinearen ternären Formen hervorgeht und nur Formen von verschwindender Determinante enthält, also mit der verschwindenden Determinante dritten Grades, deren Elemente lineare Formen von drei Unbestimmten sind. Dieser Fall, sowie eine Anwendung auf das System von drei quadratischen ternären Formen, bilden den Gegenstand der nachfolgenden Seiten.

I.

1. Hülfssatz: Wenn alle Determinanten zweiten Grades aus dem Systeme

$$\begin{matrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'', \end{matrix}$$

dessen Elemente ganze Functionen von irgend welchen Veränderlichen sein sollen, identisch verschwinden, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} a &= A\alpha, & a' &= A\alpha', & a'' &= A\alpha'', \\ b &= B\alpha, & b' &= B\alpha', & b'' &= B\alpha'', \\ c &= C\alpha, & c' &= C\alpha', & c'' &= C\alpha'', \end{aligned}$$

wo $ABC\alpha\alpha'\alpha''$ ganze Functionen sind.

*) Am Schlusse des 38sten Bandes sind einige in dieser Arbeit zu verbessernde Stellen angegeben.

Zum Beweise werde angenommen, dass etwa a nicht identisch verschwindet, und der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen $aa'a''$ mit A bezeichnet. Setzt man $a = A\alpha$, $a' = A\alpha'$, $a'' = A\alpha''$, so wird $\alpha b' = b\alpha'$ und $\alpha b'' = b\alpha''$, b durch α theilbar, ebenso c, u. s. w.

2. Wir wenden uns nunmehr zu der Aufgabe, lineare Formen von $x_1 \mid x_2 \mid x_3$:

$$(1) \qquad \begin{matrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{matrix}$$

so zu bestimmen, dass ihre Determinante verschwindet.

Die Determinante verschwindet zunächst dann, wenn eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht, die von jeder Colonne oder von jeder Zeile erfüllt wird.

Wenn keine solche Gleichung besteht, so verschwinden nicht alle Determinanten zweiten Grades aus dem Systeme (1); denn sonst gäbe es wegen Nr. 1 drei Constanten, die sich wie die Elemente jeder Colonne oder jeder Zeile des Systems (1) verhielten. Aber diese Determinanten bilden dann ein System von quadratischen Formen, aus dem nur verschwindende Determinanten zweiten Grades hervorgehen, das also nach Nr. 1 die Gestalt besitzt:

$$\begin{matrix} LP & MP & NP \\ LQ & MQ & NQ \\ LR & MR & NR; \end{matrix}$$

und zwar können hier die Formen $LMNPQR$ nur linear sein, weil man sonst zu dem vorigen Falle zurückgeriethe. Es besteht daher eine (und nur eine) lineare Gleichung mit linearen Coefficienten, der jede Colonne, und zugleich eine (und nur eine) ebensolche Gleichung, der jede Zeile des Systems (1) genügt.

3. Nehmen wir zuerst an, dass die Formen PQR linear abhängig sind, natürlich nur einfach, so können wir schreiben:

$$P = (x\,A\,\alpha), \quad Q = (x\,A\,\beta), \quad R = (x\,A\,\gamma),$$

wo z. B. $(x\,A\,\alpha)$ die Determinante $\Sigma \pm x_1 A_2 \alpha_3$ bedeutet. Dabei sollen $A_i \alpha_i \beta_i \gamma_i$ für $i = 1, 2, 3$ Constanten sein und die Determinante $(\alpha\beta\gamma)$ nicht verschwinden. Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$(x\beta\gamma) = v_1, \qquad (x\gamma\alpha) = v_2, \qquad (x\alpha\beta) = v_3,$$
$$-\frac{(A\beta\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)} = a_1, \quad -\frac{(A\gamma\alpha)}{(\alpha\beta\gamma)} = a_2, \quad -\frac{(A\alpha\beta)}{(\alpha\beta\gamma)} = a_3,$$

so sind die linearen Formen $v_1\, v_2\, v_3$ linear unabhängig, $a_1\, a_2\, a_3$ nicht gleichzeitig Null, und man hat für beliebige $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$:

$$\xi_\alpha(\alpha\beta\gamma) = v_1 \xi_\alpha + v_2 \xi_\beta + v_3 \xi_\gamma$$

(wo zur Abkürzung z. B. ξ_x für $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$ geschrieben ist), mithin:

$$(\alpha\beta\gamma)(xA\alpha) = v_2(A\alpha\beta) - v_3(A\gamma\alpha),$$

$$P = (av)_1 \text{ d. i. } a_2v_3 - a_3v_2, \quad Q = (av)_2 \text{ d. i. } a_3v_1 - a_1v_3,$$

$$R = (av)_3 \text{ d. i. } a_1v_2 - a_2v_1,$$

$$\begin{vmatrix} p & a_1 & v_1 \\ q & a_2 & v_2 \\ r & a_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann demnach setzen:

$$p = a_1u_1 + b_1v_1, \quad q = a_2u_1 + b_1v_2, \quad r = a_3u_1 + b_1v_3,$$

wo b_1 und u_1 noch zu prüfen sind. Wegen

$$a_2r - a_3q = b_1P, \quad a_3p - a_1r = b_1Q, \quad a_1q - a_2p = b_1R$$

ist b_1 eine Constante, mithin ist u_1 eine lineare Form.

Die Elemente des Systems (1) haben folglich in dem betrachteten Falle die Gestalt:

$$(2) \quad \begin{array}{lll} p = a_1u_1 + b_1v_1, & p' = a_1u_2 + b_2v_1, & p'' = a_1u_3 + b_3v_1, \\ q = a_2u_1 + b_1v_2, & q' = a_2u_2 + b_2v_2, & q'' = a_2u_3 + b_3v_2, \\ r = a_2u_1 + b_1v_3, & r' = a_3u_2 + b_2v_3, & r'' = a_3u_3 + b_3v_3, \end{array}$$

wo $a_1a_2a_3\,b_1b_2b_3$ Constanten und $u_1u_2u_3\,v_1v_2v_3$ lineare Formen sind, und entstehen durch Composition der Systeme:

$$\begin{vmatrix} a_1 & v_1 \\ a_2 & v_2 \\ a_3 & v_3 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} u_1 & b_1 \\ u_2 & b_2 \\ u_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Weder $a_1a_2a_3$ noch $b_1b_2b_3$ verschwinden gleichzeitig. In der Gleichung, der jede Colonne genügt, sind die Coefficienten $(av)_1$, $(av)_2$, $(av)_3$ linear abhängig; ebenso die Coefficienten $(ub)_1$, $(ub)_2$, $(ub)_3$ in der Gleichung, der jede Zeile genügt. Aber weder $(av)_1$, $(av)_2$, $(av)_3$ noch $(ub)_1$, $(ub)_2$, $(ub)_3$ dürfen mehr als einfach linear abhängig sein.

4. Das System (2) kann symmetrisch werden, so dass

$$a_iu_k + b_kv_i = a_ku_i + b_iv_k. \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Da alsdann die $(av)_i$ sich wie die $(ub)_i$ verhalten müssen, so wird, wenn man mit c eine gewisse Constante, mit $ww_1w_2w_3$ gewisse lineare Formen bezeichnet:

$$\Sigma b_i(av)_i = 0, \; b_i = ca_i, \; a_i(u_k - cv_k) = a_k(u_i - cv_i),$$

$$u_i - cv_i = 2a_iw, \; u_i - a_iw = a_iw + cv_i = w_i,$$

$$a_iu_k + b_kv_i = a_i(u_k - a_kw) + a_k(a_iw + cv_i) = a_iw_k + a_kw_i,$$

d. h.: Das System (2) ist im Falle der Symmetrie aus zwei Systemen

$$\begin{vmatrix} a_1 & w_1 \\ a_2 & w_2 \\ a_3 & w_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} w_1 & a_1 \\ w_2 & a_2 \\ w_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

componirt.

5. Wir bilden nun mit weiteren Veränderlichen $y_1\, y_2\, y_3$ die bilinearen Formen

(3) $p y_1 + p' y_2 + p'' y_3$, $q y_1 + q' y_2 + q'' y_3$, $r y_1 + r' y_2 + r'' y_3$

und prüfen, ob es in dem Falle der Nr. 3 möglich ist, dass diese Formen gleichzeitig in xy symmetrisch werden.

Wären die Formen (3) symmetrisch und zugleich von den b_i nur eines von Null verschieden, etwa b_1, so wäre auch symmetrisch:

$$a_i(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) + b_1 y_1 v_i = a_i \delta + b_1 y_1 (v_i + \gamma a_i),$$

wo γ eine beliebige lineare Form der x und δ die bilineare Form

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 - b_1 \gamma y_1$$

bedeuten soll. Da in δ die Coefficienten von $x_2 y_3$ und $x_3 y_2$ übereinstimmen müssten, so könnte man in γ die Coefficienten von x_2 und x_3 so wählen, dass δ in xy symmetrisch wird, mithin auch

$$y_1 (v_i + \gamma a_i),$$

also

$$v_1 + \gamma a_1 = d_1 x_1, \quad v_2 + \gamma a_2 = d_2 x_1, \quad v_3 + \gamma a_3 = d_3 x_1,$$

wo $d_1\, d_2\, d_3$ Constanten sind. Daraus würde aber lineare Abhängigkeit zwischen $v_1\, v_2\, v_3$ folgen, im Widerspruch zu Nr. 3.

Wären die Formen (3) symmetrisch und zugleich mindestens zwei b_i von Null verschieden, so wäre, wenn man mit u_{ik}, v_{ik} die Coefficienten von x_k in u_i, v_i bezeichnet:

$$a_i u_{32} + b_3 v_{i2} = a_i u_{23} + b_2 v_{i3},$$

d. i.:

$$a_i(u_{32} - u_{23}) + b_3 v_{i2} - b_2 v_{i3} = 0,$$

mithin:

$$\begin{vmatrix} a_1 & v_{12} & v_{13} \\ a_2 & v_{22} & v_{23} \\ a_3 & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} = 0$$

und ebenso:

$$\begin{vmatrix} a_1 & v_{13} & v_{11} \\ a_2 & v_{23} & v_{21} \\ a_3 & v_{33} & v_{31} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & v_{11} & v_{12} \\ a_2 & v_{21} & v_{22} \\ a_3 & v_{31} & v_{32} \end{vmatrix} = 0,$$

woraus das Verschwinden der Determinante $\Sigma \pm v_{11} v_{22} v_{33}$, also wieder lineare Abhängigkeit zwischen $v_1\, v_2\, v_3$ folgen würde.

Hiernach können die Formen (3) in dem betrachteten Falle nicht gleichzeitig symmetrisch werden.

6. Wie aus der Schlussbemerkung der Nr. 3 hervorgeht, zieht Abhängigkeit zwischen den Formen PQR auch solche zwischen LMN nach sich, und umgekehrt. Demnach bleibt nur noch der Fall übrig, wo weder zwischen PQR noch zwischen LMN Abhängigkeit besteht. In diesem Falle können wir schreiben:

$$P = (xbc), \quad Q = (xca), \quad R = (xab),$$

wo die $a_i b_i c_i$ für $i = 1, 2, 3$ Constanten sind und die Determinante (abc) nicht verschwindet. Da $pP + qQ + rR = 0$, so wird $p = 0$ für $x = a$. Setzen wir daher:

$$p + a_{12}Q + a_{13}R, \quad q = a_{23}R + a_{21}P, \quad r = a_{31}P + a_{32}Q$$

mit constanten a_{ik}, so verschwindet

$$(a_{23}+a_{32})QR + (a_{13}+a_{31})RP + (a_{12}+a_{21})PQ$$

identisch. Daraus folgt:

$$a_{ik} + a_{ki} = 0$$

und

$$p = a_{32}(xaa) + a_{13}(xab) + a_{21}(xac) = (xa\alpha),$$

wo

$$\alpha_i = a_{32}a_i + a_{13}b_i + a_{21}c_i,$$

ebenso

$$q = (xb\alpha), \quad r = (xc\alpha).$$

Das System (1) nimmt überhaupt jetzt die Form an:

$$\begin{array}{lll} p = (xa\alpha), & p' = (xa\beta), & p'' = (xa\gamma), \\ q = (xb\alpha), & q' = (xb\beta), & q'' = (xb\gamma), \\ r = (xc\alpha), & r' = (xc\beta), & r'' = (xc\gamma), \end{array} \tag{4}$$

wo die $a_i b_i c_i \alpha_i \beta_i \gamma_i$ Constanten sind, (abc) und $(\alpha\beta\gamma)$ von Null verschieden.

Das System (4) ist componirt aus den Systemen

$$\begin{vmatrix} (xa)_1 & (xa)_2 & (xa)_3 \\ (xb)_1 & (xb)_2 & (xb)_3 \\ (xc)_1 & (xc)_2 & (xc)_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Da

$$\begin{vmatrix} (xb)_2 & (xb)_3 \\ (xc)_2 & (xc)_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (cx)_2 & (cx)_3 \\ (xb)_2 & (xb)_3 \end{vmatrix} = x_1(xbc) \text{ u. s. w.},$$

mithin

$$\begin{vmatrix} (xb)_1 & (xb)_2 & (xb)_3 \\ (xc)_1 & (xc)_2 & (xc)_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = (xbc)(x\beta\gamma),$$

so wird $L = (x\beta\gamma)$, ebenso $M = (x\gamma\alpha)$, $N = (x\alpha\beta)$.

7. Das System (4) kann nicht symmetrisch werden. Denn im Falle der Symmetrie ergäbe sich:

$$(xbc) : (xca) : (xab) = (x\beta\gamma) : (x\gamma\alpha) : (x\alpha\beta),$$

und man könnte daher Constanten ABC so bestimmen, dass

$$\alpha_i = Aa_i, \quad \beta_i = Bb_i, \quad \gamma_i = Cc_i$$

für $i = 1, 2, 3$; daraus würde folgen:

$$\begin{aligned} -A(xab) &= q = p' = B(xab), & -A &= B, \\ -A(xac) &= r = p'' = C(xac), & -A &= C, \\ -B(xbc) &= r' = q'' = C(xbc), & -B &= C, \\ A &= -A, & A &= 0. \end{aligned}$$

8. Dass die bilinearen Formen (3) gleichzeitig in xy symmetrisch werden, ist jetzt ebensowenig möglich, wie in dem Falle der Nr. 3. Denn sonst bestände die Gleichung

$$y_1(x\varepsilon\alpha) + y_2(x\varepsilon\beta) + y_3(x\varepsilon\gamma) = x_1(y\varepsilon\alpha) + x_2(y\varepsilon\beta) + x_3(y\varepsilon\gamma)$$

bei allen x, y für $\varepsilon = a$, für $\varepsilon = b$, für $\varepsilon = c$, mithin bei allen x, y, ε; es wäre also:

$$(\varepsilon\beta)_3 = (\varepsilon\gamma)_2, \text{ d. i. } \varepsilon_1\beta_2 - \varepsilon_2\beta_1 = \varepsilon_3\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_3,$$

mithin

$$\beta_2 + \gamma_3 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0,$$

ebenso

$$\gamma_3 + \alpha_1 = \gamma_2 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0,$$

schliesslich

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 &= 0, \quad \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 &= 0, \quad (\alpha\beta\gamma) = 0. \end{aligned}$$

Wenn also die Determinante des Systems (1) identisch verschwindet und die Formen (3) symmetrisch sind, so besteht eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten, die von jeder Colonne oder von jeder Zeile erfüllt wird.

II.

9. Die Elemente des Systems (1) sind die nach den y genommenen Ableitungen der in x und y bilinearen Formen (3).

Wir legen jetzt bilineare Formen $f(xy)$, $g(xy)$, $h(xy)$ zu Grunde, die in xy symmetrisch sind, und schreiben:

$$f(xy) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) \text{ u. s. w.},$$

so dass $f(xx)$, $g(xx)$, $h(xx)$ quadratische Formen der x werden, $f_1(x)$ die halbe Ableitung von $f(xx)$ nach x_1 u. s. w. Dann ist

$$J = \Sigma \pm f_1 g_2 h_3$$

die Jacobi'sche Determinante der drei quadratischen Formen f, g, h.

Die mit weiteren Veränderlichen $z_1 | z_2 | z_3$ gebildete Form $z_1 f + z_2 g + z_3 h$ besitzt als quadratische Form der x eine Determinante Z, die symmetrisch ist, und deren neun Elemente von den z linear abhängen. Endlich führen wir noch die Hermite'sche Form von f, g, h ein:

$$H = \Sigma \pm f(xx)\, g(xy)\, h(yy),$$

welche die xy nur in den Verbindungen $(xy)_1$, $(xy)_2$, $(xy)_3$ enthält (Rosanes, diese Annalen 1873 Bd. 6 S. 273).

Besteht zwischen den quadratischen Formen f, g, h eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten, so verschwinden J und H. Sind f, g, h singuläre Formen mit einer gemeinschaftlichen singulären Nullstelle, so verschwinden J und Z. Haben f, g, h einen linearen Factor gemein, so verschwinden H und Z.

10. Um nun umgekehrt festzustellen, wie die Formen f, g, h sich verhalten, wenn J oder Z oder H verschwindet, kann man theilweise die unter I angestellten Betrachtungen benutzen.

Wenn erstens J verschwindet, so besteht nach Nr. 8, da hier die Formen (3) symmetrisch sind, eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten, der entweder die Systeme

$$f_1 \mid g_1 \mid h_1, \quad f_2 \mid g_2 \mid h_2, \quad f_3 \mid g_3 \mid h_3$$

oder die Systeme

$$f_1 \mid f_2 \mid f_3, \quad g_1 \mid g_2 \mid g_3, \quad h_1 \mid h_2 \mid h_3$$

genügen, d. h.: die Formen f, g, h sind alsdann entweder unter einander linear abhängig ($H = 0$), oder singulär mit gemeinschaftlicher Singularität ($Z = 0$). Dies wurde zuerst bemerkt in Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Band 1, 1876, S. 304 und 1047; dann von Herrn Joseph Hahn, diese Annalen 1879, Bd. 15, S. 111 (Giessener Dissertation 1878), mittels einer Identität bewiesen, welche lehrt, dass im Falle $J = 0$ zwischen f, g, h eine quadratische Gleichung mit constanten Coefficienten besteht.

Demnach verschwindet mit J das Product HZ. Ebenso muss mit Z stets das Product JH verschwinden. Denn wenn Z verschwindet, so kann nach Nr. 7, da diese Determinante symmetrisch ist, nur der im Anfang der Nr. 2 erwähnte oder der in Nr. 3 behandelte Fall vorliegen (wobei natürlich jetzt die z für die x eintreten). Im ersteren Falle hat die quadratische Form der x:

$$z_1 f + z_2 g + z_3 h$$

eine von den z unabhängige Singularität ($J = 0$). Im letzteren Falle kann man nach Nr. 4 schreiben:

$$z_1 f_k + z_2 g_k + z_3 h_k = a_x w^k + a^k w_x, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

wo w_1, w_2, w_3 lineare Formen der z sind; da

$$z_1 f + z_2 g + z_3 h = 2 a_x w_x$$

wird, so haben jetzt f, g, h einen linearen Factor gemein ($H = 0$).

Endlich verschwindet mit H das Product JZ. Denn im Falle $H = 0$ sind f, g, h, wie Herr Hahn a. a. O. bewiesen hat, entweder unter einander linear abhängig ($J = 0$), oder sie haben einen linearen Factor gemein ($Z = 0$).

Das Verschwinden einer der Formen J, Z, H zieht hiernach das Verschwinden des Productes der beiden andern nach sich.

Giessen, 1893.

Ueber die Transformationstheorie der automorphen Functionen.

Von

ROBERT FRICKE in Göttingen.

In der vorliegenden Arbeit sollen die Grundlagen für die allgemeine Theorie der algebraischen Transformation automorpher Functionen besprochen werden, und zwar durch Auflösung des folgenden Problems: *Es seien $u(\eta)$ und $v(\zeta)$ eindeutige automorphe Functionen; wie kann in allgemeinster Weise zwischen den Argumenten η, ζ eine algebraische Relation:*

$$f(\eta, \zeta) = 0 \tag{1}$$

bestehen, welche zwischen den zugehörigen Functionswerthen $u(\eta)$, $v(\zeta)$ eine gleichfalls algebraische Relation:

$$F(u, v) = 0 \tag{2}$$

*zur Folge hat?**) Beide Relationen darf man als irreducibel annehmen; die Grade der ersten in η und ζ seien μ bez. ν; die der letzten in u und v seien m bez. n; die Werthigkeiten der Functionen $u(\eta)$, $v(\zeta)$ in ihren Fundamentalbereichen seien α bez. β. Für den Fall, dass $u(\eta)$ und damit $v(\zeta)$ rationale Functionen sind, führt das genannte Problem auf eine Trivialität; dieser Fall bleibt ausgeschlossen.

Es ist zweckmässig, folgende gruppentheoretische Bemerkung vorauszusenden. Die zu $u(\eta)$ gehörende Gruppe Γ_u umfasst *alle* unendlich vielen linearen Substitutionen $1, U_1, U_2, \ldots$, welche $u(\eta)$ in sich transformiren; das zur Gruppe gehörende Polygonnetz heisse kurz die η-Theilung. Giebt es weitere nicht-lineare Transformationen $\eta' = \Phi_1(\eta)$, $\eta' = \Phi_2(\eta), \ldots$ von $u(\eta)$ in sich, so verbinden diese

*) Mit demselben Probleme beschäftigt sich in einem neuerdings erschienenen Hefte des Journals für Mathematik (Bd. 112, pag. 287 ff.) Hr. Stäckel, ohne indes zu endgültigen Resultaten zu kommen.

Transformationen solche Punkte der η-Theilung, welche zwar gleiche u tragen, aber nicht äquivalent bezüglich Γ_u sind. Γ_u ist dann der Erweiterung fähig durch nicht-lineare Substitutionen auf eine Gruppe $\bar{\Gamma}_u$; doch ist innerhalb $\bar{\Gamma}_u$ die Gruppe Γ_u eine Untergruppe des endlichen Index $\alpha' \leqq \alpha$, da im Fundamentalbereich von Γ_u immer nur α Punkte mit gleichen Werthen u anzutreffen sind. Aus den Elementen der Gruppentheorie folgt dann: Innerhalb irgend einer Untergruppe von $\bar{\Gamma}_u$ bilden die ihr angehörenden Substitutionen U selbst wieder eine Untergruppe von endlichem Index $\leqq \alpha'$. Ueber die Existenz derartiger nicht-linearer Substitutionen soll hierdurch nichts ausgesagt sein. Die zu $v(\xi)$ gehörende Gruppe Γ_v bestehe aus den unendlich vielen Substitutionen $1, V_1, V_2, \ldots$; für Γ_v gelten die gleichen Bemerkungen wie für Γ_u.

Es seien η_0 und ξ_0 zwei durch (1) verbundene Stellen der η- bez. ξ-Theilung, und es sollen von ξ_0 aus Wege innerhalb der ξ-Theilung beschrieben werden. Dabei sollen die folgenden Punkte gemieden werden:

1) Punkte, in denen die Conformität der Beziehung zwischen η- und ξ-Ebene unterbrochen ist, und die also Verzweigungsstellen für (1) in der ξ- bez. η-Ebene liefern;

2) Punkte, die mit den unter 1) genannten Stellen bezüglich Γ_v äquivalent sind;

3) Punkte, denen in der v-Ebene Verzweigungsstellen der Relation (2) entsprechen.

Die gesammten zu umgehenden Punkte liegen in der ξ-Theilung homolog innerhalb der Polygone, in deren einzelnem nur eine *endliche* Anzahl von Punkten solcherweise markirt ist. Die Folge ist, dass längs der von ξ_0 aus zu beschreibenden Bahnen sowohl $\eta(\xi)$ vom Anfangswerthe η_0 an, als auch $u\left(\eta(\xi)\right)$ oder $u\left(v(\xi)\right)$ vom Anfangswerthe $u(\eta_0)$ an durchaus *einändrig* sind, während durch die entspringenden Bahnen von η umgekehrt auch diejenigen von ξ *eindeutig* bestimmt sind.

Da die auf den bezeichneten Wegen zu erreichenden correspondirenden Punkte η, ξ in $u(\eta), v(\xi)$ *algebraisch* verbundene Functionen liefern, so wird beim Erreichen eines wesentlich singulären Punktes von $v(\xi)$ zugleich ein eben solcher von $u(\eta)$ vorliegen. *Die Relation* (1) *ist demnach so beschaffen, dass man von zwei correspondirenden Punkten* η_0, ξ_0 *aus stets nur zu gleicher Zeit Punkte der natürlichen Grenzen der* η- *und* ξ-*Theilung antrifft.* Da durch die *algebraische* Relation (1) nicht unendlich vielen Punkten η (bez. ξ) endlich viele Punkte ξ (bez. η) zugewiesen sein können, so ergiebt sich auf Grund bekannter Sätze der Theorie der automorphen Functionen: *Ist* Γ_u (*bez.* Γ_v)

eine Gruppe mit einem oder zwei Grenzpunkten, so gilt dies auch von Γ_v (*bez.* Γ_u); *hat* Γ_u (*bez.* Γ_v) *unendlich viele Grenzpunkte, so auch* Γ_v (*bez.* Γ_u).

Man verbinde ξ_0 mit den äquivalenten Punkten $V_1(\xi_0)$, $V_2(\xi_0)$,... durch vorschriftsmässige Bahnen. Die einzelne, etwa von ξ_0 nach $V(\xi_0)$ führend, liefert in der v-Ebene eine geschlossene Bahn. Beschreiben wir von $V(\xi_0)$ aus eine mit der ersten äquivalente Bahn, die dann wieder alle kritischen Punkte meidet, so liefert sie mit der ersten vereint eine Bahn von ξ_0 nach $V^2(\xi_0)$, die, auf die v-Ebene übertragen, zweimalige Durchlaufung jenes ersten geschlossenen Weges ergiebt. Man setze dies in gleicher Weise für $V^3(\xi), \ldots$ fort. Nehmen wir nun die Riemann'sche Fläche der Relation (2) über der v-Ebene hinzu, so befinden wir uns, indem wir ξ_0 die Stelle η_0 zuweisen bez. den Werthen $v(\xi)$ in der Umgebung von ξ_0 die Werthe $u(\eta)$ in der Umgebung von η_0, in einem bestimmten Blatte dieser Fläche. Der von dem Punkte $v(\xi_0)$ dieses Blattes aus durchlaufene Weg eben gedachter Art war nun zwar in der v-Ebene geschlossen; es braucht dies aber noch keineswegs auf der Fläche der Fall zu sein. Dahingegen wird, da die Fläche m-blättrig ist, der $m_0 \leqq m$ Male in der v-Ebene durchlaufene Weg auch auf der Riemann'schen Fläche einen *geschlossenen* Weg liefern; längs der von ξ_0 nach $V^{m_0}(\xi_0)$ beschriebenen Bahn ist alsdann die in der Umgebung von ξ_0 eindeutig definirte Function $u\big(v(\xi)\big)$ einändrig in sich selbst übergegangen:

$$u\Big(v\big(V^{m_0}(\xi)\big)\Big) = u\big(v(\xi)\big).$$

Die äquivalente Iteration des gleichen Weges von $V^{m_0}(\xi_0)$ aus etc. führt stets wieder zum gleichen Ergebniss. Ist V nicht-elliptisch, so sind die Potenzen von V sowohl von einander als von 1 verschieden. Nehmen wir daraufhin jetzt gleich die η-Theilung mit hinein, so folgt: *Es giebt in der* ξ-*Theilung unendlich viele von* ξ_0 *aus ziehende Bahnen nach lauter verschiedenen, mit* ξ_0 *äquivalenten Punkten, deren entsprechende Bahnen der* η-*Theilung von* η_0 *aus in lauter Punkten mit den gleichen Werthen* $u = u(\eta_0)$ *enden.*

Die Bahnen der η-Theilung ordnen wir in $\alpha_0 \leqq \alpha$ Classen an, wobei in die gleiche Classe alle Bahnen mit bezüglich Γ_u äquivalenten Endpunkten kommen; diese Classeneintheilung übertragen wir auf die zugehörigen Bahnen der ξ-Ebene. Wenigstens in einer Classe sind unendlich viele Bahnen, die wir $B_1^{(\zeta)}$, $B_2^{(\zeta)}$, ... nennen wollen, und denen in der η-Theilung die Bahnen $B_1^{(\eta)}$, $B_2^{(\eta)}$, ... gegenüberstehen; die Endpunkte von $B_1^{(\zeta)}$ und $B_1^{(\eta)}$ heisen ξ_1 bez. η_1. Wir setzen nun B_1, rückwärts durchlaufen, mit B_2, B_3, ... zusammen, und zwar in

jeder der beiden Theilungen. So kommen lauter paarweise eindeutig einander correspondirende Bahnen

$$C_{k-1}^{(\eta)} = \left(B_1^{(\eta)}\right)^{-1} + B_k^{(\eta)}, \quad C_{k-1}^{(\zeta)} = \left(B_1^{(\zeta)}\right)^{-1} + B_k^{(\zeta)},$$

wobei sowohl in der einen wie anderen Theilung sämmtliche Endpunkte unter einander und mit dem Anfangspunkte bezüglich Γ_u und Γ_v äquivalent sind. Die hierbei in der ζ-Theilung auftretenden Endpunkte sind alle von einander und vom Anfangspunkte verschieden.

Den beschriebenen Bahnen $C_k^{(\eta)}$, $C_k^{(\zeta)}$ entsprechen ebensoviele Substitutionenpaare U_k', V_k', die aus Γ_u bez. Γ_v entnommen sind. Wir schreiben explicite:

$$U_k' = \begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}, \qquad V_k' = \begin{pmatrix} \alpha_k, & \beta_k \\ \gamma_k, & \delta_k \end{pmatrix}$$

und wollen nun den functionentheoretischen Ausdruck des Umstandes bilden, dass der in der Umgebung von ζ_1 durch $\eta(\zeta_1) = \eta_1$ eindeutig festgelegte Zweig der algebraischen Function (1) bei analytischer Fortsetzung über die Curve $C_k^{(\zeta)}$ hin in der Umgebung des Endpunktes der letzteren in

$$\eta\left(\frac{\alpha_k\zeta + \beta_k}{\gamma_k\zeta + \delta_k}\right) = \frac{a_k\eta(\zeta) + b_k}{c_k\eta(\zeta) + d_k}$$

übergegangen ist. In der That ist es hiernach eine Eigenschaft der irreducibelen Gleichung (1), dass für jede der unendlich vielen simultanen Substitutionen:

$$\eta' = \frac{a_k\eta + b_k}{c_k\eta + d_k}, \qquad \zeta' = \frac{\alpha_k\zeta + \beta_k}{\gamma_k\zeta + \delta_k} \tag{3}$$

die neue Gleichung $f(\eta', \zeta') = 0$ oder explicite

$$f\left(\frac{a_k\eta + b_k}{c_k\eta + d_k}, \quad \frac{\alpha_k\zeta + \beta_k}{\gamma_k\zeta + \delta_k}\right) = 0$$

immer zusammen mit der ursprünglichen $f(\eta, \zeta) = 0$ erfüllt ist, und dass hiermit die linke Seite der letzten Gleichung, von den Nennern befreit, bis auf einen constanten Factor $f(\eta, \zeta)$ selbst ist*): *Das durch* (1) *definirte algebraische Gebilde gestattet unendlich viele eindeutige Transformationen in sich, welche sich in* η *und* ζ *in der Gestalt* (3), *d. i. vor allem linear darstellen.*

Man sammle nun aus Γ_u und Γ_v *alle* Substitutionenpaare (3), welche das Gebilde (1) in sich transformiren, und nenne diese Substitutionen-

*) Noch einfacher gestaltet sich der Ausspruch dieses Satzes unter Gebrauch homogener Schreibweise für η und ζ.

paare in ihrer Gesammtheit gleich selbst wieder U_k', V_k'. Da unendlich viele verschiedene V_k' zur Verwendung kommen, so wolle man aus der coordinirten Stellung von η und ξ schliessen, dass auch unendlich viele U_k' aus Γ_u zur Anwendung kommen. Es entspringt solcherweise eine unendliche *Gruppe* von Simultansubstitutionen, und die betheiligten unendlich vielen Substitutionen U_k', V_k' werden bez. in Γ_u und Γ_v Untergruppen Γ_u', Γ_v' bilden. Durch Betrachtung correspondirender Wege in den Polygonnetzen der beiden letzten Gruppen ergiebt sich mit Rücksicht auf den algebraischen Charakter von (1): *Hat eine der beiden Gruppen Γ_u', Γ_v' unendlich viele Grenzpunkte, so gilt dies auch von der anderen; ist eine der beiden Gruppen eine solche mit einem oder zwei Grenzpunkten, so auch die andere.*

Man betrachte nun den *ersten* unter diesen beiden Fällen und bemerke, dass hier *jeder* Punkt der ξ-Ebene mit *unendlich vielen* Punkten bezüglich Γ_v' äquivalent ist. Die zu (1) gehörende μ-blättrige Riemann'sche Fläche geht durch die unendlich vielen Substitutionen der Γ_v' in sich über, und gegenüber *linearen* Substitutionen haben die Verzweigungspunkte invarianten Charakter. Da nun die Fläche nicht unendlich viele Verzweigungspunkte haben kann, so hat sie überhaupt keine, d. h. es ist $\mu = 1$. Auf gleichem Wege findet man $\nu = 1$, und also gilt: *Sind Γ_u' und Γ_v' Gruppen mit unendlich vielen Grenzpunkten, so sind η und ξ nothwendig lineare Functionen von einander, und also ist in diesem Falle die allgemeinste Gestalt der Relation* (1)*:*

$$\eta = \frac{A\xi + B}{C\xi + D}. \tag{4}$$

Sollen Relationen (1) möglich sein, welche sich nicht unter (4) subsumiren, so ist man auf den zweiten der beiden eben unterschiedenen Fälle eingeschränkt, und es muss wenigstens eine der beiden Gruppen Γ_u', Γ_v' *zwei* Grenzpunkte haben. Hat die erste Gruppe nur einen Grenzpunkt, so wähle man η so, dass derselbe bei $\eta = \infty$ liegt, während in der ξ-Ebene $\xi = 0$ und ∞ die Grenzpunkte sein sollen. Man findet, ähnlich wie oben: über der η-Ebene ist die zu (1) gehörende Fläche einblättrig, über der ξ-Ebene μ-blättrig mit zwei bei $\xi = 0$ und $\xi = \infty$ gelegenen, je μ-blättrigen Verzweigungspunkten; dies ergiebt:

$$\xi = R(\eta), \quad \eta = R'\left(\sqrt[\mu]{\xi}\right),$$

unter R und R' rationale Functionen verstanden. Die Substitutionen U' haben sämmtlich die Gestalt $\eta' = a\eta + b$, die Substitutionen V' entweder sämmtlich oder zur Hälfte die Gestalt $\xi' = \alpha\xi$. Indem wir uns auf diese letzten Substitutionen beschränken, gehen wir in der Gruppe der Simultansubstitutionen eventuell zu einer Untergruppe des

Index zwei. Für die einzelne der unendlich vielen hierher gehörenden Substitutionen hat man dann $R(a\eta + b) = \alpha R(\eta)$ als eine von η unabhängige Identität. Ist η_0 ein Null- oder Unstetigkeitspunkt von $R(\eta)$, der im Endlichen liegt, so sind die unendlich vielen Punkte $(a\eta_0 + b)$ gleichfalls Null- bez. Unstetigkeitspunkte. $R(\eta)$ wird demnach für endliche η weder 0 noch ∞ und ist somit einer Constanten gleich; der hier gedachte Fall kann also nicht vorkommen. — Hat endlich auch Γ_u' zwei Grenzpunkte, die dann bei $\eta = 0$ und ∞ liegen mögen, so ist nothwendig:

$$\zeta = R\left(\sqrt[\nu]{\eta}\right), \quad \eta = R'\left(\sqrt[\mu]{\zeta}\right),$$

und wir haben unendlich viele Simultansubstitutionen $\eta' = a\eta$, $\zeta' = \alpha\zeta$. Die Discussion der Identitäten $R\left(a^{\frac{1}{\nu}}\sqrt[\nu]{\eta}\right) = \alpha\, R\left(\sqrt[\nu]{\eta}\right)$ ergiebt, dass R nur für $\eta = 0$ und ∞ verschwinden oder ∞ werden kann, und also ist R eine Potenz von $\sqrt[\nu]{\eta}$ bis auf einen constanten Factor, den wir in η hineinnehmen können. Es ergiebt sich: *Soll der Typus* (4) *nicht vorliegen, so hat die Relation* (1) *entweder direct die Gestalt:*

$$\eta^\mu = \zeta^\nu, \tag{5}$$

oder diese Gestalt kann durch lineare Transformationen von η und ζ erreicht werden; die Gruppe Γ_u' und Γ_v' sind dann solche mit zwei Grenzpunkten.

Zur ferneren Discussion der Gleichung (4) schreiben wir deren rechte Seite abgekürzt $W(\zeta)$ und setzen:

$$u(\eta) = u\left(W(\zeta)\right) = w(\zeta).$$

Zur eindeutigen automorphen Function $w(\zeta)$ gehört alsdann die Gruppe $\Gamma_w = W^{-1}\Gamma_u W$, deren Polygonnetz dieselbe natürliche Grenze aufweist, wie das von Γ_v. Durch analytische Fortsetzung innerhalb dieses Netzes gewinnt man als zum gleichen Werthe $v(\zeta) = v\left(V_1(\zeta)\right)\ldots$ gehörig die unendlich vielen Ausdrücke:

$$w(\zeta), \quad w\left(V_1(\zeta)\right), \quad w\left(V_2(\zeta)\right), \ldots;$$

und da in der Relation $F(w, v) = 0$ das erste Argument w nur im m^{ten} Grade enthält, so entspringt auf Grund eines einfachen gruppentheoretischen Verfahrens das Resultat: *Die beiden Gruppen Γ_v und Γ_w sind commensurabel, indem sie eine Untergruppe gemein haben, die in Γ_v bez. Γ_w die endlichen Indices $m_0 \leqq m$ und $n_0 \leqq n$ aufweist.* Auf dem Polygone dieser Untergruppe ist $v(\zeta)$ eine $m_0\beta$-werthige Function, $w(\zeta)$ eine $n_0\alpha$-werthige, und also ist nach bekannten Sätzen:

$$m = m_0\beta, \quad n = n_0\alpha. \; —$$

Im Falle (5) schreibe man wieder $\eta = W(\xi)$, $u(\eta) = w(\xi)$ und hat in $v(\xi)$, $w(\xi)$ zwei Functionen mit gleichen wesentlich singulären Punkten, von denen $v(\xi)$ eine eindeutige Function ihres Argumentes ist. Die Gruppe $\Gamma_w = W^{-1}\,\Gamma_u\,W$ besteht aus den Transformationen:

$$(6) \qquad \xi' = \sqrt[\nu]{\left(\frac{a_k \sqrt[\mu]{\xi^\nu} + b_k}{c_k \sqrt[\mu]{\xi^\nu} + d_k}\right)^\mu}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

wenn wir gegenwärtig, wo die Substitutionen (3) als solche nicht mehr gebraucht werden, unter a_k, b_k, c_k, d_k die Coefficienten von U_k verstehen. Bilden wir die Wege zwischen äquivalenten Punkten der η-Theilung auf die ξ-Ebene ab und ordnen die so entspringenden Wege den Substitutionen (6) zu, so wird $w(\xi)$ gegenüber diesen Substitutionen bez. bei Fortsetzung längs der ihnen zugewiesenen Wege in sich übergehen. Die unendlich vielen durch die fraglichen Wege eindeutig definirten Functionen:

$$v_k(\xi) = v\left(\sqrt[\nu]{\left(\frac{a_k \sqrt[\mu]{\xi^\nu} + b_k}{c_k \sqrt[\mu]{\xi^\nu} + d_k}\right)^\mu}\right)$$

reduciren sich zufolge (2) auf $n_0 \leqq n$ verschiedene, und also hat Γ_w mit der Gruppe $\bar{\Gamma}_v$ aller linearen und nicht-linearen Substitutionen von $v(\xi)$ in sich eine Untergruppe des endlichen Index $n_0 \leqq n$ gemein. Nach pag. 98 hat aber letztere Gruppe selbst wieder eine Untergruppe des Index $\beta_0 \leqq \beta$, deren Operationen linear und also in Γ_v enthalten sind; Γ_w und Γ_v haben somit eine Untergruppe gemein, die in Γ_w den Index $n_0\beta_0 \leqq n\beta$ hat. Nun kann die Substitution (6) nur dann linear sein, wenn entweder $b_k = c_k = 0$ oder $a_k = d_k = 0$ ist. Γ_u enthält demnach eine Untergruppe von *endlichem* Index, welche nur *zwei* Grenzpunkte ($\eta = 0$ und $\eta = \infty$) hat, und daraus ergiebt sich, *dass* Γ_u *und damit* Γ_v *selbst Gruppen mit nur zwei Grenzpunkten sind;* denn eine Gruppe mit unendlich vielen Grenzpunkten kann eine solche mit zweien nur als Untergruppe des Index ∞ in sich enthalten. Die logarithmische Transformation $y = \log \eta$, $z = \log \zeta$ liefert nun bekanntlich in

$$u(\eta) = \varphi(y), \quad v(\xi) = \psi(z)$$

einfach- oder doppeltperiodische Functionen, und unsere Frage liefert direct das Transformationsproblem der letzteren, welches gelöst ist.

Unter Ausschluss elementarer und bereits erledigter Fälle hat man also folgende Antwort auf das am Eingang formulirte Problem: *Die Functionen* $u(\eta)$, $v(\xi)$ *können nur dann algebraisch mit einander verbunden sein, wenn ihre Argumente linear zusammenhängen:*

$$\eta = W(\xi) = \frac{A\xi + B}{C\xi + D},$$

und es muss zudem Γ_u *vermöge* W *in eine mit* Γ_v *commensurabele Gruppe* $W^{-1}\Gamma_u W$ *transformirt werden. Sind die Indices der gemeinsamen Untergruppe innerhalb* Γ_v *und* $W^{-1}\Gamma_u W$ *bez.* m_0 *und* n_0, *so besteht zwischen* u *und* v *eine algebraische Relation der Grade* $m = m_0\beta$ *und* $n = n_0\alpha$. —

Göttingen, den 19. November 1893.

Ueber Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke.

Von

A. Schönflies in Göttingen.

§ 1.

Einleitende Definitionen und Festsetzungen.

Die folgenden Sätze über Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke knüpfen an diejenigen Betrachtungen an, die ich kürzlich über geradlinige Polygone in diesen Annalen veröffentlicht habe*). Bei der dort zu Grunde gelegten Auffassung ist unter einem Kreisbogenpolygon ein einfach zusammenhängendes, von Kreisbogen begrenztes Flächenstück zu verstehen. Die Seiten können mehr als eine volle Peripherie betragen, und in den Ecken können Windungspunkte beliebig hoher Ordnung liegen; dagegen will ich annehmen, dass im Innern Windungspunkte nicht enthalten sind. Kreisverwandte Polygone gelten für die hier vorliegenden Zwecke nicht als verschieden. Der Unendlichkeitspunkt der Ebene, dem bei den geradlinigen Polygonen eine Ausnahmestellung zukam, ist daher bei den allgemeinen Polygonen nicht als Punkt besonderer Art zu betrachten; jeder Punkt der Ebene kann durch kreisverwandte Transformation in's Unendliche geworfen werden.

Die Aufgabe, um die es sich hier handelt, besteht darin, die Gesammtheit aller existirenden Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke so aufzuzählen, dass man sie morphologisch beherrscht. Für die Kreisbogendreiecke ist dies bereits ausgeführt worden. Hier ist zuerst die Arbeit des Herrn Klein**) über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe zu nennen, ferner eine demnächst erscheinende Arbeit von Hrn. Schilling***). Ich muss mich jedoch auch meiner-

*) Bd. 42, S. 377.

**) Diese Annalen, Bd. 37, S. 573.

***) Vergl. die demnächst in diesen Annalen erscheinende Abhandlung: Zur Theorie der Schwarz'schen s-Function.

Man vgl. auch die im XX. Band der Abhandlungen der Sächs. Ges. d. Wiss.

seits nochmals mit Kreisbogendreiecken befassen, zumal noch einige Punkte der Erledigung bedürfen, und ich überdies bei den Erörterungen über Kreisbogenvierecke von den Resultaten über Kreisbogendreiecke Gebrauch zu machen habe.

Eine Seite, die mehr als eine volle Peripherie umspannt, nenne ich *umlaufend;* wenn sie mehrere volle Peripherieen enthält, so soll sie *mehrfach umlaufend* heissen. Die Winkel des Polygons bezeichne ich wieder durch $\lambda\pi$ und setze

$$\lambda\pi = 2w\pi + \lambda'\pi; \quad 0 \leqq \lambda' < 2,$$

so dass w die Ordnung des Windungspunktes angiebt; $\lambda'\pi$ heisse wieder der *Winkelrest.* Je nachdem $\lambda' < 1$ oder $\lambda' > 1$ ist, ist der Winkel *concav* oder *convex.*

Für Kreisbogenpolygone bieten Winkel von der Grösse $0, \pi, 2\pi \ldots$ keine Besonderheit dar. Es ist aber zu beachten, dass ein Winkel von der Grösse π bald als concaver, bald als convexer Winkel aufzufassen ist. Ist nämlich BAC ein beliebiger convexer Winkel eines geradlinigen Polygons, so treten die Verlängerungen von BA und CA über A hinaus stets in das Innere des Polygons ein, während dies für concave Winkel nicht der Fall ist. Dies soll als Criterium auch für Kreisbogenwinkel gelten; der im Punkt A an der Seite AB liegende Winkel ist concav oder convex, jenachdem die Verlängerung von BA über A hinaus in das Aeussere (Fig. 1)*) oder in das Innere (Fig. 2)

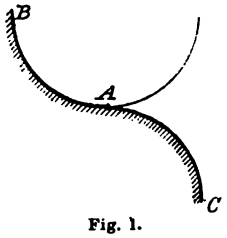


Fig. 1.

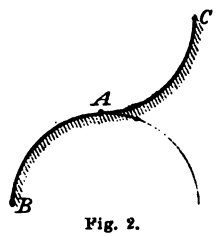


Fig. 2.

des Polygons eintritt. Ich bemerke noch, dass in Fig. 1 der an der Seite CA liegende Winkel CAB convex, in Fig. 2 jedoch concav ist. Der Winkel hat also für seine beiden Schenkel entgegengesetzten Charakter.

---

erschienene Study'sche Abhandlung: Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen. Der Study'sche Dreiecksbegriff deckt sich jedoch nicht mit dem hier benutzten. Herr Study versteht unter einem Dreieck drei Winkelzahlen und drei Seitenzahlen, die durch irgend drei grösste Kreise einer Kugel bestimmt werden, während der Begriff der einfach zusammenhängenden Dreiecksfläche für ihn überhaupt nicht in Frage kommt.

*) Das Polygoninnere ist durch Schraffirung kenntlich gemacht.

§ 2.
Reductions- und Erweiterungsprocesse.

Es ist zweckmässig, sich für die systematische Aufzählung aller Kreisbogenpolygone solcher Reductionsprocesse und Erweiterungsprocesse zu bedienen, wie ich sie a. a. O. bei der Untersuchung der geradlinigen Polygone benutzt habe. Ich habe dort mit zwei Processen operirt, die ein Polygon durch Tilgung von Vollebenen oder Halbebenen auf ein anderes zurückführten, das die nämlichen Eckpunkte, die nämlichen Winkelreste und die nämlichen Seitenrichtungen besass, wie das ursprüngliche. Der erste Process bestand in der *Ausschaltung einer Vollebene;* er besteht in der gleichen Weise für beliebige Kreisbogenpolygone und vermindert die Windungspunkte des Polygons um zwei. Der zweite bestand in der Abtrennung einer Halbebene; er tilgt einen Windungspunkt und einen Seitenumlauf und geht für beliebige Kreisbogenpolygone in die *Ausschaltung einer Kreisscheibe* über. Ich bemerke, dass die Kreisscheibe sowohl das vom Kreis eingeschlossene, als auch das durch ihn ausgeschlossene Stück der Ebene bedeuten kann. Hierzu kommt für Kreisbogenpolygone noch ein dritter Process, der zwei Seitenumläufe tilgt, und den ich als *Ausschaltung eines Kreisringes* bezeichne. Alle diese Processe sind von Herrn Klein eingeführt und in seinen Vorlesungen wiederholentlich benutzt worden. Es empfiehlt sich, sie an einigen einfachen Beispielen klarzustellen.

Es sei (Fig. 3) $ABCD$ ein Kreisbogenviereck, und t eine in ihm verlaufende Diagonale AC. Man lege das Viereck $ABCD$ auf eine Vollebene, und schneide die Vollebene und das Viereck längs t auf; alsdann hefte man die übereinander liegenden Stücke beider Flächen über Kreuz zusammen. Dadurch entsteht ein einfach zusammenhängendes Viereck $ABCD$, das in A und C je einen Windungspunkt besitzt. Wir sagen, dass dieses Viereck aus dem ursprünglichen durch *Einschaltung einer Vollebene* hervorgeht, ebenso kann man umgekehrt durch Ausschaltung der Vollebene zu dem ursprünglichen Viereck zurückgelangen.

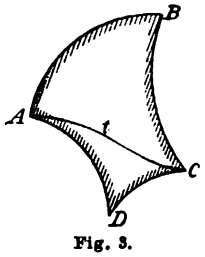


Fig. 3.

Es sei zweitens (Fig. 4) $ABCD$ ein Viereck, in welchem der Punkt A innerhalb derjenigen durch BC bestimmten Kreisscheibe s liegt, die das Innere des Vierecks ausmacht; ferner sei t eine von A nach BC verlaufende Transversale, die innerhalb des Vierecks und zugleich innerhalb von s bleibe. Wir legen nun das Viereck auf eine zu s congruente Kreisscheibe s', schneiden beide Flächen wieder längs t auf und heften ihre Theile über Kreuz zusammen, so ist jetzt ein Viereck $ABCD$ entstanden,

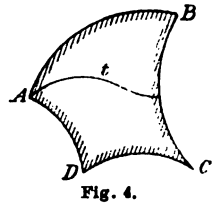


Fig. 4.

das in A einen Windungspunkt besitzt, und dessen Seite BC umlaufend geworden ist. Dieses Viereck betrachten wir als erzeugt durch *Einschaltung einer Kreisscheibe;* umgekehrt geht man von ihm durch Ausschaltung einer Kreisscheibe zu dem ursprünglichen Viereck zurück.

Es sei drittens (Fig. 5) $ABCD$ ein Viereck von der Art, dass der durch AB bestimmte Kreis s den durch CD bestimmten Kreis u einschliesst, und es sei wieder t irgend eine Transversale des Vierecks, die von einem Punkte der Seite AB nach einem Punkt der Seite CD läuft. Die beiden Kreise s und u bestimmen einen Kreisring; ihn lege man auf einen congruenten Kreisring, und schneide diesen sowie das Viereck $ABCD$ längs t auf; alsdann hefte man beide Flächentheile wieder über Kreuz zusammen, so entsteht ein einfach zusammenhängendes Viereck, das die Fläche $ABCD$ doppelt bedeckt und in AB und CD zwei umlaufende Seiten besitzt. Dieses Viereck geht aus dem ursprünglichen durch *Einschaltung eines Kreisringes* hervor; von ihm steigt man durch Ausschaltung des Kreisringes zu dem ursprünglichen herab.

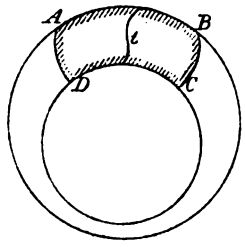


Fig. 5.

Für geradlinige Polygone wird dieser letzte Process augenscheinlich illusorisch.

Die drei genannten Reductionsprocesse sind dadurch charakterisirt, dass der erste zwei Windungspunkte tilgt, der zweite einen Windungspunkt und einen Seitenumlauf, der dritte zwei Seitenumläufe. Man kann beweisen, dass *sie die einzigen Processe sind, die die Ecken, die Winkelreste und die Seitenrichtungen unverändert lassen.* Ich unterlasse es, dies weiter auszuführen, weil die Reductionsprocesse für die morphologische Structur eines Polygons an sich keine wesentliche Bedeutung haben (vgl. § 8); sie sind ja nur Hilfsmittel, deren wir uns bedienen, um uns die Aufzählung der Polygone zu erleichtern, und wir können uns daher einfach auf den Standpunkt stellen, dass wir andere Processe, die die Winkelreste unverändert lassen, nicht nöthig haben.

Zu ihnen kommt noch ein Reductionsprocess anderer Art, nämlich ein solcher, der zwar die Ecken, aber nicht die Winkelreste unverändert lässt. Es ist derjenige, den Herr Klein a. a. O. ausführlich erörtert hat. Er besteht in der *Abtrennung einer Kreisscheibe* längs einer Polygonseite, er vermindert die an ihren Endpunkten liegenden Winkel um je π und ersetzt die Seite selbst durch ihr Complement. Der umgekehrte Process besteht in der *Anhängung einer Kreisscheibe.* Dieser Process ist nur für solche Seiten zulässig, die nicht umlaufend sind.

Ich bemerke noch, dass zwei Transversalen, längs deren eine

Vollebene, oder eine Kreisscheibe, oder ein Kreisring eingeschaltet werden sollen, sich nicht schneiden dürfen. Hier bestehen die nämlichen Sätze, die ich für geradlinige Polygone abgeleitet habe.*)

Ein Kreisbogenpolygon, das Reductionsprocesse zulässt, soll wieder *reducirbar* heissen; im andern Fall heisst es *reducirt.***)

§ 3.

Einige Hilfssätze.

Ist AB eine Polygonseite, so kann längs AB sowohl das Innere, als das Aeussere des durch AB bestimmten Kreises s das Polygoninnere ausmachen. Es ist aber klar, dass wir durch kreisverwandte Transformation das Polygon $\mathfrak{P}$ so in ein Polygon $\mathfrak{P}'$ überführen können, dass längs $A'B'$ die Polygonfläche innerhalb des durch $A'B'$ bestimmten Kreises s' liegt. *Wir setzen fest, dass dies für alle im Folgenden zu betrachtenden umlaufenden Seiten erfüllt ist.*

Sei jetzt (Fig. 6, S. 111) $AB = c$ eine nicht umlaufende Seite eines Kreisbogenpolygons $\mathfrak{P}$ und es seien die an ihren Endpunkten liegenden Winkel beide convex. Wir betrachten die Gesammtheit aller Kreisbogen c', die durch A und B gehen und im Innern des durch AB bestimmten Kreises s liegen. Diejenigen von ihnen, die nahe bei c verlaufen, liegen sicher mit allen ihren Punkten innerhalb des Polygons. Nun sind zwei Fälle möglich; die genannten Kreisbogen c' bleiben nämlich entweder alle innerhalb des Polygons oder diese Eigenschaft kommt nur einem Theil von ihnen zu. Im ersten Fall lässt sich von $\mathfrak{P}$ die durch AB begrenzte Kreisscheibe abtrennen, und das Polygon ist reducirbar. Im zweiten Fall giebt es unter den Kreisen c' nothwendig einen bestimmten ersten Kreis, der nicht mehr ganz innerhalb des Polygons liegt; es ist derjenige Kreis, der die Polygoncontour zuerst erreicht, und den wir daher den *Grenzkreis* nennen. Wir bezeichnen ihn durch k_{ab}.

Aehnliche Verhältnisse liegen vor, wenn AB eine umlaufende Seite ist. Nach der oben getroffenen Festsetzung ist das Innere des durch AB bestimmten Kreises s zugleich das Innere des Polygons. Wir betrachten jetzt (Fig. 9, S. 113) die Kreise s', die AB im Punkte A von innen berühren; sie treten bei A in das Polygoninnere ein und endigen in dem unter A liegenden Punkt A' der Seite AB, der von A um eine volle Peripherie entfernt ist. Diejenigen dieser Kreise, die nahe bei s verlaufen, liegen sicher innerhalb des Polygons. Andrerseits

*) Vgl. a. a. O. S. 387 ff.

**) Der hier eingeführte Begriff eines reducirten Polygons deckt sich nicht ganz mit demjenigen, den Herr Klein a. a. O. benutzt.

können nicht alle diese Kreise s' dem Polygoninnern angehören; denn ein geschlossener Linienzug, der in zwei unter einander liegenden Punkten A und A' endigt und im Innern verläuft, kann nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden, und zugleich dauernd im Innern verbleiben. Wir gelangen damit wieder zu dem Resultat, dass unter den Kreisen s' nothwendig ein *Grenzkreis* existirt, der die Polygoncontour zuerst erreicht. Wir bezeichnen ihn durch k_a.

Der Grenzkreis wird entweder einen Eckpunkt des Polygons enthalten, oder er berührt eine Polygonseite. Im ersten Fall nennen wir ihn einen *Diagonalkreis*, im zweiten einen *Tangentialkreis* (Fig. 11, S. 116). Liegt z. B. ein Viereck $ABCD$ vor, so wird der Kreis k_a entweder die Seite CD berühren, oder aber er geht durch einen der beiden Eckpunkte C und D. Geht er durch C, so soll er ein *eigentlicher Diagonalkreis* heissen, wenn er dagegen durch den auf A folgenden Punkt D hindurchzieht, so soll er *uneigentlicher Diagonalkreis* heissen.

Es ist zu beachten, dass der Grenzkreis im besondern eine ganze Polygonseite enthalten kann; dies ist z. B. der Fall, wenn AD und AB den Winkel Null einschliessen, und D ein convexer Winkel ist. Alsdann enthält der Kreis doch den Punkt D und ist als uneigentlicher Diagonalkreis anzusehen. Ebenso gilt er immer dann als eigentlicher Diagonalkreis, wenn er den Punkt C enthält.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass wenn der Grenzkreis k_a oder k_{ab} ein Diagonalkreis ist, an dem von ihm getroffenen Eckpunkt ein *convexer* Winkel liegt.

§ 4.

Kreisbogendreiecke ohne umlaufende Seiten.

Herr Klein hat a. a. O. gezeigt, dass man für jedes beliebige Dreieck eine arithmetische Reduction vornehmen kann, die einer geometrischen Erzeugung des Dreiecks aus gewissen einfachen Dreieckstypen äquivalent ist; er hat ferner auf Grund functionentheoretischer Betrachtungen geschlossen, dass zu drei beliebigen Winkelzahlen $\alpha\ \beta\ \gamma$ auch stets ein Kreisbogendreieck gehört. Ich halte es für nützlich, diese Resultate auch geometrisch abzuleiten. Ich werde also zeigen, dass erstens *jedes existirende Dreieck aus einem reducirten Dreieck durch Erweiterungsprocesse ableitbar ist, und dass zweitens zu allen Winkeltripeln $\alpha\ \beta\ \gamma$ auch wirklich Dreiecke gehören.**)

Ich theile die Untersuchung in zwei Theile und betrachte zuerst Dreiecke *ohne umlaufende Seiten.* Von ihnen gilt der Satz:

Jedes Dreieck ohne umlaufende Seiten, das zwei convexe Winkel enthält, ist reducirbar.

*) Vgl. hierzu die in der Einleitung genannte Schilling'sche Arbeit.

Es seien (Fig. 6) A und B die convexen Winkel, so fasse man die das Innere des Dreiecks durchziehenden Kreise c' in's Auge, die durch A und B gehen. Giebt es unter ihnen einen Grenzkreis nicht, so ist die durch AB bestimmte Kreisscheibe abtrennbar. Ist dies nicht der Fall, so geht der Grenzkreis k_{ab} nothwendig durch C und es ist C ein convexer Winkel. Ich behaupte, dass in diesem Fall die durch AC bestimmte Kreisscheibe u abtrennbar ist. Aus dem vorstehenden folgt, dass dies immer dann zutrifft, wenn der Punkt B ausserhalb dieser Kreisscheibe liegt. Der kleinste Werth, den α annehmen kann, ist $\alpha = 1$; alsdann berührt der Kreis AC den Kreis AB in A von innen und B liegt daher sicher ausserhalb u. Lassen wir jetzt α wachsen, während wir A und C festhalten, so behält der Kreis u die genannte Eigenschaft, bis AC mit dem Grenzkreis k_a zusammenfällt, und wenn α noch weiter wächst, so tritt B in das Innere des Kreises u ein. Dies ist aber doch nur scheinbar der Fall; denn jetzt liegen B und u in verschiedenen Blättern, es liegt also wirklich B ausserhalb des Gebietes, das von der durch u begrenzten einfachen Kreisscheibe erfüllt wird. Damit ist die obige Behauptung bewiesen. Es folgt noch:

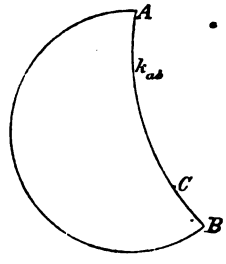


Fig. 6.

Jedes Dreieck ohne umlaufende Seiten geht aus einem analogen reducirten Dreieck durch Anhängung von Kreisscheiben hervor.

Wir haben nun zweitens zu fragen, für welche Werthe von α, β, γ reducirte Dreiecke ohne umlaufende Seiten existiren. Wir können jedes derartige Dreieck so in ein kreisverwandtes verwandeln, dass die drei Eckpunkte in beliebige Punkte der Ebene fallen; wir dürfen daher die Eckpunkte beliebig wählen. A und B seien die beiden concaven Winkel. Wir nehmen überdies zunächst an, dass sie beide spitz sind, so handelt es sich genauer um die Frage, für welche Werthe von γ reducirte Dreiecke der betrachteten Art existiren. Wir zeichnen (Fig. 7) zwei beliebige Kreise, die sich von aussen berühren, so können wir einen Kreis beschreiben, der den einen von ihnen unter dem Winkel $\alpha\pi$, den andern unter dem Winkel $\beta\pi$ schneidet; diese Kreise bestimmen also bereits ein Dreieck ABC, in dem α und β vorgeschriebene Werthe haben, während $\gamma = 0$ ist. Die drei Dreiecksseiten seien a, b, c.

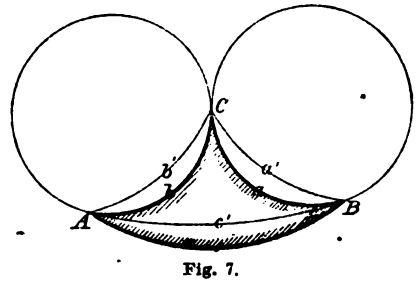


Fig. 7.

Nun ersetzen wir die Seite $AB = c$ durch einen auf der inneren

Seite von AB verlaufenden Kreisbogen c', der mit c in A und B den Winkel $\omega\pi$ bestimmt, und zeichnen sodann zwei Kreisbogen $BC = a'$ und $AC = b'$ so dass die Winkel $(b'c') = \alpha\pi$ und $(c'a') = \beta\pi$ sind, so bestimmen a', b', c' ein Dreieck dessen Winkel $\alpha\pi, \beta\pi, 2\omega\pi$ sind. Hiermit können wir fortfahren, bis der Kreis c' durch C geht. Sobald nämlich c' den Punkt C erreicht oder überschreitet, so entsteht ein Dreieck ABC von verändertem morphologischen Charakter; es kann nur dann ein einfach zusammenhängendes Flächenstück repräsentiren, wenn man ihm in A und B Windungspunkte beilegt.

Die vorstehenden Schlüsse bleiben ohne Weiteres in Kraft, wenn wir von einem Dreieck ausgehen, dessen Winkel A und B beide stumpf sind, wie es in Fig. 8 dargestellt ist. Dasselbe gilt für Dreiecke, in denen der eine Winkel spitz, der andere stumpf ist; wir haben zu diesem Zweck die beiden sich von aussen berührenden Kreise durch Kreise mit innerer Berührung zu ersetzen.

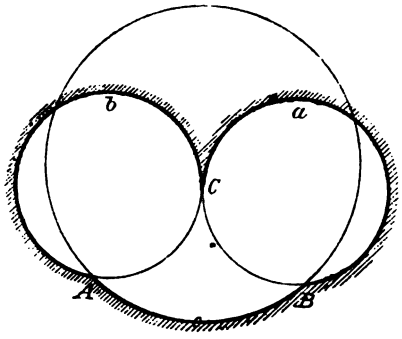


Fig. 8.

Man sieht leicht, dass, wenn der Kreis c' durch C geht, in allen Fällen die Relation

$$2\omega' = 1 + \alpha + \beta$$

besteht, und daraus folgt, dass reducirte Dreiecke ohne umlaufende Seiten, und mit concaven Winkeln A und B stets und nur für solche Werthe γ existiren, für die

$$\gamma < 1 + \alpha + \beta$$

ist; d. h.

Reducirte Dreiecke ohne umlaufende Seite und mit Winkeln

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta \leqq 1$$

existiren für jeden Werth

$$0 \leqq \gamma < 1 + \alpha + \beta \leqq 3$$

d. h. für

$$\gamma - \alpha - \beta < 1.$$

Die Formel zeigt, dass wenn $\alpha + \beta > 1$ ist, bei C zuletzt ein Windungspunkt entsteht, wie dies auch aus dem geometrischen Process unmittelbar hervorgeht.

Hat einer der beiden Winkel α und β den Werth Null, so ist $\gamma < 1 + \beta$, es ist daher γ nothwendig kleiner als 2.

§ 5.

Die Kreisbogendreiecke mit umlaufender Seite.

Es sei jetzt (Fig. 9*) ABC ein Dreieck, in dem die Seite AB umlaufend ist; andere Voraussetzungen über die Art der Seiten und Winkel machen wir nicht. Zur Seite AB gehört ein Grenzkreis k_a; dieser Kreis ist nothwendig ein Diagonalkreis und geht daher durch C. Hieraus folgt bereits, dass der Winkel C sicher convex ist. Weiter schliessen wir, dass die Seite AC nicht umlaufend ist, denn sie endet in zwei Punkten A und C, die in einem und demselben Blatt enthalten sind. Das Gleiche folgt für die Seite BC unter Benutzung des Grenzkreises k_b. Es folgt:

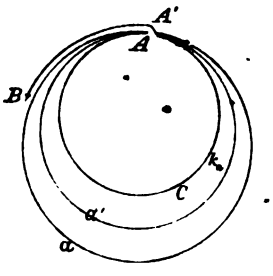


Fig. 9.

In einem Dreieck kann nur eine Seite umlaufend sein.

Wir beweisen ferner, dass sich vom Dreieck ABC stets eine Kreisscheibe abtrennen lässt, wenn der Winkel A convex ist. Wir haben eben gesehen, dass die Seite AC nicht umlaufend ist; demnach schliessen wir aus § 4, dass sich die Kreisscheibe längs AC nur dann nicht abtrennen lässt, wenn der Punkt B in ihrem Innern enthalten ist. Dies trifft aber hier nicht zu; denn denkt man sich den Bogen CA' des Grenzkreises als Theilungslinie des Dreiecks, so zerfällt das Dreieck in zwei einfach zusammenhängende Flächenstücke, $A'CB$ und $A'CA$, von denen das eine den Punkt B, das andere die bezügliche Kreisscheibe enthält. Wir erhalten daher:

Jedes Dreieck mit einer umlaufenden Seite geht durch Anhängung von Kreisscheiben aus einem Dreieck hervor, in dem die Winkel an der umlaufenden Seite concav sind.

Wir betrachten jetzt ein Dreieck mit umlaufender Seite AB und concaven Winkeln in A und B. Nun kann C an und für sich ein Windungspunkt sein. Alsdann kann man aber, wie unmittelbar einleuchtet, aus dem Dreieck eine Kreisscheibe ausschalten, so dass AB einen Umlauf verliert, und der Winkel C um 2π vermindert wird**); jedes Dreieck mit umlaufender Seite AB kann demnach aus einem Dreieck erzeugt werden, in dem der Winkel C kleiner als 2π ist. Ist in diesem Dreieck die Seite AB nicht mehr umlaufend, so ist es ein Dreieck des § 4, ist AB umlaufend, so repräsentirt es einen neuen Typus reducirter Dreiecke. Weiter folgt noch, dass AB nur einfach

*) Um anzudeuten, dass $A'B$ in einem andern Blatt verläuft, als AA', ist der Radius von $A'B$ vergrössert worden.

**) Man kann dies auch durch Anbringung einer von C ausgehenden Theilungslinie in aller Form beweisen.

umlaufend ist. Der Bogen CA' des Grenzkreises k_a schneidet nämlich von ABC ein Dreieck $A'BC$ ab, in dem jetzt der Winkel $A'CB$ concav ist; daher kann $A'B$ nicht umlaufend sein. Also:

Die reducirten Dreiecke zweiter Art enthalten eine einfach umlaufende Seite. Ihr Gegenwinkel liegt zwischen π und 2π, die anliegenden Winkel liegen zwischen 0 und π.

Wir haben nun wieder zu zeigen, dass auch wirklich für jeden Werth $1 \leqq \gamma < 2$ derartige Dreiecke existiren. Wir gehen wieder von zwei sich berührenden Kreisen aus, die von einem dritten geschnitten werden. Diese bestimmen uns (Fig. 10) ein Dreieck ABC mit umlaufender Seite AB und dem Winkel $\gamma = 2$. Dieses Dreieck ist allerdings reducirbar, da ja $\gamma = 2$ ist. Wir ersetzen nun wieder den Kreis $AB = c$ durch einen ebenfalls durch A und B ziehenden Kreis c', der längs AB ausserhalb des Dreiecks verläuft, und mit AB den Winkel $\omega'\pi$ bestimmt und construiren wie in § 4, die Kreise $a' = CB$ und $b' = CA$, so dass $(b'c') = \alpha\pi$ und $(c'a) = \beta\pi$ ist, so hat das so bestimmte Dreieck eine umlaufende Seite AB, die gleichen Winkel $\alpha\pi$ und $\beta\pi$, aber es ist $\gamma = 2 - 2\omega'$. Hiermit können wir wieder so lange fortfahren, bis der Kreis $c' = AB$ den Punkt C überstreicht, denn C tritt dadurch in das Aeussere des Kreises c' hinaus, was für die hier betrachteten Dreiecke nicht zulässig ist. Für den so bestimmten Grenzwerth von ω' ergiebt sich

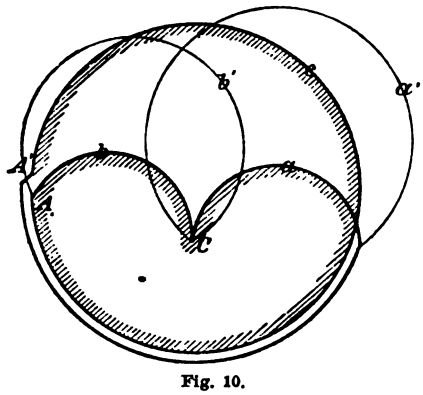


Fig. 10.

$$2\omega' = 1 - \alpha - \beta$$

und daraus folgen für γ die Grenzen

$$1 + \alpha + \beta < \gamma < 2; \text{ d. h.}$$

Reducirte Dreiecke mit umlaufender Seite existiren für jeden Werth

$$1 + \alpha + \beta < \gamma < 2;$$

d. h. für

$$\gamma - \alpha - \beta > 1.$$

Verbinden wir dies Resultat mit dem von § 4, so folgt, dass nur für $\gamma - \alpha - \beta = 1$ ein Dreieck mit einer von Null verschiedenen Fläche sich nicht einstellt; wir haben hier einen *Grenzfall*, den wir jeder der beiden Dreiecksarten zurechnen können. Die reducirten Dreiecke enthalten eine umlaufende Seite, oder nicht, je nachdem

$$\gamma - \alpha - \beta - 1$$

positiv oder negativ ist. Beachtet man nun, dass bei jeder *Einschaltung* einer Kreisscheibe, resp. bei jedem Umlauf von AB die Grösse

$$\gamma - \alpha - \beta$$

um je zwei Einheiten zunimmt, und dass *Anhängungen* von Kreisscheiben nur längs solcher Seiten möglich sind, die nicht umlaufend sind, so ergeben sich die von Herrn Klein a. a. O. aufgestellten Sätze über die Abhängigkeit der Zahl der Umläufe von den Winkelzahlen.

Es folgt weiter, dass *für beliebige Werthe der Winkel Dreiecke wirklich existiren, und zwar, wenn wir kreisverwandte Dreiecke nicht unterscheiden, immer nur eins.*

§ 6.

Vierecke ohne umlaufende Seiten.

Für die geradlinigen Vierecke besteht der Satz, dass sich jedes von ihnen aus zwei Dreiecken zusammensetzen lässt. Durch geeignete Zusammensetzung zweier Kreisbogendreiecke ergiebt sich zwar auch immer ein Kreisbogenviereck, man gelangt aber auf diese Weise nicht zu jedem Viereck.*) Dieselbe Differenz tritt für beliebige geradlinige und Kreisbogen-n-ecke auf; sie macht es nothwendig, dass wir bei den allgemeinen Kreisbogenpolygonen besondere Wege einschlagen müssen.

Es sei $ABCD$ ein Viereck ohne umlaufende Seiten, von dem wir annehmen, dass die Winkel A und B beide convex sind. Es ist wieder die Frage, ob dieses Viereck nothwendig reducirbar ist. Der Grenzkreis k_{ab} ist entweder Diagonalkreis oder Tangentialkreis. Ist er Diagonalkreis, so stellt er für einen der beiden Punkte A und B eine eigentliche Diagonale dar. Wir nehmen an, dies sei A, so geht k_{ab} durch C und es zerfällt das Viereck durch die Diagonale AC in die beiden Dreiecke ADC und ABC. Nun ist nothwendig ACB ein convexer Winkel, vom Dreieck ABC ist daher die durch BC bestimmte Kreisscheibe abtrennbar. Wir folgern:

Ein reducirtes Viereck, das einen Diagonalkreis als Grenzkreis besitzt, existirt nicht.

Wir erhalten demgemäss drei verschiedene Typen von reducirten Vierecken, die sich durch Zusammensetzung von zwei Dreiecken ergeben, je nach der Art, wie wir die Dreiecke aneinander legen. Die bezüglichen Winkelrelationen sind

1) $0 \leqq \alpha \leqq 1,\ 0 \leqq \beta \leqq 2,\ 0 \leqq \gamma \leqq 1,\ 0 \leqq \delta < 2+\alpha+\beta+\gamma < 6,$
2) $0 \leqq \alpha \leqq 1,\ 0 \leqq \beta < 1+\alpha+\gamma < 3,\ 0 \leqq \gamma \leqq 1,\ 0 \leqq \delta < 1+\alpha+\gamma < 3,$
3) $0 \leqq \alpha \leqq 1,\ 0 \leqq \beta < 4,\ 0 \leqq \gamma \leqq 1,\ 0 \leqq \delta < 4.$

*) Vgl. z. B. S. 14 Anmerkung.

Wir haben jetzt zweitens den Fall zu betrachten, dass der Grenzkreis k_{ab} ein Tangentialkreis ist. Alsdann (Fig. 11) berührt er die Seite CD. Ist T der Berührungspunkt, so zerfällt das Viereck durch k_{ab} in zwei Dreiecke ADT und BDT und in ein Zweieck AB. Da die Winkel am Punkte T den Werth Null haben, so können die Dreiecke längs der Seiten AD, resp. BC reducirbar sein, alsdann gilt das gleiche vom Viereck selbst. Das Viereck ist daher sicher reducirbar, wenn z. B. $\delta > 1$ und zugleich der Winkel DAT selbst noch convex ist. Man kann aber noch weiter nachweisen, dass das Viereck immer reducirbar ist, falls einer der Winkel D oder C convex ist. Man überzeugt sich hiervon am einfachsten, indem man das Viereck so in ein kreisverwandtes transformirt, dass der Punkt T in's Unendliche fällt; alsdann werden $A'T'$ und $D'T'$ parallel, und die Figur zeigt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar. Wir schliessen:

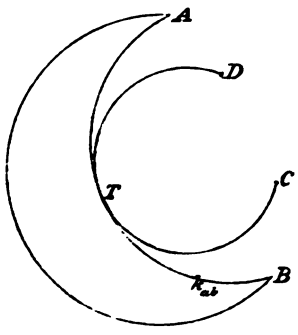


Fig. 11.

Wenn in einem reducirten Viereck ohne umlaufende Seiten der Grenzkreis ein Tangentialkreis ist, so sind die beiden nicht vom Grenzkreis getroffenen Winkel nothwendig concav.

Es fragt sich noch, bis zu welchen Werthen die convexen Winkel A und B anwachsen können, ohne dass das Viereck reducirbar wird. Wir erhalten nach dem Vorstehenden alle bezüglichen Vierecke, wenn wir das Zweieck AB so verändern, dass wir seinen Winkel vergrössern. Man sieht leicht, dass diese Vergrösserung zulässig ist, bis der Kreis AB in das Complement des Grenzkreises übergeht; bei weiterem Wachsen des Zweiecks wird das Viereck durch Abtrennung der durch AB bestimmten Kreisscheibe reducirbar. Mit Rücksicht auf die Schlussbemerkung von § 4 erhalten wir daher als Winkelrelation

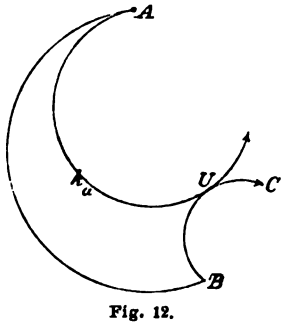


Fig. 12.

$$4)\quad 0 \leqq \gamma \leqq 1,\ 0 \leqq \delta \leqq 1,\ 1 \leqq \alpha < 2 + \delta < 3,$$
$$1 \leqq \beta < 2 + \gamma < 3.$$

Es ist schliesslich noch zu untersuchen, ob es Vierecke ohne umlaufende Seiten giebt, die nicht in zwei Dreiecke zerfallen, und nur *einen* convexen Winkel an jeder Seite enthalten. Wir nehmen an, es sei (Fig. 12) in dem Viereck $ABCD$ A convex, so dass nothwendig B concav ist. Jetzt fassen wir die in A berührenden Kreise und ihren Grenzkreis k_a in's Auge. Diese Kreise endigen zunächst in einem Punkte der

Seite BC, nahe bei B. Der Grenzkreis k_a kann kein Diagonalkreis AD sein, da sonst D convex wäre, was ausgeschlossen ist. Er ist also Tangentialkreis und berührt daher entweder CD oder BC. Berührt er CD in T, so liegt der eben erörterte Fall vor, es ist (Fig. 11) nothwendig der Winkel D concav und $\alpha < 2 + \delta$; ferner existirt ein Dreieck TBC, das einen concaven Winkel B und in T einen Winkel Null enthält, also ist nach § 4 Schluss $\gamma < 1 + \beta < 2$; die Winkelrelationen stimmen daher mit denen der oben abgeleiteten Typen 1), 2), 3) überein.

Berührt der Grenzkreis k_a die Seite BC, so sei U der Berührungspunkt. Wir denken uns AU als Theilungslinie; sie zerlegt das Viereck in ein Dreieck ABU und ein Viereck $AUCD$ ohne umlaufende Seiten, in dem jetzt die an der Seite AU liegenden Winkel beide convex sind. Es folgt daher aus den obenstehenden Erörterungen sofort, dass dieses Viereck immer auf ein solches reducirt werden kann, in dem die Winkel C und D beide concav sind. Als Grenze für A ergiebt sich $\alpha < 2 + \delta$, es ordnen sich daher auch die hier gefundenen Vierecke bezüglich der Winkelrelationen unter die früher gefundenen unter.

Als Resultat können wir den folgenden Satz aussprechen:

Jedes Viereck ohne umlaufende Seiten kann aus einem reducirten Viereck durch Anhängung von Kreisscheiben erzeugt werden. Die reducirten Vierecke zerfallen rücksichtlich der Winkelrelationen in die oben angegebenen vier Typen.

§ 7.

Vierecke mit umlaufenden Seiten.

Es sei $ABCD$ ein Viereck, in dem die Seite AB umlaufend ist. Der Grenzkreis k_a ist entweder Diagonalkreis oder Tangentialkreis. Ist er eigentlicher Diagonalkreis, geht er also durch C, so ist $ABCD$ ein Viereck, das durch Zusammensetzung von zwei Dreiecken entsteht, die längs einer nicht umlaufenden Seite an einander stossen.

Eine derartige Zusammensetzung ist auf folgende Arten möglich. Enthält nur eines der beiden reducirten Dreiecke, z. B. ABC, eine umlaufende Seite AB, so erhalten wir eine der drei Winkelrelationen

$$\left.\begin{array}{llll} 0 \leqq \alpha < 2, & 0 \leqq \beta < 1, & 1 \leqq \gamma < 3, & 0 \leqq \delta < 3 \\ 0 \leqq \alpha < 4, & 0 \leqq \beta < 1, & 1 \leqq \gamma < 3, & 0 \leqq \delta < 1 \\ 0 \leqq \alpha < 2, & 0 \leqq \beta < 1, & 1 \leqq \gamma < 5, & 0 \leqq \delta < 1 \end{array}\right\}.$$

Uebrigens sind diese Vierecke, die durch Zusammensetzung von zwei reducirten Dreiecken entstehen, keineswegs immer selber reducirt (Vgl. § 8).

Zwei reducirte Dreiecke, von denen jedes eine umlaufende Seite

enthält, können entweder so zusammengesetzt werden, dass die umlaufenden Seiten nebeneinander liegen oder so, dass sie gegenüber liegen. In beiden Fällen gelangen wir zu Vierecken, die nicht immer reducirt sind (vgl. § 8). Die Winkelrelationen sind

$$0 \leqq \alpha < 2; \quad 0 \leqq \beta < 1, \quad 0 \leqq \delta < 1, \quad 2 \leqq \gamma < 2 + \alpha + \beta + \delta$$

und

$$0 \leqq \alpha < 1, \quad 1 \leqq \beta < 3, \quad 0 \leqq \gamma < 1, \quad 1 \leqq \delta < 3;$$

im ersten Fall sind AB und AD, im zweiten AB und CD die umlaufenden Seiten.

Es bleiben noch die Fälle, in denen k_a kein eigentlicher Diagonalkreis ist, resp. in denen ein derartiger Diagonalkreis auch für keine andere umlaufende Seite existirt. Hier haben wir folgende Möglichkeiten gesondert zu betrachten. Es können erstens k_a und k_b Tangentialkreise sein, es kann einer von ihnen ein Tangentialkreis sein, und es können drittens beide Kreise uneigentliche Diagonalkreise sein.

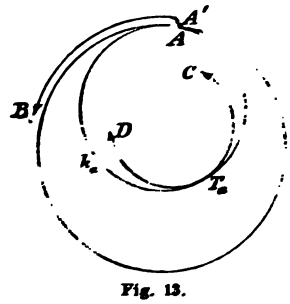


Fig. 13.

Sind beide Kreise k_a und k_b (Fig. 13) Tangentialkreise, so liegt der Kreis $CD = t$ ganz innerhalb des Kreises $AB = s$. Sind T_a und T_b die Berührungspunkte von k_a und k_b mit CD, so folgt sofort aus § 4, dass AD und BC nicht umlaufend sind, und dass sich, wenn A und D, resp. B und C beide convex sind, das Viereck durch Abtrennung von Kreisscheiben längs AD resp. BC reduciren lässt.

Die Seite CD kann umlaufend sein, dann lässt sich aber aus dem Viereck im Allgemeinen ein Kreisring ausschalten; dies hört ersichtlich erst dann auf, wenn entweder AB (Fig. 14) und CD beide einfach umlaufend sind und AD und BC sich zwischen s und t kreuzen oder wenn nur eine der beiden Seiten umlaufend bleibt. Dem ersten Fall entspricht *ein reducirtes Viereck mit zwei einfach umlaufenden Gegenseiten**).

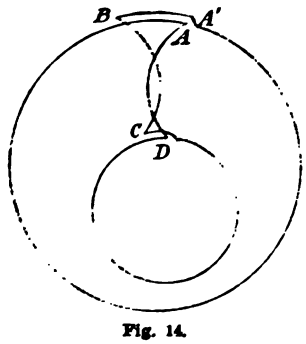


Fig. 14.

Um die Grenzen für die Winkel zu bestimmen, transformiren wir das Viereck so in ein kreisverwandtes, dass der Kreuzungspunkt von AD und BC ins Unendliche fällt. Man erkennt auf diese Weise leicht, dass

*) Dies Viereck lässt sich auf keine Weise in weniger als vier Dreiecke zerlegen (vgl. S. 11).

$$0 \leqq \alpha + \beta < 1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \gamma + \delta < 1$$

die bezüglichen Winkelrelationen sind.

Im besondern folgt also, dass es reducirte Vierecke mit zwei umlaufenden Seiten giebt, in denen jeder Winkel den Werth Null hat.

Ist die Seite CD nicht umlaufend, so ist im Viereck $ABCD$ nur AB umlaufend. Alsdann können wir, wie wir bereits wissen, von den Winkeln A und D, B und C mindestens je einen durch Reductionsprocesse concav machen. Sind D und C concav, so können A und B convex sein; wir erhalten ein *reducirtes Viereck mit einfach umlaufender Seite*, dessen Winkel den Relationen

$$0 \leqq \alpha < 1 + \delta, \quad 0 \leqq \beta < 1 + \gamma, \quad 0 \leqq \gamma < 1, \quad 0 \leqq \delta < 1$$

genügen. Ist von den Winkeln D und C einer, z. B. D convex, aber C concav, so erhalten wir die Relationen

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta < 1 + \gamma, \quad 0 \leqq \gamma \leqq 1, \quad 0 \leqq \delta < 1 + \alpha$$

und wenn schliesslich C und D beide convex sind, so folgt

$$0 \leqq \alpha < 1, \quad 0 \leqq \beta < 1, \quad 0 \leqq \gamma < 1 + \beta, \quad 0 \leqq \delta < 1 + \alpha.$$

Ist zweitens der Kreis k_a ein Diagonalkreis, so geht er (Fig. 15) durch D, und da A und D in dem nämlichen Blatt liegen, so kann AD nicht umlaufend sein. Der Winkel D ist convex. Weiter folgt, dass, wenn beide Winkel A und D convex sind, längs AD eine Kreisscheibe abgetrennt werden kann, daher kann man das Viereck so lange reduciren, bis der Winkel A concav geworden ist. Der Winkel D kann an und für sich noch jede beliebige Grösse erhalten. Es ist aber zu bemerken, dass wenn D ein Windungspunkt ist, das Viereck im Allgemeinen durch Ausschaltung einer Kreisscheibe längs einer von D nach AB gehenden Transversalen reducirt werden kann. Wir erhalten im Einzelnen folgende Vierecke:

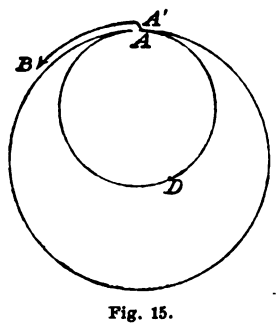


Fig. 15.

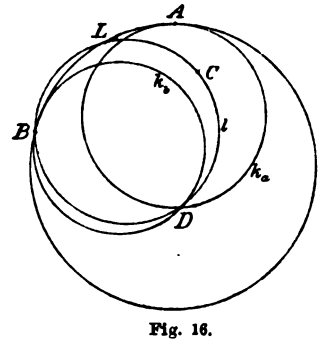


Fig. 16.

Sind zunächst (Fig. 16) k_a und k_b Diagonalkreise, so sind D und C beide convex, A und B concav. Wir beweisen zunächst, dass in diesem

Fall CD nicht umlaufend ist. Ist nämlich CD umlaufend, so kann zunächst der Kreis $CD=u$ nicht innerhalb des Kreises $AB=s$ liegen, da sonst einer der eben betrachteten Fälle vorliegen muss, dass k_a und k_b Tangentialkreise sind. Der Kreis $CD=u$ müsste daher den Kreis $AB=s$ nothwendig schneiden, und dies könnte nur in einem Punkt der Verlängerung von AB über B hinaus geschehen, da eigentliches Schneiden ausgeschlossen ist. Wir können aber auch B mit D durch einen in B berührenden Kreis k*) verbinden, und es liegt C sicher ausserhalb dieses Kreises, da sonst k ein eigentlicher Diagonalkreis wäre; der Kreis k_b schliesst daher den Kreis k vollständig ein. Hieraus folgt, dass der Kreis l, der durch B, C und D geht, bei B zunächst ausserhalb des Kreises s verläuft; er schneidet daher zwischen B und C den Kreis s noch einmal in L. Demnach muss auch jeder Kreis, der durch C und D geht, und nicht ganz innerhalb s liegt, die Seite AB in einem zwischen A und B gelegenen Punkt treffen; und damit ist bewiesen, dass die Seite CD nicht umlaufend ist.

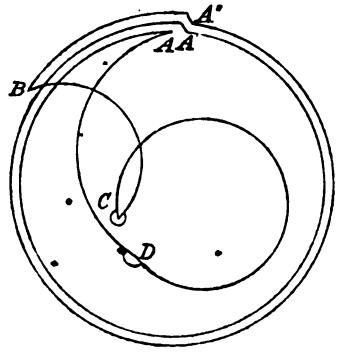


Fig. 17.

Das Viereck ist stets reducirbar, so lange einer der Punkte D resp. C ein Windungspunkt ist. Andrerseits kann die Seite AB, wie man leicht nachweisen kann, und wie überdies Fig. 17 veranschaulicht, zweifach umlaufend werden.

Wir sind somit zu einem *reducirten Viereck mit einer eventuell zweifach umlaufenden Seite* gelangt, dessen Winkel den Relationen genügen

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta \leqq 1, \quad 1 \leqq \gamma < 2, \quad 1 \leqq \delta \leqq 2.$$

Es bleibt endlich noch der Fall zu erledigen, dass k_b ein Diagonalkreis und k_a ein Tangentialkreis ist. Die Seite CD (Fig. 13, S. 14) verläuft jetzt nothwendig innerhalb des Kreises $AB=s$ und kann daher nicht umlaufend sein. Ist der Punkt C ein Windungspunkt, so lässt sich das Viereck durch Ausschaltung einer Kreisscheibe reduciren. Wir gelangen daher zu einem *reducirten Viereck mit einfach umlaufender Seite*, dessen Winkel den Relationen genügen

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \qquad 0 \leqq \delta < 1 + \alpha, \quad 0 \leqq \beta < 1, \quad 1 \leqq \gamma < 2$$

oder

$$0 \leqq \alpha \leqq 1 + \delta, \quad 0 \leqq \delta < 1, \qquad 0 \leqq \beta < 1, \quad 1 \leqq \gamma < 2.$$

Die hier gefundenen Relationen sind nun aber sämmtlich Specialfälle der Relationen, die wir für die durch Zusammensetzung entstehen-

*) In Fig. 16 ist k_b durch k zu ersetzen.

den Vierecke gefunden haben. Wir gelangen damit zu folgendem Schlussresultat:

Es giebt reducirte Vierecke mit einer und mit zwei einfach umlaufenden Seiten; diese sind entweder anliegend oder gegenüberliegend; überdies giebt es eine Gattung reducirter Vierecke mit einer doppelt umlaufenden Seite. Jedes nicht reducirte Viereck mit umlaufenden Seiten kann aus einem reducirten Viereck — mit oder ohne umlaufende Seiten — durch Erweiterungsprocesse abgeleitet werden.

§ 8.

Die Stellung der reducirten Polygone.

Bereits im Eingang dieser Arbeit wurde darauf hingewiesen, dass wir von den Reductionsprocessen besonders deshalb Gebrauch machen, weil sie ein bequemes Hilfsmittel der Untersuchung darbieten. Es kommt ihnen jedoch insofern eine darüber hinaus gehende geometrische Bedeutung zu, als sie lehren, dass Umlaufszahlen und Windungszahlen immer *zugleich* um zwei Einheiten wachsen.

Betrachten wir z. B. ein Dreieck ABC und ändern, wie in § 3 nur den Winkel C, indem wir A und B constant lassen, so erhalten wir continuirlich alle Dreiecke, von $\gamma = 0$ bis $\gamma < 1 + \alpha + \beta$; und wenn nun γ noch weiter wachsen soll, so treten in A und B gleichzeitig Windungspunkte auf, d. h. es wächst α und β sprungweise um je 2. Ebenso ist ersichtlich, dass wenn wir γ festhalten, und α und β zugleich wachsen lassen, ein Wachsthum von α um 2 nothwendig ein gleichzeitiges Wachsthum von β um 2 bewirkt. Denken wir uns andrerseits, dass, die Seite BC und gleichzeitig der Winkel A eines Dreiecks sich vergrössert, während die übrigen Winkel constant bleiben, so wird, sobald die Seite um einen vollen Umlauf zugenommen hat, sich der Winkel gerade um 2π vergrössert haben. Betrachten wir endlich wieder das Viereck $ABCD$, das wir in § 2 benutzten, um die Einhängung eines Kreisringes zu erläutern, so können wir das Viereck mit den beiden umlaufenden Seiten AB und CD auch dadurch erzeugen, dass wir unter Festhaltung der Winkel die Seiten AB und CD stetig wachsen lassen, bis beide um je einen vollen Umlauf zugenommen haben.

Neben den Polygonen mit umlaufenden Seiten, die wir uns aus den reducirten Polygonen durch Einhängung von Kreisscheiben und Kreisringen erzeugt dachten, sind wir auf Polygone gestossen, die umlaufende Seiten enthalten, und einen Reductionsprocess nicht zulassen. Wir wollen versuchen, ob wir von einem höheren Gesichtspunkte beide Arten von Polygonen einheitlich auffassen können. Man denke sich

z. B. (Fig. 18) ein Viereck $ABCD$. Wir variiren jetzt, indem wir die Eckpunkte festhalten, die Seiten, wie es in § 4 geschehen ist.

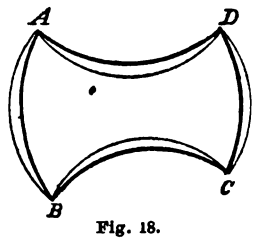


Fig. 18.

Dabei tritt zum Unterschied von den Dreiecken die Thatsache auf, dass wenn die Winkel A, B und C constant bleiben, auch der vierte Winkel seinen Werth behält*). Diese Variation können wir fortsetzen, bis die ins Innere hinein sich ausbreitenden Bogen AD und BC zusammentreffen, und über einander hinweggehen. Alsdann stellen die vier einfachen Kreisbogen AB, BC, CD, DA nicht mehr ein einfach zusammenhängendes Viereck mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vor; wir erhalten eine einfach zusammenhängende Fläche mit den gegebenen Winkeln nur so, indem wir analog wie in § 3 beim Dreieck ABC, in zwei benachbarten Punkten, z. B. A und D Windungspunkte annehmen oder indem wir die Seiten AB und CD als einfach umlaufende Seiten betrachten. Wann das eine und das andere zutrifft, hängt davon ab, ob die Kreise AB und CD einander einschliessen oder nicht. Das zuletzt erhaltene Viereck ist dasjenige, das wir in § 7 als reducirtes Viereck abgeleitet haben. Wir können aber auch diese Vierecke in gewissem Sinn als reducirbar betrachten, wenn wir *Vierecke mit negativen Flächentheilen* zulassen**); rechnen wir das zwischen den beiden Seiten AD und BC liegende Stück negativ, so entsteht aus dem so bestimmten Viereck $ABCD$ dasjenige, das in A und D Windungspunkte hat, durch Einhängung einer Vollebene längs AD, das andere dagegen durch Einhängung eines Kreisringes. Umgekehrt sind diese Vierecke jetzt reducirbar und gestatten die Ausschaltung einer Vollebene, resp. eines Kreisringes, wodurch sie in die Vierecke übergehen, die Fig. 19 und 20 darstellen.

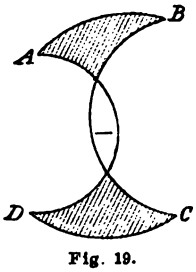


Fig. 19.

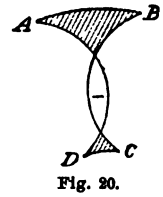


Fig. 20.

Analog können wir die reducirten Dreiecke mit umlaufender Seite deuten; auch sie werden reducirbar, wenn wir Dreiecke mit negativen

*) Dies gilt allgemein für Polygone von gerader Seitenzahl.

**) Diese naheliegende Begriffsbestimmung findet sich in analoger Form bei Herrn Poincaré; vgl. Acta math. Bd. 1, S. 18.

Flächentheilen zulassen. So entsteht aus dem Dreieck der Fig. 21, indem wir das zwischen den Kreisbogen liegende Gebiet als negativ

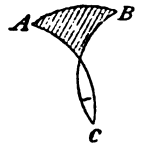


Fig. 21.

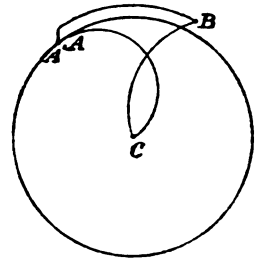


Fig. 22.

betrachten, das Dreieck der Fig. 22 durch Einschaltung einer Kreisscheibe und umgekehrt, und wir können daher in diesem Sinne alle Dreiecke mit umlaufenden Seiten als reducirbar betrachten.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen diesem Dreieck und einem andern reducirten Dreieck ohne umlaufende Seite ist allerdings vorhanden. In einem gewöhnlichen reducirten Dreieck ohne umlaufende Seiten kann *jede* Seite durch Einschaltung von Kreisscheiben umlaufend gemacht werden; in einem Dreieck mit negativen Flächentheilen ist dies jedoch nur für diejenige Seite der Fall, die dem negativen Winkel gegenüberliegt; für die andern sind die allgemeinen morphologischen Bedingungen, die hierfür nöthig sind, nicht erfüllt. Um dies zu ermitteln, hat man natürlich das Dreieck zunächst in ein Dreieck mit durchaus positivem Gebiet zu verwandeln.

Aehnliche Verhältnisse liegen nun bei allen reducirten Vierecken vor, die umlaufende Seiten enthalten. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass die in § 7 abgeleiteten Vierecke mit umlaufenden Seiten, die sich durch Zusammensetzung von zwei Dreiecken ergeben, nicht immer reducirt sind. Sie werden sogar bei beliebiger Zeichnung im Allgemeinen reducirbar ausfallen; will man ein reducirtes Viereck erhalten, so bedarf es bereits besonderer Aufmerksamkeit, und durch stetige Variation der Seiten gehen, wie oben, auch diese Vierecke wieder in reducirbare über. In Folge dessen empfiehlt es sich auch hier, diese Vierecke durch Vierecke ohne umlaufende Seiten, und mit negativen Gebietstheilen zu ersetzen.

Wir können von dieser Auffassung noch nach einer anderen Richtung Nutzen ziehen. Wir wollen zeigen, wie sich im Anschluss hieran die in § 7 abgeleiteten reducirten Vierecke mit umlaufenden Seiten durch eine sehr einfache Ueberlegung ergeben. In einem beliebigen Viereck $ABCD$ können wir — wir setzen die morphologischen Bedingungen als erfüllt voraus — folgende Einschaltungsprocesse vornehmen. Wir können einerseits Transversalen ziehen, die von C oder

von C und D nach AB laufen und längs derselben Kreisscheiben einschalten, alsdann sind andere Transversalen morphologisch ausgeschlossen. Wir können zweitens zwei Transversalen nach zwei verschiedenen Seiten ziehen; wir können einerseits AB und BC mit D verbinden, andrerseits AB mit C oder D und CD mit A oder B, und wiederum Einhängungen von Kreisscheiben vornehmen; ist dies geschehen, so sind wiederum weitere Transversalen unzulässig. Endlich können wir auch zwischen AB und CD einen Kreisring einschalten; und es sind auch damit weitere Einschaltungsprocesse unmöglich gemacht. Dies sind aber dieselben Möglichkeiten für die Seitenumläufe, der reducirten Vierecke, die wir in § 7 abgeleitet haben; und in der That ist ersichtlich, dass sich die in § 7 beschriebenen Polygontypen ergeben, wenn wir die Gestalt des Viereckes $ABCD$ unter Festhaltung der Winkel so variiren, dass es negative Flächentheile erhält, so dass erst durch die genannten Einschaltungsprocesse ein Viereck mit durchaus positivem Gebiet entsteht. *Jedem dieser Einschaltungsprocesse entspricht daher einer der in* § 7 *abgeleiteten Viereckstypen mit umlaufenden Seiten; man kann daher die bezüglichen Vierecke ohne Weiteres aufstellen, wenn die bezüglichen Einschaltungsprocesse bekannt sind.* Wann diese Einschaltungsprocesse morphologisch möglich sind, hängt einerseits von den Winkeln, andrerseits von der Lage der nämlichen Hilfskreise ein Viereck ab, die wir oben als Grenzkreise bezeichnet haben.

In dieser Hinsicht sind alsdann die Resultate des § 7 in dem Sinne zu deuten, dass gerade sie uns die Bedingungen liefern, die für die morphologische Zulässigkeit der Einschaltungstransversalen bestehen.

Es ist klar, dass diese Bemerkungen für beliebige Kreisbogenpolygone Geltung behalten und damit eine Methode liefern, die für die Aufstellung aller reducirten Polygontypen angewandt werden kann.

Göttingen, Anfang August 1893.

Sulla razionalità delle involuzioni piane.*)

Nota di

GUIDO CASTELNUOVO a Roma.

Se le coordinate del punto generico di una superficie F si possono rappresentare come funzioni razionali di due parametri, vale a dire (introducendo coordinate omogenee) se tra un punto (x_1, x_2, x_3, x_4) di F ed un punto (α, β, γ) di un piano passano quattro relazioni del tipo

$$\varrho x_i = f_i(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

dove le f sono forme di uno stesso grado, allora ad un punto generico (α, β, γ) del piano corrisponde *un solo* punto x di F. Viceversa ad un punto x di F corrispondono uno o più punti del piano, secondo che le quattro equazioni

$$f_i(\alpha, \beta, \gamma) = \varrho f_i(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \tag{2}$$

non ammettono altre soluzioni oltre alla

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0,$$

oppure ammettono altre soluzioni. Nel primo caso tra i punti della superficie ed i punti del piano passa una corrispondenza algebrica *biunivoca*, la superficie è rappresentabile punto per punto sopra un piano, è (come diremo brevemente) *razionale*. Nel secondo caso, detto $n \geqq 2$ il numero delle soluzioni (α, β, γ) delle equazioni (2) (compresa la soluzione $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$), si ottengono al variare di $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ ∞^2 gruppi di n punti di un piano, tali che un punto generico del piano appartiene ad un solo gruppo; se diamo il nome di *involuzione piana d'ordine n* al sistema degli ∞^2 gruppi, possiamo dire che la superficie F è rappresentabile biunivocamente sui gruppi di una involuzione piana.

Ora si può domandare: *Sarà possibile, anche in questo secondo caso, di stabilire una corrispondenza algebrica biunivoca fra i punti di F e i punti di un piano?* o in altre parole: *si potranno rappresentare*

*) Un estratto di questa Nota trovasi inserito, sotto lo stesso titolo, nei Rendic. dell' Accad. dei Lincei, ottobre 1893.

(elemento per elemento) *i gruppi di una involuzione piana d'ordine n sui punti di un piano?* La questione qui proposta ammette una *risposta affermativa;* ciò mi propongo di dimostrare nel presente lavoro.

Le involuzioni piane, che finora i geometri hanno considerato sotto tale aspetto, sono (quasi esclusivamente) quelle di ordine $n = 2$; esse offrono subito un mezzo di studio che non si applica nelle involuzioni superiori. Infatti una involuzione di secondo ordine nel piano (o in qualsiasi altra forma algebrica) definisce una corrispondenza birazionale involutoria che muta ogni punto nel punto *coniugato;* sicchè la teoria delle corrispondenze birazionali dà gli elementi per lo studio di quelle involuzioni.

Partendo da questo concetto il Sig. Bertini in un lavoro importante*) si è proposto di determinare quali siano i tipi *irriduttibili* di involuzioni piane di secondo ordine, quei tipi cioè che non possono dedursi l'uno dall' altro mediante trasformazioni birazionali, ma che mediante tali trasformazioni possono condurre ad ogni involuzione di secondo ordine. Il Bertini trova che i nominati tipi sono i quattro seguenti.

a) *Omologia involutoria;*

b) *Involuzione proveniente da una trasformazione piana involutoria di Jonquières* (che lascia inalterate, o accoppia, le rette di un determinato fascio);

c) *Involuzione costituita dalle coppie di intersezioni delle cubiche passanti per sette punti fissi;*

d) *Involuzione determinata dalle coppie di punti che presentano una sola condizione alle curve del settimo ordine con otto punti doppi fissi.*

I tipi qui riuniti, dànno, come si vede facilmente**), involuzioni *razionali;* quindi per le involuzioni di coppie di punti, la questione a cui la presente Nota è dedicata, dovrebbe ritenersi come risoluta, se i risultati del Sig. Bertini non fossero stati ottenuti, come lo stesso autore avverte, sotto restrizioni, che sarebbe troppo lungo l'enunciar qui. Ora quelle restrizioni possono forse esser tolte con qualche modificazione ai procedimenti del Sig. Bertini; ma il ragionamento si complicherebbe certo in guisa da render consigliabile la ricerca di un metodo più semplice.

---

*) *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* (Annali di Matem. Serie II^a, Tomo 8^o, 1877); si veda pure un secondo lavoro dello stesso A. *Sulle trasformazioni univoche piane* (Rendic. Istituto Lombardo, 1880).

**) Nöther, *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (Sitzungsb. d. phys. med. Societät, Erlangen 1878); Lüroth, *Rationale Flächen und involutorische Transformationen* (Freiburg 1889); Bertini, *Deduzione delle trasformazioni* ... (Rend. Ist. Lomb. 1889).

Un metodo più semplice e più generale (perchè si applica alle trasformazioni birazionali cicliche d'indice anche superiore a 2) fu proposto qualche anno dopo (1885) dal Sig. Kantor*); per la sua importanza credo opportuno di darne qui un cenno. A base della ricerca sta un teorema fondamentale nella *geometria sul piano* (geometria il cui gruppo fondamentale di operazioni è il gruppo delle trasformazioni Cremoniane): *Se una trasformazione Cremoniana tra due piani muta la curva C del primo piano nella curva C_1 del secondo piano, la trasformazione muta il sistema aggiunto puro a C nel sistema aggiunto puro a C_1;* dove per *sistema aggiunto puro* ad una curva C di ordine n e genere $p > 1$, si deve intendere il sistema lineare ∞^{p-1} delle curve di ordine $n-3$ aggiunte a C, dalle quali si sia staccata (se esiste) ogni curva che formi parte di tutte le aggiunte stesse, (quando siano riduttibili)**). Data ora una trasformazione birazionale ciclica del piano, si costruisca (ciò è possibile in infiniti modi) un sistema lineare di curve $|C|$, il quale sia mutato in sè dalla trasformazione. Allora la trasformazione dovrà mutare in sè anche il sistema $|C'|$ aggiunto puro a $|C|$, poi il sistema $|C''|$ aggiunto puro a $|C'|$, e così via. Siccome gli ordini dei successivi aggiunti vanno decrescendo, l'operazione avrà un termine. Valendosi degli ultimi sistemi a cui si arriva, si riesce a dimostrare che:

Ogni trasformazione birazionale ciclica del piano può sempre ridursi (mediante trasformazioni birazionali) *ad una trasformazione la quale muti in sè uno dei seguenti sistemi lineari:*

a) *la rete delle rette* (collineazione);

b) *un fascio di rette* (trasformazione di Jonquières);

---

*) *Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques* (Comptes rendus de l'Acad. d. Sciences, février 1885).

**) Il teorema si dimostra nel modo più semplice ricorrendo alle note formole che legano i caratteri di una curva algebrica ai caratteri della curva trasformata mediante una trasformazione Cremoniana; si veda a questo proposito il § 31 della Nota del Sig. Nöther, *Rationale Ausführung der Operationen* . . . (Math. Ann. 23, 1883). Alcune applicazioni di quel teorema alla geometria sul piano (diverse dalle applicazioni del Kantor) si trovano nelle mie *Ricerche generali sopra i sistemi lineari* (Memorie dell' Accad. d. Scienze di Torino, serie II, tomo 42; 1891), nelle quali accenno di volo alla Nota del Kantor, perchè di questa ebbi conoscenza soltanto durante la correzione delle bozze di stampa. Ma non ho difficoltà a ripetere anche qui, se il Sig. K. lo desidera, che *a lui spetta indubbiamente la priorità nel concetto di servirsi dei successivi sistemi aggiunti per lo studio delle trasformazioni birazionali cicliche.* Debbo però avvertire che i sistemi aggiunti d'ordine $n-3$, $n-6$ . . . si trovano adoperati fino dal 1873 (precisamente per una dimostrazione del teorema di Riemann-Roch) in una Nota dei Sig^{ri} Brill e Nöther inserita nei Göttinger Nachrichten.

c) *un sistema* ∞^r $(r > 1)$ *di cubiche piane con* $9 - r$ *punti base*;

d) *un sistema* ∞^2 *di sestiche con otto punti base doppi.*

Partendo da questo teorema si possono fissare tutti i tipi di trasformazioni birazionali cicliche di indice n (per $n = 2$ si ritrovano i tipi del Bertini). A tale ricerca è dedicata una Memoria del Sig. Kantor presentata nel 1883 ad un concorso bandito dall' Accademia delle Scienze di Napoli, e premiata; però modificata in seguito da l'autore, almeno nella parte contenente i risultati a cui qui alludo, la quale trovasi inserita nel volume dagli Atti di quell' Accademia che fu pubblicato nei primi mesi del 1892*). La Memoria è ricca di importanti risultati, e di procedimenti ingegnosi coi quali il problema viene trattato sotto diversi aspetti; però varie lacune che qua e là si avvertono, lasciano la persuasione che sul problema delle trasformazioni cicliche non sia detta ancora l'ultima parola, e il desiderio di veder trattata nuovamente l'importante questione con maggior chiarezza ed uniformità.

Per chiudere questa rassegna dei lavori pubblicati sinora intorno al tema della razionalità delle involuzioni piane, debbo ricordare una Nota (già citata) del Sig. Lüroth, il quale, avendo già dimostrata la razionalità delle involuzioni sulla retta**), nel nuovo lavoro (1889) cerca di trattare in modo analogo il problema delle involuzioni piane, e riesce a dimostrare la razionalità delle involuzioni d'ordine 2 (tipi di Bertini), e di una particolare involuzione del terzo ordine derivante da una trasformazione ciclica d'indice 3.

Quando mi sono proposto di dimostrare la razionalità delle involuzioni piane d'ordine qualunque, non potevo far grande assegnamento sui lavori nominati, poichè questi occupandosi di involuzioni provenienti da trasformazioni birazionali cicliche, si valevano delle note proprietà delle trasformazioni Cremoniane, le quali non intervengono nelle involuzioni generali. Ho dovuto perciò ricorrere ad altri concetti che ora esporrò brevemente.

Volendo esaminare se la superficie F, i cui punti rappresentano i gruppi di una involuzione, è razionale, conviene di fissar l'attenzione sui sistemi lineari di curve che giacciono su F, e di cercare se a tali sistemi si applichino le proprietà più spiccate appartenenti ai sistemi lineari di curve sul piano; in secondo luogo si deve esaminare se alcune

---

*) *Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques*, 4me partie, (Atti dell' Acc. di Napoli serie II, vol 4°). Le prime tre parti della Memoria si riferiscono alle trasformazioni cicliche più semplici (dal punto di vista proiettivo) e sono inserite nel vol. 1° (serie II, 1888) della stessa raccolta.

**) *Beweis eines Satzes über rationale Curven* (Math. Annalen Bd. 9).

di queste proprietà siano *caratteristiche per una superficie razionale*, bastino cioè a decidere se la superficie sulla quale valgono, sia razionale. La prima ricerca (alla quale è dedicato il Capitolo I del presente lavoro) è resa facile dal fatto che un sistema lineare di curve su F, ha per corrispondente sul piano un sistema lineare di curve *appartenente alla data involuzione*, (vale a dire un sistema lineare tale che le sue curve passanti per un punto generico del piano, passano per tutto quel gruppo della involuzione a cui il dato punto appartiene); e dei sistemi lineari di curve piane sono note le principali proprietà. Così si trovano le due seguenti proposizioni sulla superficie F:

1) *Se un sistema lineare di curve giacenti sulla superficie F è normale**), *allora la serie lineare* (di gruppi) *segata sopra una curva generica del sistema dalle rimanenti curve è completa* (è una Vollschaar).

2) *Sulla superficie F esiste un sistema lineare la cui dimensione supera il genere della curva generica.*

Ciascuna delle due proprietà, presa a sè, non basta certo a caratterizzare una superficie razionale; perchè la 1) appartiene (a quanto pare), oltre che alle superficie razionali, anche a tutte le superficie generali di genere (Flächengeschlecht) superiore a zero, non però alle rigate irrazionali; e la 2) appartiene a tutte le rigate, ma non appartiene alle superficie di genere superiore a zero. Ora si può chiedere *se ogni superficie la quale presenti insieme le proprietà* 1) *e* 2) *sia razionale.* Ecco una questione, nella quale più non si parla di involuzioni piane, ma dalla cui risposta dipende quella del problema sulle involuzioni. Alla questione si può dare una risposta affermativa, come è dimostrato nel Capitolo II. E la dimostrazione si fonda sul fatto che l'esistenza del sistema 2) sulla superficie F trae con sè l'esistenza di un secondo sistema lineare su F che ha la stessa proprietà del sistema primitivo, ma il genere (della curva generica) inferiore. Con questo procedimento di riduzione applicato più volte, si arriva finalmente ad un sistema lineare sulla superficie F, il quale ha un genere così basso che la razionalità di F segue senz' altro; e segue quindi la razionalità della involuzione piana.

Come si vedrà, la razionalità della involuzione si dimostra, senza assegnare i tipi irriduttibili a cui si possono ridurre le involuzioni di dato ordine; rimane dunque ancora aperto (per $n > 2$) il problema dei tipi, il quale forse per n elevato ammetterà soluzioni alquanto complicate. Piuttosto la via che io seguo, conduce subito a proprietà proiettive

*) Si dice che un sistema lineare di curve ∞^r è *normale*, quando non esiste un sistema ∞^{r+1} che lo contenga ed abbia lo stesso grado (numero delle intersezioni variabili di due curve generiche) del sistema proposto. Questa definizione si trova nelle *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* (I, 2) del Sig. Enriques (Memorie dell' Acc. d. Scienze di Torino, serie II, tomo 44; 1893).

delle involuzioni di dato ordine e di data classe (classe è il numero delle coppie di punti che stanno contemporaneamente in un gruppo della involuzione ed in una retta assegnata); si trova ad es. un limite superiore all' ordine di una involuzione di data classe (> 0), e si costruiscono le involuzioni delle prime classi. Ma queste ricerche saranno esposte in un altro lavoro.

Capitolo I.

1. Per *involuzione piana d'ordine* $n (\geq 2)$ si intende una varietà algebrica doppiamente infinita di gruppi di n punti (mutuamente *coniugati*) sopra un piano, varietà tale che un punto generico del piano appartenga ad uno e ad uno solo di quei gruppi.

Con ciò non si esclude l'esistenza di punti particolari (*fondamentali*) in numero finito, ciascuno dei quali appartiene ad ∞^1 gruppi della involuzione*). Gli ∞^1 gruppi di $n-1$ punti coniugati di un punto fondamentale riempiono una curva algebrica (*fondamentale*) che può esser semplice o composta, ed aver tra le sue componenti anche dei *punti* (quando ogni gruppo contenente il punto fondamentale abbia qualche altro dei suoi punti in una posizione fissa). L'ordine della curva fondamentale corrispondente ad un punto fondamentale (cioè il numero dei punti coniugati a questo che stanno sopra una retta generica) può dirsi ordine del punto fondamentale.

*) Che i punti fondamentali siano in numero finito, può esser dedotto dalle equazioni rappresentative della involuzione, nel seguente modo. Consideriamo tre equazioni (in coordinate piane non omogenee) del tipo

$$(1) \qquad \frac{f_i(\alpha, \beta)}{f_4(\alpha, \beta)} = \frac{f_i(\alpha_0, \beta_0)}{f_4(\alpha_0, \beta_0)} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

dove f_1, f_2, f_3, f_4 sono funzioni razionali intere; attribuendo ad α_0, β_0 determinati valori si ottengono tre equazioni in α, β le quali ammettono un certo numero n di soluzioni, e tra queste è compresa la soluzione (α_0, β_0); gli n punti (α, β) costituiscono il gruppo della involuzione determinato dal punto (α_0, β_0) (si vedano a questo proposito le prime righe della prefazione). Ora dalle tre equazioni è possibile di dedurre mediante operazioni razionali (eliminazione di α o β, ricerca di massimo comun divisore, e divisione per $\alpha - \alpha_0$ o $\beta - \beta_0$) due equazioni del tipo

$$(2) \qquad \begin{cases} A_0 \alpha^{n-1} + A_1 \alpha^{n-2} + \cdots + A_{n-1} = 0, \\ B_0 \beta^{n-1} + B_1 \beta^{n-2} + \cdots + B_{n-1} = 0 \end{cases}$$

(dove i coefficienti sono funzioni intere di α_0, β_0), le quali abbiano come radici rispettivamente le coordinate α e le coordinate β degli $n-1$ punti coniugati con (α_0, β_0). Un punto fondamentale (α_0, β_0) deve annullare colle sue coordinate tutti i coefficienti di una almeno delle equazioni (2). E poichè si possono ritener soppressi i polinomi fattori comuni di tutte le A, e quelli di tutte le B, si vede che i punti fondamentali sono certo in numero finito.

2. Mentre un punto si muove lungo una curva qualsiasi C nel piano di una involuzione I d' ordine n, gli $n-1$ punti coniugati descrivono una curva C' (semplice o composta), che dicesi *coniugata* o *trasformata* di C nella trasformazione $(n-1, n-1)$ che la I definisce.

Se la curva C passa per un punto fondamentale di I, la curva fondamentale corrispondente può essere inclusa in C' o esserne esclusa, secondo la convenzione che piace di fare. Noi ci atterremo alla seconda soluzione (come per le trasformazioni Cremoniane), e riterremo che nella trasformata di una curva non debbano entrare curve fondamentali*).

In particolare una retta generica R ha una curva coniugata R' di un certo ordine ϱ, avente in ogni punto fondamentale una molteplicità uguale all' ordine di quel punto; al variare di R si ottengono così ∞^2 curve R' d' ordine ϱ e comportantisi ugualmente nei punti fondamentali, che sono i soli punti del piano comuni a tutte le R'.

Quando si conosca il valore di ϱ e siano noti gli ordini di tutti i punti fondamentali, allora si possono calcolare l'ordine e le molteplicità (nei punti fondamentali) della curva C' trasformata di una curva C, in funzione degli analoghi caratteri di C. Infatti l'ordine di C' è il numero delle intersezioni (esterne ai punti fondamentali) della curva C con una curva R' coniugata ad una retta R; mentre la molteplicità di C' in un dato punto fondamentale è il numero delle intersezioni di C colla curva fondamentale corrispondente, purchè si tenga il debito conto delle intersezioni che cadono nei punti fondamentali.

Ora queste relazioni si potrebbero tradurre in formole senza difficoltà; ma a noi basta una osservazione che discende subito dalle cose dette. Se dopo di aver calcolato l'ordine e le molteplicità della curva C' trasformata di C, noi sostituiamo a C una seconda curva che abbia lo stesso ordine di C e si comporti come C in ciascun punto fondamentale**), la trasformata di questa seconda curva avrà, come è chiaro,

---

*) La equazione di C' si ottiene, come è chiaro, eliminando α_0, β_0 tra la equazione $\varphi(\alpha_0, \beta_0) = 0$ di C e le due equazioni (2) della nota precedente; e sopprimendo nella risultante i fattori che rappresentano curve fondamentali (se vi entrano).

**) La locuzione *due curve si comportano identicamente in un gruppo di punti*, ha (come è noto) un significato preciso. Nella ipotesi di molteplicità ordinarie vuol dire infatti che ciascun punto del gruppo è multiplo tante volte per la prima curva quanto per la seconda. Se invece le due curve hanno singolarità straordinarie nei punti del gruppo, si esige che esista una trasformazione birazionale, la quale muti le due curve in due curve di uno stesso ordine, dotate di soli punti multipli ordinari, ed aventi molteplicità uguali in ogni punto che sia o trasformato di un punto del gruppo, o punto fondamentale della trasformazione nel secondo piano.

lo stesso ordine di C', e come C si comporterà in ciascun punto fondamentale. Diremo dunque:

Due curve di uno stesso ordine le quali si comportino in identico modo nei punti fondamentali di I, *hanno come trasformate due curve di uno stesso ordine comportantisi in uno stesso modo nei punti fondamentali.*

3. Fra una curva C e la sua trasformata C' passa una tal relazione che ad ogni punto di C corrispondono $n-1$ punti di C', ed ogni punto di C' proviene da un solo punto di C. Se però C passa per $i\,(\leq n)$ punti di un gruppo di I, ciascuno di questi giace sulla C', e considerato sopra essa, ha per corrispondenti in C i rimanenti $i-1$ punti, ed è quindi multiplo secondo $i-1$ per C'; mentre ciascuno degli $n-i$ punti che compiono il gruppo, ha per corrispondenti su C i primi i punti, ed è quindi multiplo secondo i per C'*).

Ne viene in particolare che se C contiene gli n punti di un gruppo generico di I come punti semplici (o r-upli), i punti stessi sono $(n-1)$-upli (rispettiv. $(n-1, r)$-upli) per C'. E se C' contiene ∞^1 gruppi di I (che non abbiano punti fissi comuni a tutti i gruppi), la C' coincide colla C contata $n-1$ volte.

4. Un luogo algebrico di ∞^1 gruppi della involuzione I sarà detto *curva appartenente alla involuzione* (*Involutionscurve*); tale è per esempio la curva composta di una curva generica C e della sua trasformata C'. Fra le curve appartenenti alla involuzione I noi però non consideriamo (per maggiore semplicità) le curve fondamentali; supponiamo dunque che due gruppi distinti di I giacenti sopra una curva appartenente ad I non abbiano punti comuni.

Noi possiamo ora enunciar così l'ultima osservazione del n° precedente:

Una curva appartenente alla involuzione ha come trasformata sè stessa contata $n-1$ *volte.*

Ed altre proprietà discendono subito dalla definizione. Così se una curva appartenente alla I ha un punto multiplo (non fondamentale), la curva ha come equimultiplo ciascuno degli $n-1$ punti ad esso coniugati. E due curve appartenenti ad I si segano (oltre che nei punti fondamentali) soltanto in gruppi della involuzione.

Esistono pure sistemi lineari di cui ogni curva appartiene alla involuzione, o brevemente *sistemi appartenenti alla involuzione***). Le

*) E viceversa ogni punto i-uplo di C' che non sia fondamentale per I, ha i tra i suoi coniugati sulla curva C.

**) Un esempio di sistema lineare appartenente alla involuzione, è offerto

osservazioni precedenti dànno subito le prime proprietà di tali sistemi. Così si vede che *se un sistema appartenente ad* I *ha (fuori dei punti fondamentali di* I) *altri punti base, questi formano uno o più gruppi di* I, *essendo equimultipli due punti base appartenenti ad uno stesso gruppo;* che *le curve del sistema passanti per un punto generico del piano passano in conseguenza per gli* $n-1$ *punti coniugati;* e che *due curve generiche del sistema si segano* (fuori dei punti base) *soltanto in gruppi di* I.

Ma le più importanti proprietà dei sistemi appartenenti ad una involuzione si fondano sopra i due lemmi dei n^i 5 e 6, che servono di base alla nostra ricerca.

5. Consideriamo un fascio $|C|$ di curve irriduttibili*); per lo scopo che ci proponiamo possiamo supporre (senza introdurre restrizioni) di aver già trasformato il fascio (se occorre) in modo che i suoi punti base siano tutti punti multipli *ordinari* con tangenti distinte da curva a curva. Facciamo ora la ipotesi che nel fascio si trovino *due curve* D, E *appartenenti alla involuzione* I, e comportantisi in ciascun punto fondamentale di I come la curva generica del fascio. Non è escluso che il fascio abbia punti base esterni ai punti fondamentali di I, ma dalla ipotesi fatta segue che se tra quei punti base si trova un punto ad es. r-uplo ($r \geq 1$), saranno pure punti base r-upli gli $n-1$ punti coniugati (n° 4).

Ciò premesso trasformiamo le curve del fascio mediante la I. La curva D intanto (n° 4) ha come trasformata sè stessa contata $n-1$ volte, cioè una curva $(n-1)\,D$ la quale si comporta in modo perfettamente determinato nei punti fondamentali di I, e passa $(n-1)\,r$ volte per ciascuno degli n punti base r-upli nominati; (e altrettanto dicasi della E). D'altra parte la curva generica C del fascio ha come trasformata (n° 2) una curva C' che ha l'ordine della $(n-1)\,D$, e come questa si comporta nei punti fondamentali di I; e la C' passa

---

dalla definizione analitica di involuzione che trovasi nella prefazione. Infatti il sistema ∞^3

$$\sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i f_i(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

ha la proprietà che le sue curve passanti per un punto generico $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ del piano passano in conseguenza per gli $n-1$ punti coniugati (α, β, γ) definiti mediante le equazioni

$$f_i(\alpha, \beta, \gamma) = \varrho f_i(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0).$$

Altri esempi si troveranno in seguito.

*) Nel seguito quando si parla di un sistema lineare di curve, si sottintende che la curva generica del sistema è *irriduttibile.*

anch' essa $(n-1)r$ volte per quei punti base r-upli (in virtù del n° 3). Ne viene che C' sega $(n-1)D$, ossia D, *soltanto* nei punti base del fascio $|C|$*); e quindi che C' sega la curva generica di $|C|$ (la quale in quei punti base si comporta come D) *soltanto nei punti base stessi*. Dunque la curva (irriduttibile) del fascio $|C|$ che passa per un punto generico di C', forma parte di C'; *la C' si spezza in $n-1$ curve del fascio $|C|$*, e la curva somma $C+C'$ (che appartiene ad I) è composta di n curve del fascio stesso.

Ora sulle n componenti si possono fare due ipotesi:

1) O le n componenti coincidono ed allora *ciascuna curva del fascio $|C|$ appartiene alla involuzione* I;

2) O ciò non accade; chiamiamo $C, C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ le n componenti. Per ipotesi una di esse C ha come trasformata la curva composta delle rimanenti $n-1$; quindi il punto generico α di C ha i suoi coniugati distribuiti sulle curve $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$; ed è chiaro (per ragioni di simmetria) che uno dei coniugati, ad es. α_1, dovrà trovarsi su C_1, un altro α_2 su C_2, ... e l'ultimo α_{n-1} su C_{n-1}; ogni gruppo di I avente uno dei suoi punti sopra una delle n curve *mutuamente coniugate* $C, C_1, \ldots C_{n-1}$, ha un punto su ciascuna delle rimanenti. Sicchè due qualunque delle curve coniugate sono punteggiate univocamente**); e gli ∞^1 gruppi di n curve coniugate formano entro al fascio una involuzione, in cui la D e la E sono elementi n-upli. Ora entro ad una forma di prima specie (fascio), i gruppi di una involuzione d'ordine n dotata di due elementi n-upli D ed E sono (come è noto) i cicli di una proiettività ciclica Π di indice n, della quale D ed E sono gli elementi uniti. Se poi insieme alla Π che muta ogni curva C del fascio in una determinata curva (ad es.) C_1 del fascio stesso, noi consideriamo la corrispondenza univoca la quale, come fu già osservato, muta ogni punto α di C in un determinato punto α_1 di C_1, noi veniamo a costruire una trasformazione birazionale

*) Lo si vede subito sia calcolando il numero delle intersezioni di C' e di $(n-1)D$ in funzione dell' ordine di C e delle sue molteplicità nei punti base; sia osservando che ogni punto non fondamentale comune a C' e $(n-1)D$ ha uno dei suoi coniugati tanto su C, quanto su D.

**) Qui si suppone tacitamente che le n curve $C, C_1 \ldots C_{n-1}$ siano tutte distinte; però (oltre alla 1)) si potrebbe far la ipotesi che ciascuna di esse coincidesse con $h-1$ delle rimanenti (essendo h un divisore di n). Allora ogni gruppo di I si comporrebbe di $\frac{n}{h}$ gruppi di h punti appartenenti ad una involuzione I' d'ordine h; e la I si potrebbe considerare come una involuzione d'ordine $\frac{n}{h}$ costruita sopra I'. Ora, dato lo scopo finale delle nostre ricerche, è chiaro che si possono escludere queste *involuzioni di involuzioni*, senza introdurre con ciò restrizioni.

(α, α_1) del piano, ciclica d'indice n; essa dà come trasformati di un punto mediante le sue successive potenze i punti di un gruppo di I. La involuzione I che in tal modo proviene da una trasformazione birazionale ciclica, si dirà brevemente una *involuzione ciclica.*

Con questa locuzione il teorema ora dimostrato può enunciarsi:

a) *Se in un fascio si trovano due curve appartenenti ad una involuzione, allora ogni curva del fascio appartiene alla involuzione, a meno che questa non sia ciclica, nel qual caso può darsi che quelle due sole curve appartengano alla involuzione;* è chiaro però che se tre curve del fascio appartengono alla involuzione ciclica, ogni curva del fascio appartiene alla involuzione (perchè la Π è allora la identità).

Il teorema si estende subito ad un sistema lineare qualsiasi:

b) *Se in un sistema lineare* ∞^r *si trovano* $r+1$ *curve linearmente indipendenti che appartengano ad una involuzione, allora ogni curva del sistema appartiene alla involuzione, a meno che questa non sia ciclica.* Nell' ultimo caso la trasformazione birazionale ciclica che genera la involuzione, muta il sistema lineare in sè stesso, e può considerarsi quindi come una proiettività ciclica in uno spazio lineare a r dimensioni S_r, i cui elementi sono le curve del sistema. Gli elementi uniti della proiettività, vale a dire le curve del sistema appartenenti alla involuzione, o sono soltanto $r+1$, oppure formano uno o più sistemi lineari; e due sistemi distinti non hanno curve comuni.

Tenendo conto di queste considerazioni possiamo in fine enunciare il teorema:

c) *Se due sistemi lineari di curve aventi lo stesso ordine e comportantisi ugualmente negli stessi punti base, appartengono ad una involuzione, allora il sistema lineare di quell' ordine e della minima dimensione contenente quei due appartiene tutto alla involuzione, se questa non è ciclica; e la stessa conclusione si può trarre anche se la involuzione è ciclica, purchè si sappia che i due sistemi abbiano almeno una curva comune**).

6. Una lieve modificazione nel ragionamente del n° 5 ci conduce ad un altro teorema fondamentale per noi.

Si abbia di nuovo un fascio di curve $|C|$, e questa volta si sappia che alla involuzione appartiene una curva D del fascio (la quale si comporti come la curva generica nei punti fondamentali di I). Si sappia inoltre che quei punti base di $|C|$, che non cadono tra i punti fondamentali, formano uno o più gruppi di I (essendo ciascun gruppo

---

*) Si ricordi che in questi teoremi le curve che appartengono alla involuzione debbono comportarsi nei punti fondamentali di I come la curva generica del sistema.

composto di punti base equimultipli, dei quali gruppi uno almeno si componga di punti base *semplici* e distinti $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ *).

Ora coll' identico ragionamento fatto al n° 5, si vede subito che la trasformata C' della curva C generica del fascio si spezza in $n-1$ curve del fascio stesso. Queste o coincidono con C, ed allora *ogni curva del fascio appartiene ad* I; oppure, se sono distinte da C, indichiamole con $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$. Nell' ultima ipotesi si riconosce (come al n° 5) che due qualunque tra le n curve coniugate $C, C_1, \ldots C_{n-1}$ sono punteggiate univocamente (essendo coniugati nella I due punti corrispondenti); e che gli ∞^1 gruppi di n curve che si ottengono al variare di C formano una involuzione, della quale si conosce ora un solo elemento n-uplo D. Però anche questa volta l'involuzione è prodotta da una proiettività ciclica Π di indice n, e per dimostrarlo si ricorre al seguente ragionamento.

Al punto base semplice a considerato come elemento della curva C corrisponde sulla curva C_1 (punteggiata univocamente) un punto che deve esser coniugato ad a nella I, e quindi deve trovarsi tra i punti $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$; sia ad es. a_1. Le tangenti a C e C_1 in a, a_1 rispettiv. si corrispondono in quella proiettività tra i fasci di rette a, a_1 che è individuata dalle direzioni (punti infinitamente vicini ad a, a_1) coniugate nella I. Se adunque si fa variare con continuità la curva C nel fascio $|C|$, varierà con continuità nel fascio stesso la curva coniugata C_1, e le due curve C, C_1 descriveranno (come le loro tangenti in a, a_1) due forme proiettive. Indichiamo con P_1 la proiettività, entro al fascio $|C|$, la quale muta C in C_1, ogni curva del fascio in una coniugata, quindi ogni gruppo di n curve coniugate in sè stesso; P_1 sarà ciclica secondo un divisore di n (n incluso, 1 escluso). Ora se P_1 è ciclica proprio secondo n, allora sostituendo P_1 a Π nel ragionamento del n° 5 si trova anche qui che I è ciclica.

Se poi P_1 è ciclica secondo un divisore di n, diverso da n, si osservi anzitutto che la curva D è uno degli elementi uniti di P_1; l'altro elemento unito E sarà evidentemente l'ultimo elemento polare dell' elemento D rispetto al gruppo generico di n curve del fascio $C, C_1, \ldots C_{n-1}$ coniugate nell' involuzione. Si sostituisca ora nel ragionamento precedente a C_1 la curva C_2, o la $C_3 \ldots$, o la C_{n-1}; si ottengono così n proiettività distinte P (identità), $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ entro al fascio $|C|$, le quali sono tutte cicliche secondo un divisore di n ed hanno come elementi uniti D ed E. Si vede subito allora (per esempio badando alle caratteristiche delle proiettività, che sono radici n-esime di 1) che le n proiettività sono le successive potenze di una tra esse Π,

*) L'ultima ipotesi, dei punti base semplici, non sembra necessaria, ma è sufficiente per le applicazioni che faremo del teorema, e ne rende più facile la dimostrazione.

la quale è ciclica secondo n; e si conclude nuovamente che la involuzione I è ciclica. Possiamo dunque enunciare il teorema:

Se in un fascio (di curve contenente una curva appartenente alla involuzione I, *quei punti base che non cadono tra i punti fondamentali di* I *costituiscono uno o più gruppi di* I (un gruppo almeno composto di punti base semplici e distinti), *allora od ogni curva del fascio appartiene alla involuzione, oppure un' altra sola curva del fascio appartiene alla involuzione, la quale in tal caso è ciclica.*

7. Per fare uno studio più profondo dei sistemi lineari appartenenti ad una involuzione giovano le considerazioni seguenti.

Gli elementi di una involuzione I sono i gruppi di n punti che ad essa appartengono; se noi vogliamo studiare gli enti costituiti da quegli elementi, ci conviene, per poter applicare il linguaggio ordinario, di chiamar *punti* gli elementi di I, e di considerare quindi la I come una varietà costituita da ∞^2 punti, come una *superficie* I; però, se si preferisce, per *superficie* I si può intendere nel seguito una superficie (nel senso ordinario), i cui punti siano in corrispondenza biunivoca coi gruppi (elementi) della involuzione, (poichè le proprietà di cui dobbiamo occuparci sono invariabili per trasformazioni biunivoche). In ogni caso tra la superficie I ed il piano punteggiato sostegno della involuzione passa una ben determinata corrispondenza $(1, n)$.

Ad ogni curva Γ della superficie I corrisponde nel piano una curva C appartenente alla involuzione, e viceversa; i generi π, p di Γ e C sono in generale distinti, e precisamente π è il genere della involuzione ∞^1 costituita dai gruppi di I giacenti su C. Ad un sistema lineare ∞^r $|\Gamma|$ di curve appartenente alla superficie I corrisponde nel piano un sistema lineare ∞^r $|C|$ appartenente alla involuzione I; e viceversa. I due sistemi hanno la stessa dimensione r, ed hanno come *generi* rispettivamente π e p. Se poi due curve Γ (di $|\Gamma|$) generiche si segano (fuori dei punti base di $|\Gamma|$) in Δ punti (variabili colle curve), i Δn punti del piano che ad essi corrispondono (nella corrispondenza $(1, n)$) costituiscono la intersezione (fuori dei punti base di $|C|$) di due curve C; valendoci di una locuzione comunemente adottata noi diremo che Δ è il *grado* del sistema $|\Gamma|$, e $D = \Delta n$ è il *grado* del sistema $|C|$.

Insieme con questi caratteri (dimensione, genere, grado) va considerato nello studio di un sistema lineare un ente invariabilmente collegato col sistema: la *serie caratteristica* segata sopra una curva generica del sistema dalle rimanenti curve*); serie che per il sistema

*) L'importanza di questa serie nello studio dei sistemi lineari di curve risulta dalle mie *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (n° 18 e seg.), loc. cit.; e per i sistemi sulle superficie dalle citate *Ricerche* del Sig. Enriques.

$|\Gamma|$ è una g^r_Δ (tracciata sopra un ente Γ di genere π), mentre per il sistema $|C|$ è una $g^{r-1}_n \equiv g^{r-1}_{\Delta-n}$ (appartenente ad una curva C di genere π). La corrispondenza $(1, n)$ già nominata, la quale muta una curva Γ in una curva C, muta la prima serie caratteristica nella seconda.

Fra le superficie riferibili biunivocamente alla involuzione (alle quali tutte si applicano le considerazioni precedenti) ve n'è una (se $r > 1$) la quale può dirsi *rappresentabile sulla* I *mediante il sistema* $|\Gamma|$; essa si ottiene stabilendo una corrispondenza proiettiva fra le curve (elementi) di $|\Gamma|$ e gli iperpiani S_{r-1} di uno spazio a r dimensioni S_r, e considerando in S_r il luogo di un punto centro di ∞^{r-1} iperpiani le cui immagini Γ passano per un elemento di I. Il luogo stesso è una superficie di S_r che ha l'ordine Δ, ed il genere della sezione iperpianale generica π; la serie segata su quella sezione (di S_{r-1}) mediante gli spazi S_{r-2} è una g^{r-1}_Δ che (rispetto a trasformazioni biunivoche) può ritenersi identica alla serie caratteristica di $|\Gamma|$ *).

8. Riprendiamo il sistema ∞^r C sul piano, ed il suo corrispondente $|\Gamma|$ sulla superficie I.

Facendo astrazione per un momento dalla involuzione, chiamiamo $|C_1|$ il sistema di tutte le curve piane che hanno l'ordine di C, e come C si comportano nei punti base di $|C|$; il sistema $|C_1|$ (la cui dimensione è $\geqq r$) si dice ordinariamente *determinato completamente dai punti base*, e può anche dirsi *sistema normale* poichè possiede la proprietà caratteristica di un sistema normale, che consiste nel non esser contenuto in un sistema dello stesso *grado* e di dimensione superiore **).

Non si può asserire che il sistema $|C_1|$ appartenga esso pure alla involuzione; ma in ogni caso entro a $|C_1|$ possono esistere sistemi appartenenti alla involuzione e contenenti $|C|$. Fra questi sistemi quello $|C'|$ che ha la dimensione massima, contiene i rimanenti in virtù del teorema c) n° 5; il sistema $|\Gamma'|$ che gli corrisponde sulla superficie I è un sistema normale ***), anzi (n° 5, c)) *il* sistema normale individuato da $|\Gamma|$.

---

*) Si può osservare che la superficie di S_r risulta multipla quando le ∞^{r-1} curve Γ che passano per un elemento di I, passano in conseguenza per altri elementi determinati dal primo e con esso variabili.

**) Il nome di sistema lineare *normale* sopra una superficie fu introdotto dal Sig. Enriques (*Ricerche di geometria sulle superficie*, 1, 2 loc. cit.) suggerito dal fatto che una superficie di S_r rappresentabile sulla primitiva mediante un sistema lineare *normale* ∞^r, non può ottenersi come proiezione da una superficie dello stesso ordine di S_{r+1}, è dunque (secondo una locuzione già adottata) una superficie *normale* per S_r.

***) Che il vocabolo normale sia anche qui adoperato nel senso suesposto si potrebbe dimostrare facilmente in modo diretto. Ma si può anche accettare

Il teorema citato del n° 5 ci dà subito la seguente proprietà di un sistema normale su I:

Se nel piano di una involuzione I *si hanno due sistemi lineari di curve* $|C'|$, $|C''|$ *appartenenti alla involuzione, aventi lo stesso ordine e comportantisi ugualmente nei punti base* (che si suppongono siano gli stessi per i due sistemi), *e se dei due sistemi* $|\Gamma'|$, $|\Gamma''|$, *che a quelli corrispondono sulla superficie* I, *il primo è normale, allora esso contiene il secondo, e quindi* $|C'|$ *contiene* $|C''|$, *quando la involuzione non è ciclica; e la stessa conclusione si può trarre, anche quando la involuzione è ciclica, purchè si conosca almeno una curva comune ai due sistemi.* Se infatti $|\Gamma'|$ non contenesse $|\Gamma''|$, e quindi $|C'|$ non contenesse $|C''|$, allora (n° 5, c)) esisterebbe nel piano un sistema appartenente alla involuzione, contenente $|C'|$ (e $|C''|$), e contenuto nel sistema lineare $|C_1|$ determinato dai punti base di $|C'|$; il che non è possibile perchè si è supposto che $|\Gamma'|$ sia un sistema normale.

10. È noto che un sistema lineare normale situato sul piano ha la serie caratteristica *completa**). Ora mi propongo di mostrare come la stessa proprietà spetti ai sistemi normali giacenti sulla superficie I, e costituisca un primo carattere fondamentale di questa superficie.

Sia $|\Gamma|$ un sistema lineare *normale* ∞^r giacente sulla superficie I, e sia $|C|$ il sistema appartenente alla involuzione che sul piano corrisponde a $|\Gamma|$; indichiamo poi con $|C_1|$ il sistema $\infty^{r+\varrho}$ ($\varrho \geqq 0$) di tutte le curve che hanno l'ordine di C e come C si comportano nei punti base del sistema $|C|$.

Sopra la curva C generica di $|C|$ noi abbiamo da considerare le seguenti due serie

l) serie g_D^{r-1} caratteristica di $|C|$ (segata su C dalle rimanenti curve di $|C|$) che noi indicheremo brevemente con l;

l_1) serie $g_D^{r+\varrho-1}$ caratteristica di $|C_1|$ (segata su C dalle rimanenti curve di $|C_1|$), serie *completa* (contenente l) che noi indicheremo con l_1.

E sulla curva Γ della superficie I che corrisponde a C (in una corrispondenza $(1, n)$) consideriamo le due serie

λ) serie g_Δ^{r-1} caratteristica di $|\Gamma|$ (segata su Γ dalle rimanenti curve di $|\Gamma|$) che noi indicheremo con λ;

---

provvisoriamente il vocabolo come una definizione, e dedurre poi dal teorema del n° 10 che la nuova definizione del caso particolare è d'accordo colla definizione generale della nota precedente.

Sopra una qualsiasi superficie un dato sistema lineare *individua* il sistema normale (dello stesso grado e dello stesso genere) che lo contiene; questa proposizione che nel nostro caso possiamo dimostrare ricorrendo al n° 5, c), si troverà dimostrata in generale nella citata memoria del Sig. Enriques, (n° 2).

*) V. le mie *Ricerche generali sopra i sistemi lineari* (n° 18) loc. cit.

λ_1, serie g_d *completa* che contiene λ ed indicheremo con λ_1.

Noi dobbiamo dimostrare che λ è *completa* ossia che *coincide con* λ_1; in altri termini che *ogni gruppo* Λ_1 *di* λ_1 *è un gruppo* Λ *di* λ.

Ricordiamo perciò che la corrispondenza $(1, n)$ che muta Γ in C, muta la serie λ nella serie l (n° 7), e quindi muta la serie λ_1 (contenente λ) in una serie che contiene l, ed è contenuta nella serie completa l_1 (contenente l *). Dunque il gruppo generico Λ_1 di λ_1 è trasformato dalla corrispondenza $(1, n)$ in un gruppo L_1 contenuto in l_1; e tutto sta a dimostrare che L_1 *appartiene anzi alla serie* l, poichè da questo segue subito che Λ_1 appartiene a λ, è un gruppo Λ.

Per il gruppo L_1 (come per ogni altro gruppo di l_1 serie caratteristica di C_1) passa un fascio di curve di C_1| al quale appartiene anche C, e che perciò indicheremo con (C, C_1). Se noi riusciamo a dimostrare che *tutto quel fascio* (o, basterebbe, un' altra sua curva C_1 oltre a C) *appartiene al sistema* $|C|$, allora ne segue che il gruppo L_1 *giace* nella serie caratteristica l del sistema $|C|$, e segue quindi (per ciò che sopra si è detto) il teorema da dimostrarsi.

Ora per vedere che ogni curva del fascio (C, C_1) appartiene a $|C|$, osserviamo anzitutto che tra le curve del fascio si trova la C primitiva, la quale appartiene per ipotesi alla involuzione; in secondo luogo che i punti base del fascio esterni ai punti base di $|C|$ sono i punti (base semplici) del gruppo L_1, il quale (essendo il trasformato di Λ_1) si compone di Δ gruppi della involuzione. Al fascio stesso possiamo adunque applicare il teorema del n° 6 **); il quale ci dice che se I non è ciclica ogni curva del fascio (C, C_1) appartiene alla involuzione; e se I è ciclica almeno una seconda curva C_1 del fascio (oltre a C) appartiene alla involuzione.

1° caso; *la* I *non sia ciclica.* — Poichè allora tutto il fascio appartiene alla involuzione, e d'altra parte il sistema $|\Gamma|$, corrispondente a $|C|$, è normale (per ipotesi), ne viene (n° 8) che *il fascio stesso* (C, C_1) *è contenuto entro a* $|C|$; risultato che a noi bastava per poter concludere il teorema.

2° caso; *la* I *sia ciclica*, sia quindi generata da una trasformazione birazionale ciclica T. Nel fascio nominato consideriamo quella (o una) seconda curva C_1 che (oltre a C) appartiene alla involuzione. Tutto si riduce (come sopra si disse) a dimostrare che C_1 *giace nel sistema* $|C|$. Perciò consideriamo una curva generica C_0 del sistema $|C|$ distinta da C, e formiamo il fascio (C_0, C_1), il quale dalla trasformazione T

*) Nel caso $\varrho = 0$ in cui l ed l_1 coincidono, la trasformata di λ_1 coincide con l trasformata di λ, e quindi λ_1 coincide con λ come si vuol dimostrare. Il ragionamento del testo contempla però insieme i due casi $\varrho \geq 0$.

**) Si osservi infatti che i punti base di $|C|$ esterni ai punti fondamentali di I formano uno o più gruppi di I (n° 4).

è mutato in sè stesso (perchè la T muta in sè tanto C_2 quanto C_1); se noi riusciamo a dimostrare che *ogni curva del fascio* (C_0, C_1) *è mutata in sè stessa dalla* T, ossia che il fascio appartiene alla involuzione, allora segue che il fascio, e quindi C_1, è contenuto entro al sistema $|C|$ (n° 8), al che appunto noi vogliamo arrivare. Consideriamo perciò i tre gruppi L_0, L_1, L_2 segati sulla curva C da C_0, da C_1 e da una curva generica C_2 del fascio (C_0, C_1). I due gruppi L_0 ed L_1 provengono, mediante la corrispondenza $(1, n)$, da due gruppi Λ_0, Λ_1 della serie λ_1; dunque anche L_2, che appartiene alla serie semplicemente infinita determinata da L_0, L_1, dovrà provenire da un gruppo Λ_2 di λ_1 (gruppo della serie definita da Λ_0, Λ_1). Ne viene che L_2 (si compone di Δ gruppi di I e quindi) è mutato in sè stesso dalla trasformazione T, e che la curva C_2 del fascio (C_0, C_1), la quale passa per L_2, è mutata (in una curva del fascio stesso passante per L_2 ossia) in sè stessa dalla T, e questo appunto a noi bastava sapere. Così il teorema proposto rimane dimostrato anche nel 2° caso. E possiamo enunciare la *prima proprietà fondamentale della superficie* I*):

Un sistema lineare normale giacente sopra la superficie I *ha la serie caratteristica completa.*

O sotto forma proiettiva:

Ogni superficie (di uno spazio S_r) *i cui punti corrispondano biunivocamente ai gruppi di una involuzione piana, od ha per sezioni iperpianali* (con S_{r-1}) *curve normali, od è proiezione di una superficie* (normale) *dello stesso ordine, di uno spazio più elevato, avente come sezioni iperpianali curve normali.*

Un corollario del teorema fondamentale si deduce subito applicando alla serie caratteristica g_Δ^{r-1} di un sistema normale $|\Gamma|$ una nota proprietà della geometria sopra una curva:

Se un sistema lineare normale di genere π *giacente sulla superficie* I *ha la dimensione* $r > \pi$ *oppure il grado* $\Delta > 2\pi - 2$, *allora tra i suoi caratteri* π, r, Δ *passa la relazione*

$$\Delta = \pi + r - 1.$$

10. Che tra gli infiniti sistemi lineari giacenti sulla superficie I, si trovino di quelli aventi la dimensione r superiore al genere π, sarà ora dimostrato con un esempio.

Nel piano della involuzione noi abbiamo già considerato (n° 2) quelle curve R', che sono le trasformate delle rette R nella trasformazione piana determinata da I. Le ∞^2 curve $R + R'$ (composte di una retta e della curva trasformata) appartengono alla involuzione. Consideriamo ora nel piano il sistema lineare che ha l'ordine (della curva generica)

*) Per *superficie* I si può intendere (come già dissi) ogni superficie i cui punti corrispondano biunivocamente ai gruppi della involuzione.

uguale all' ordine di $R + R'$, ed ha la minima dimensione tra quelli che contengono tutte le curve $R + R'$ (dimensione certo superiore a 2 perchè per due punti del piano passa più di una curva $R + R'$), sistema i cui punti base cadono soltanto nei punti fondamentali di I (n° 2). Il nominato sistema lineare (che è completamente determinato dalle ∞^2 curve $R + R'$) è irriduttibile*), ed *appartiene tutto alla involuzione*. Ciò infatti risulta senz' altro dal teorema b) del n° 5 se la involuzione non è ciclica; mentre il teorema stesso, se la involuzione è ciclica, potrebbe lasciare il sospetto che le ∞^2 curve $R + R'$ (appartenenti alla involuzione) si distribuissero in due o più sistemi lineari staccati, costituiti da curve appartenenti alla involuzione; ma nel caso presente questo spezzamento non è possibile per la continuità che regna nella varietà ∞^2 delle curve $R + R'$, sicchè anche in questo ultimo caso il sistema lineare determinato dalle $R + R'$ appartiene alla involuzione.

Il sistema lineare che ad esso corrisponde sulla superficie I o è normale, oppure è contenuto in un sistema normale che esso determina (n° 8); quest' ultimo sistema noi indicheremo con $|\Gamma|$, e chiameremo $|C|$ il sistema lineare che gli corrisponde nel piano; noi vogliamo determinare i caratteri di $|\Gamma|$.

Intanto (n° 8) la curva generica C di $|C|$ ha l'ordine di $R + R'$, e come questa curva si comporta nei punti fondamentali della involuzione. Ora l'ordine di R' si può calcolare facilmente in funzione dei seguenti due numeri (caratteri *proiettivi* della involuzione piana):

ν numero delle coppie di punti coniugati nella involuzione che giacciono sopra una retta generica (*classe* della involuzione, estendendo un termine introdotto dal Caporali);

k ordine della *curva unita* K, luogo di un punto che trovasi infinitamente vicino ad uno dei suoi coniugati.

Una retta generica R è segata dalla curva trasformata R' soltanto nelle ν coppie di punti coniugati giacenti su R e nelle k intersezioni di R con K; totalmente in $2\nu + k$ punti (che, come è facile assicurarsi, sono semplici per R'), dunque l' ordine di $R + R'$ ossia di C è

$$2\nu + k + 1.$$

Due curve C si segano in un certo numero Δ di gruppi della involuzione, numero che non varia sostituendo ad una delle C (o ad entrambe) una curva spezzata $R + R'$. Ora un gruppo di I che stia

*) Per un noto teorema del Sig. Bertini (Rendic. Istituto Lombardo 1882; si veda pure Lüroth, Math. Ann. Bd. 42) la curva generica del sistema non potrebbe spezzarsi che in più curve di uno stesso fascio (insieme forse ad una parte fissa), oppure in una curva fissa ed in una curva irriduttibile variabile in un sistema lineare; ed entrambi i casi si escludono subito pel sistema qui considerato.

su $R + R'$, ha uno dei suoi punti sulla retta R e viceversa; sicchè Δ coincide col numero dei punti che una C ha su R, ossia con $2\nu + k + 1$. Dunque:

Il grado del sistema $|\Gamma|$ (sulla superficie I) *è*

$$\Delta = 2\nu + k + 1;$$

(mentre il grado di $|C|$ è Δn).

Per calcolare il genere π di Γ ci conviene di ricorrere a quella superficie F che è rappresentabile sulla I mediante il sistema $|\Gamma|$ (n° 7). La F è una superficie *semplice**) di un certo spazio $S_r (r > 2)$, ha l'ordine Δ, e la curva sezione iperpianale (con un S_{r-1} generico) di genere π.

Tra le sezioni iperpianali Γ di F, che corrispondono tutte (in una corrispondenza $(1, n)$) alle curve piane C, si trovano ∞^2 che hanno per imagini le curve $R + R'$; ad ogni punto di una Γ_0 tra esse corrisponde un sol punto di una retta R, e viceversa; quindi (se la retta R è generica) quella curva Γ_0 è irriduttibile e *razionale*. Però la curva Γ_0 possiede dei punti multipli, che sono semplici per F e quindi semplici per una sezione iperpianale generica di F. Infatti un punto di F, al quale corrisponda nel piano un gruppo della involuzione avente *due* dei suoi punti su R, è punto doppio di Γ_0, ma evidentemente punto semplice di F (poichè quel gruppo non offre particolarità rispetto alla involuzione). Sicchè Γ_0 intanto possiede ν punti doppi che sono semplici per F, e provengono quindi da contatti (semplici) dell' iperpiano contenente Γ_0 colla superficie F. D' altra parte il ragionamento ora fatto prova che nessun altro punto semplice di F può esser multiplo per Γ_0. E si vede pur subito che Γ_0 non può passare per un punto multiplo *isolato* di F, poichè (Γ_0 essendo una curva generica tra le ∞^2 corrispondenti alle $R + R'$) per quel punto multiplo passerebbero tutte le Γ_0, le quali si segherebbero a due a due in meno di Δ punti variabili; e quindi in meno di Δn punti variabili si segherebbero due curve piane $R + R'$, contro a ciò che prima si disse. Dunque (oltre ai punti multipli che possono eventualmente trovarsi sulla sezione iperpianale generica Γ in causa delle curve multiple di F) la curva Γ_0 possiede soltanto ν punti doppi provenienti da ν contatti semplici del suo iperpiano con F. Ora si osservi che un contatto semplice di un iperpiano con una superficie produce un abbassamento di *una* unità nel genere della corrispondente sezione, (quando questa, come nel caso

*) Non accade infatti che le ∞^{r-1} curve C passanti per un gruppo generico della involuzione passino in conseguenza per altri gruppi variabili col primo, come si scorge considerando quelle C che si spezzano in una retta R e nella curva coniugata R'.

presente, non si spezza*); quindi il genere di Γ supera di ν unità il genere di Γ_1 (che è zero): ossia:

Il genere del sistema Γ *è* ν (classe della involuzione)**.

Ora poichè tra il grado

$$\Delta = 2\nu + k + 1$$

ed il genere $\pi = \nu$ di Γ passa la relazione

$$\Delta > 2\pi - 2$$

(perchè $k \geq 0$), ne viene (per l'ultimo teorema del n° 9) che *la dimensione di* Γ è

$$r = \Delta - \pi + 1 = \nu + k + 2;$$

e quindi $r > \pi$. Resta dunque dimostrata la *seconda proprietà fondamentale della superficie* I:

Sopra la superficie I *esiste un sistema lineare* (normale) *avente la dimensione superiore al genere.*

Anzi le considerazioni di natura proiettiva che ci hanno servito per costruire un tal sistema, lasciano apparire l'esistenza di infiniti sistemi analoghi.

Lo studio della superficie I che gode le due proprietà fondamentali trovate (n^i 9, 10), forma l'argomento del *secondo Capitolo.*

---

*) Lo si vede proiettando la superficie nello spazio ordinario in guisa che quell' iperpiano tangente si proietti in un piano tangente.

**) Allo stesso risultato si arriva con un altro ragionamento che, sebbene meno semplice del precedente, ha il vantaggio di operare nel piano. Siano p e p' i generi delle curve piane C ed R', di ordini rispettivi $2\nu + k + 1$, $2\nu + k$. Si trova subito che il genere di una curva che abbia l' ordine $2\nu + k + 1$ ed abbia gli stessi punti multipli di R', è $p' + 2\nu + k - 1$. Ora C ha quell' ordine e quelle molteplicità, fatta eccezione per i $\nu(n-2)$ punti, che sono coniugati alle ν coppie di I giacenti su R, i quali sono doppi per R' (n° 3), ma non giacciono sulla C generica; dunque

$$p = p' + 2\nu + k - 1 + \nu(n-2) = p' + k + \nu n - 1.$$

La involuzione d' ordine n e genere π giacente su C ha (per la formola di Zeuthen)

$$2p - 2 - n(2\pi - 2)$$

punti doppi, i quali costituiscono le intersezioni (fuori dei punti fondamentali) di C colla curva unita K (includendo in K anche quei punti fondamentali, se esistono, che riescono uniti per la involuzione ∞^1 sopra la C generica). Lo stesso numero di intersezioni ha con K la curva $R + R'$, ma $2k$ tra queste sono assorbite dai k punti di K giacenti su R, e quindi su R'; le rimanenti intersezioni sono punti doppi per la involuzione ∞^1 razionale d' ordine $n - 1$ giacente su R'; dunque

$$2p - 2 - n(2\pi - 2) - 2k = 2p' - 2 + 2(n-1).$$

Ora tenendo conto della relazione fra p e p' ed eseguendo alcune semplici riduzioni, si trova di nuovo $\pi = \nu$.

Capitolo II.

11. Nel Capitolo I⁰ abbiamo dimostrato che ogni superficie I, i cui punti si possano riferire biunivocamente ai gruppi di una involuzione piana, gode le due seguenti proprietà (invariantive per trasformazioni biunivoche):

1) *Ogni sistema lineare normale di curve giacenti su* I *ha la serie caratteristica completa;*

2) *Su* I *esiste un sistema lineare (normale) di curve la cui dimensione supera il genere.* Questo sistema sarà indicato in seguito con $|\Gamma|$, e indicheremo con r, π, Δ, la dimensione, il genere, il grado di $|\Gamma|$; per ipotesi è

$$r > \pi,$$

donde segue (n⁰ 9)

$$\Delta = \pi + r - 1,$$

ed anche

$$2\pi - 1 < \Delta < 2r - 1.$$

Noi in questo capitolo vogliamo dimostrare (senza più valerci della involuzione piana) che *ogni superficie la quale possegga le proprietà* 1), 2), *è razionale*, vale a dire riferibile punto per punto al piano; e con ciò avremo dimostrato la razionalità della involuzione, ed avremo raggiunto lo scopo che ci siamo prefissi.

12. È utile osservare anzitutto che la proprietà 1) esclude dalle nostre ricerche tutte le rigate non razionali, e le superficie che ad esse sono riferibili (biunivocamente). Infatti una superficie che appartenga ad uno spazio a r dimensioni S_r e sia normale, se è riferibile alla I, ha (per la 1)) come sezioni iperpianali (cioè in S_{r-1}) curve normali. Ma è noto d'altra parte che nell' insieme di tutte le rigate di genere $p > 0$ riferibili tra loro, ne esistono alcune (per es. quelle che hanno l'ordine $n > 2p - 2$ e non sono coni) le quali pur essendo normali, hanno per sezioni iperpianali curve *non* normali*).

13. Ciò premesso, noi possiamo subito dimostrare la razionalità della superficie I pei valori $\pi = 0, 1, 2$.

Infatti se $\pi = 0$ la I possiede un sistema lineare $|\Gamma|$ almeno ∞^1 di curve razionali, ed è quindi razionale per un noto teorema del Sig. Nöther**).

*) Il Sig. Segre dimostra infatti in due modi diversi (*Ricerche sulle rigate ellittiche*, n⁰ 2, Atti dell' Accad. d. Scienze di Torino, vol XXI; *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées*, n⁰ 14, Mathem. Annalen Bd. 34) che una rigata d' ordine $n > 2p - 2$ ($p > 0$) avente per sezioni curve normali (quindi appartenente ad un S_{n-p+1}) è necessariamente un cono.

**) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Mathem. Annalen Bd. 3).

Se invece $\varkappa = 1$ allora è

$$r \geq 2. \qquad \Delta = r.$$

Quindi o $r \geq 1$. e allora la I è rappresentabile univocamente sopra una superficie d'ordine $\Delta = r$ di S_r, superficie che avendo noi esclusa le rigate ellittiche e razionali*: oppure $r = 2$. $\Delta = 2$. e stabilendo allora una corrispondenza proiettiva tra gli elementi curve del sistema Γ e le rette di un piano, si vengono a rappresentare sopra ogni punto del piano due punti della superficie, coniugati ai ∞^1 curve Γ, si viene a rappresentar la I sopra un piano doppio. Ogni retta del piano contata due volte rappresenta una curva ellittica Γ, e possiede quindi quattro punti di diramazione. La curva limite (*Uebergangscurve*) del piano doppio è adunque del *quarto ordine*. Ora è noto che un piano doppio con una quartica limite è rappresentabile sul piano semplice**) (o eccezionalmente sul cono cubico, il che nel caso presente va escluso in virtù dell'osservazione fatta al n° 12). Dunque la F è rappresentabile sul piano semplice, anche se $\varkappa = 1$. $r = 2$.

14. Veniamo ora al caso $\varkappa = 2$: dovremo veramente ricorrere a ragionamenti che ci serviranno per $\varkappa$ qualunque, ma il premetterli ora renderà più chiara la trattazione del caso generale. Supponiamo anzitutto che il sistema Γ di genere 2, di dimensione $r \geq 3$ e di grado $\Delta = r - 1$, abbia la proprietà che le ∞^{r-1} sue curve passanti per un punto *generico* della superficie I non abbiano tutte in comune altri punti variabili col primo. Allora la superficie I può riferirsi univocamente ad una superficie F di uno spazio S_r, superficie avente l'ordine $r - 1$ e le sezioni iperpiane di genere 2. Proiettando la F da $r - 3$ (se $r > 3$) suoi punti generici sullo spazio S_3, si ottiene una superficie del *quarto* ordine a sezioni piane di genere 2, cioè una superficie del quarto ordine con retta doppia, la quale essendo esclusa le *rigate* e certo *razionale****. Sicchè nella prima ipotesi fatta sul sistema Γ, la I è razionale.

Supponiamo in secondo luogo che le ∞^{r-1} curve di Γ passanti per un punto *generico* di I, passino tutte in conseguenza per altri $\mu - 1 \geq 1$ punti determinati dal primo e con esso variabili. Allora la serie caratteristica $g_{r-1}^{\mu-1}$ segata sopra una Γ dalle rimanenti avrà ogni suo *gruppo composto* di $r - 1$ o più sottogruppi di μ punti appartenenti ad una involuzione ∞^1. Sarà dunque

---

*. Del Pezzo. *Sulle superficie dell' n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. I.

**. Clebsch, *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen etc.* Math. Annalen Bd. 3 : Nöther. *Ueber die eindeutigen Ebenentransformationen* Sitzungsber. d. physik. medic. Soc. zu Erlangen, 1878.

***. Clebsch, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* (Math. Ann. Bd. 1).

$$r + 1 \geq \mu(r-1),$$

il che (tenendo conto della $r \geq 3$) porta $\mu = 2$, $r = 3$, $\Delta = 4$. La serie caratteristica è dunque una g_4^2, ed ogni suo gruppo si compone di due gruppi della serie g_2^1 che la Γ (di genere 2) sostiene; in altre parole le ∞^2 Γ passanti per un punto generico di I passano tutte per un secondo punto, che su ciascuna di quelle Γ è coniugato del primo punto. Le ∞^2 coppie di punti coniugati sulla superficie I si possono rappresentare sopra una superficie di ordine $\frac{\Delta}{2} = 2$ di S_3, sopra una quadrica, le cui sezioni piane contate due volte rappresentano le curve Γ. Ciascuna conica sezione contiene adunque 6 punti di diramazione, ed il luogo di questi è una curva del 6° ordine.

La superficie I può dunque rappresentarsi sopra una *quadrica doppia con una sestica limite.* Ora è facile dimostrare che una tal quadrica doppia è razionale. Infatti se la quadrica è *generale*, allora ogni sua retta è segata in un numero pari di punti dalla curva limite (chè altrimenti quella retta contata due volte non potrebbe rappresentare una curva di I); quindi (dovendo escludersi il caso in cui la curva limite si spezza in sei rette di un sistema, poichè allora la I sarebbe una rigata di genere 2) vi sarà sulla quadrica un sistema di rette secanti in *due* soli punti la curva limite, ed in corrispondenza vi sarà sulla superficie I un sistema lineare ∞^1 di curve razionali; e tanto basta per asserire che la I è *razionale* (per un teorema già citato del Nöther). Oppure la quadrica è un *cono;* se la sestica limite passa per il vertice (due o quattro volte), le generatrici del cono rappresentano curve razionali di I, e quindi di nuovo la I è razionale; se la sestica non passa per il vertice, ma sega tre volte ogni generatrice (e quindi il vertice è punto limite isolato), il cono doppio viene proiettato da un suo punto generico in un *piano doppio dotato di una sestica limite avente due punti tripli infinitamente vicini;* ma un tal piano doppio si può rappresentare sul piano semplice*), sicchè anche in quest' ultimo caso la I è una superficie *razionale.* E si può concludere infine che se il sistema $|\Gamma|$ giacente sulla superficie I ha il genere 2, la I è certo razionale.

15. E passiamo al caso generale $\pi > 2$. La dimostrazione del teorema che una superficie I godente le proprietà 1), 2) (n° 11) è razionale, si fonda sopra i tre lemmi seguenti:

a) *Se una superficie* I *contiene un sistema lineare* $|\Gamma|$ *normale di dimensione* $r > \pi$ (> 2) (e soddisfa inoltre alla proprietà 1)), *la*

*) Nöther, *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* loc. cit.; *Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen* (Mathem. Annalen Bd. 33).

superficie contiene pure un sistema lineare $|\Gamma'|$ $\infty^{\pi-1}$, *le cui curve segano sopra ogni curva di* $|\Gamma|$ *la serie canonica* $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$; il sistema $|\Gamma'|$ si dirà sistema *aggiunto* a $|\Gamma|$.

b) *Se la curva generica del sistema aggiunto si spezza, lo spezzamento avviene in* $\pi - 1$ *curve razionali appartenenti ad un sistema lineare* ∞^1.

c) *Se invece la curva generica del sistema aggiunto è irriduttibile, il suo genere è* $\pi' \leq \pi - 2$; *ed il sistema aggiunto ha quindi* (come $|\Gamma|$) *la dimensione superiore al genere* ($\pi - 1 > \pi'$)*).

Le dimostrazioni dei tre lemmi procedono diversamente (cfr. n° 14), secondo che il sistema ∞^r $|\Gamma|$ presenta la proprietà che le ∞^{r-1} sue curve passanti per un punto generico della superficie non hanno comuni in conseguenza altri punti determinati dal primo, o presenta la proprietà opposta. Noi comincieremo ad occuparci della prima ipotesi.

16. *Prima ipotesi.* — Noi supponiamo dunque, finchè non si dichiari il contrario, che *le* ∞^{r-1} *curve di* $|\Gamma|$ *passanti per un punto generico della superficie* I *non abbiano in comune altri punti variabili col primo.* In questa ipotesi si può costruire in uno spazio a r dimensioni S_r una superficie F, la quale sia riferita biunivocamente alla superficie I, e venga segata dagli iperpiani S_{r-1} nel sistema lineare che corrisponde a $|\Gamma|$, e che continueremo ad indicare con $|\Gamma|$. L'ordine della F sarà

$$\Delta = \pi + r - 1,$$

e $\pi < r$ sarà il genere della sua sezione iperpianale (curva normale non speciale**)).

Sulla F noi vogliamo costruire un sistema lineare $\infty^{\pi-1}$ di curve Γ' secanti la serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ sulla sezione iperpianale Γ di F; l'ordine di Γ' dovrà dunque essere $2\pi - 2$.

Per procedere nel modo più semplice conviene di ridursi allo spazio ordinario S_3; proietteremo perciò la F da $r - 3$ ($r > 3$) suoi punti sopra S_3. Per fissare gli $r - 3$ centri di proiezione, consideriamo una sezione generica di F, cioè una curva Γ normale non speciale d'ordine Δ appartenente ad S_{r-1}, e su questa prendiamo $r - 3$ punti *generici*, vale a dire linearmente indipendenti (appartenenti cioè ad un S_{r-4}), e

*) È facile riconoscere (badando al n° 14) che il teorema a) vale anche per $\pi = 2$, che il teorema b) perde in quel caso il suo significato, e che il teorema c) cade solo nell' ultima ipotesi fatta al n° 14, alla quale corrisponde il valore

$$\pi' = 1 = \pi - 1.$$

**) Seguendo il Sig. Segre dicesi *non speciale* (rispett. speciale) una curva di S_d sulla quale gli iperpiani S_{d-1} seghino una serie non speciale (o speciale).

tali che la curva Γ venga da essi proiettata *univocamente* in una curva Γ_0 di S_2, la quale adunque avrà l'ordine

$$\Delta - (r-3) = \pi + 2,$$

e il genere π, e sarà essa pure (in virtù di noti teoremi) una curva normale non speciale. Ne segue che la proiezione (univoca) di F da quegli $r-3$ punti è una superficie F_0 dello spazio ordinario S_3, le cui sezioni piane irriduttibili sono *curve normali non speciali d'ordine* $\pi+2$ *e genere* π. Esisteranno forse anche piani secanti la F_0 in curve spezzate, ma in ogni caso si vede subito (e ciò a noi basta) che per una retta generica di S_3 non passa nessuno di tali piani*).

Ora noi cominciefemo a costruire su F_0 un sistema lineare $\infty^{\pi-1}$ di curve secanti la serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ sopra la sezione piana generica Γ_0 di F_0.

Nel piano di Γ_0 la serie canonica è segata dalle curve d' ordine

$$(\pi+2)-3 = \pi - 1$$

aggiunte a Γ_0 (che ha l'ordine $\pi+2$). Per fissare un gruppo della serie, o, ciò che fa lo stesso, una di tali curve, basta assegnare nel piano di Γ_0 $\pi-1$ punti generici; e questi punti si possono anche prendere sopra una retta generica s del piano; giacchè se per $\pi-1$ punti di s passassero (più di una e quindi) infinite curve aggiunte d' ordine $\pi-1$, una tra queste conterrebbe la s, e quindi il gruppo segato da s su Γ_0 sarebbe *speciale*, mentre abbiamo visto che la sezione Γ_0 è una curva *non speciale*. Ora facciamo ruotare il piano di Γ_0 intorno ad s, e per ogni posizione del piano segniamo la curva aggiunta d'ordine $\pi-1$ passante per quei $\pi-1$ punti di s, che supponiamo fissi. Otteniamo così ∞^1 curve d'ordine $\pi-1$ sui piani del fascio s, le quali segano tutte la retta s negli *stessi* $\pi-1$ *punti*. Queste curve costituiscono una superficie Φ, la quale, come ora mostreremo, è d'ordine $\pi-1$. Se infatti Φ fosse d'ordine superiore, essa dovrebbe contenere una o più volte la retta s, e quindi un piano (almeno) per s dovrebbe segare la Φ nella retta s, contata una volta di più che nella intersezione col piano generico del fascio, ed in una curva residua d'ordine $\pi-2$. Ma allora (ragionando come prima) si troverebbe che quel piano per s segherebbe la F_0 in una curva *speciale;* mentre noi sappiamo che ogni sezione piana irriduttibile di F_0 è una *curva non speciale*, e sappiamo d'altra parte che per una retta generica s non passano piani secanti F_0 in curve riduttibili. Dunque la Φ è proprio d'ordine $\pi-1$, come si era asserito.

*) Infatti una superficie di S_3 che ammetta ∞^2 sezioni piane riduttibili è rigata od è la superficie di Steiner ($\pi=0$), casi entrambi da escludersi; (si veda in proposito la mia Nota *Sulle superficie algebriche irriduttibili che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili*, Rendic. Accad. d. Lincei, gennaio 1894).

Ad ogni gruppo di $\pi - 1$ punti di s corrisponde una superficie Φ, la quale sega sopra ogni piano per s una curva d'ordine $\pi - 1$ aggiunta alla sezione di quel piano con F_0; le $\infty^{\pi-1}$ Φ che così si ottengono, formano, come è chiaro, un sistema lineare. Ognuna di esse sega F_0 (oltre che lungo la curva multipla) in una curva Γ_0' che venendo incontrata da ogni piano per s in $2\pi - 2$ punti, ha l'ordine $2\pi - 2$. Si ottiene adunque su F_0 un sistema lineare $\infty^{\pi-1}$ di curve d'ordine $2\pi - 2$, le quali segano sopra *ogni* sezione piana Γ_0 di F_0 (anche se il piano di Γ_0 non passa per s) una serie $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, quindi *la serie canonica* di Γ_0. E così intanto rimane dimostrata l'esistenza di un sistema lineare $|\Gamma_0'|$ secante la serie canonica sulle ∞^3 curve Γ_0.

Torniamo ora alla superficie F di S_r, dalla quale abbiamo ottenuto la F_0 mediante proiezione (da $r - 3$ centri), e consideriamo su F quelle $\infty^{\pi-1}$ curve Γ' che hanno per proiezioni le curve Γ_0'. Se per ciascuno degli $r - 3$ centri di proiezione la Γ' passa α ($\geqq 0$) volte, l'ordine di Γ' è $2\pi - 2 + \alpha(r - 3)$; e la Γ_0' sega in α punti ciascuna delle $r - 3$ rette che stanno su F_0, e rappresentano i centri di proiezione (o meglio i punti ad essi infinitamente vicini). Ora un piano condotto per una di tali rette sega la F_0 lungo una curva che ha il genere $\pi - 1$ (perchè proiezione della sezione di F con un iperpiano tangente ad F nel corrispondente centro di proiezione); e quella curva piana di genere $\pi - 1$ viene incontrata dalle $\infty^{\pi-1}\Gamma_0'$ in una serie $g^{\pi-1}_{2\pi-2-\alpha}$. La serie è non speciale (perchè la dimensione uguaglia il genere della curva sostegno); quindi

$$2\pi - 2 - \alpha \geqq (\pi - 1) + (\pi - 1),$$

ossia $\alpha = 0$. Ne viene che le $\infty^{\pi-1}$ curve Γ' esistenti su F hanno proprio l'ordine $2\pi - 2$; e *segano in conseguenza la serie canonica* $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ *sopra ogni sezione iperpianale di* F. L'esistenza del sistema lineare $|\Gamma'|$ dotato di questa proprietà (*sistema aggiunto*) era appunto affermata dal lemma a), il quale rimane dunque dimostrato completamente.

17. Il lemma b) contempla il caso che ciascuna curva del sistema aggiunto $|\Gamma'|$ si spezzi; come può avvenire lo spezzamento?

È noto*) che la curva generica di un sistema lineare ∞^k giacente sopra una superficie non può spezzarsi che in una parte fissa (comune a tutte le curve) ed in una parte variabile irriduttibile, oppure in un certo numero $\geqq k$ di curve appartenenti ad uno stesso fascio (sistema ∞^1, razionale o no, tale che per ogni punto della superficie passa una sola curva) più forse una parte fissa. Ora sulla F di S_r le $\infty^{\pi-1}$ curve Γ' d' ordine $2\pi - 2$ non possono contener tutte una stessa parte

*) Enriques, *Ricerche* citate; I, 1.

fissa, poichè la serie canonica, segata dalle Γ' sopra una sezione iperpianale Γ, non può aver punti fissi (comuni a tutti i suoi gruppi). Resta la seconda ipotesi che la Γ' si spezzi in (almeno) $\pi - 1$ curve di un fascio; ma poichè la F non è rigata (n° 12), le curve del fascio devono esser coniche, le quali prese a $\pi - 1$ per volta daranno le $\infty^{\pi-1}\,\Gamma'$. Dunque la serie ∞^1 delle coniche è lineare; come del resto risulta dal fatto che nel caso presente la sezione iperpianale Γ è iperellittica (perchè i gruppi di $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ contenenti un punto di Γ contengono in conseguenza una stesso secondo punto).

Sotto forma invariantiva si può dunque asserire che *se la curva generica del sistema aggiunto a* $|\Gamma|$ *si spezza, lo spezzamento avviene in* $\pi - 1$ *curve razionali appartenenti ad un sistema lineare* ∞^1; e ciò precisamente diceva il lemma b).

18. Passiamo ora a dimostrare il lemma c); supponiamo adunque questa volta che la curva generica Γ' del sistema aggiunto sia *irriduttibile,* e cerchiamo un limite superiore al suo genere π'.

Indichiamo perciò con $S_\varrho\,(\varrho \leqq r)$ lo spazio a cui appartiene la curva Γ' d'ordine $2\pi - 2$ tracciata sulla superficie F; poichè la Γ' determina sulla sezione iperpianale Γ di F un gruppo generico della serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, ne viene che ogni gruppo di questa serie dovrà appartenere ad uno spazio $S_{\varrho-1}$. D'altra parte $\pi - 1$ punti del gruppo possono prendersi ad arbitrio sulla Γ di S_{r-1} (dove $r - 1 > \pi - 1$), e quindi appartengono ad uno spazio con $\pi - 2$ dimensioni; segue dunque $\varrho - 1 \geqq \pi - 2$ ossia $\varrho \geqq \pi - 1$. Ma non può esser nemmeno $\varrho = \pi - 1$ ossia $\varrho - 1 = \pi - 2$, poichè in tal caso accadrebbe che lo spazio determinato da $\pi - 1$ punti *generici* di Γ segherebbe ulteriormente Γ in altri punti (che coi primi completerebbero un gruppo canonico); e ciò è impossibile, perchè entro ad S_{r-1}, lo spazio di $r - 2$ (o meno, quindi anche di $\pi - 1$) punti generici di una curva Γ (appartenente ad S_{r-1}) non sega ulteriormente la curva*). Dunque si conclude che $\varrho \geqq \pi$; donde segue che Γ' appartenente ad S_ϱ ed avente l'ordine $2\pi - 2 < 2\varrho$, è una curva non speciale. Si può

*) Si veda ad es. Bertini, *Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica*, n° 2 (Atti dell' Accad. d. Scienze di Torino, vol. 26).

Ciò che a noi interessa, si può anche dimostrare osservando che se ogni gruppo canonico di Γ appartenesse ad un $S_{\pi-2}$, la stessa proprietà spetterebbe ad ogni gruppo canonico sulla curva d'ordine $2\pi - 1$ di $S_{\pi-1}$ che si ottiene proiettando la Γ (d'ordine $\pi + r - 1$ di S_{r-1}) da $r - \pi$ suoi punti. Ma lo spazio $S_{\pi-2}$ di un gruppo canonico segherebbe la curva proiezione ulteriormente in un punto, pel quale dovrebbero passare gli $S_{\pi-2}$ di tutti gli altri gruppi canonici (in virtù del *Restsatz*), quindi i gruppi canonici sarebbero $\infty^{\pi-2}$, mentre sono realmente $\infty^{\pi-1}$.

quindi scrivere la relazione che lega il genere e l'ordine di una curva non speciale colla dimensione dello spazio a cui la curva appartiene; relazione che nel nostro caso è

$$\pi' \leqq (2\pi - 2) - \varrho,$$

dove π' è il genere di Γ'.

Aggiungendo a questa l'altra relazione $\pi \leqq \varrho$ si trova

$$\pi' \leqq \pi - 2;$$

la quale ci dice anzitutto che *il genere* π' *di* $|\Gamma'|$ *è inferiore di due unità almeno al genere* π *di* $|\Gamma|$; e in secondo luogo che *la dimensione* $r' = \pi - 1$ *di* $|\Gamma'|$ *supera il genere* π' *del sistema stesso*, proprietà questa perfettamente analoga alla 2) (n° 11) valida per $|\Gamma|$. E così le affermazioni del lemma c) sono tutte giustificate.

19. Dobbiamo ora dimostrare i lemmi a), b), c) (n° 15) nella *Seconda ipotesi.* — *Il sistema lineare* $|\Gamma|$ ∞^r *goda la proprietà che le* ∞^{r-1} *sue curve passanti per un punto generico della superficie* I *abbiano comuni in conseguenza altri* $\mu - 1 \geqq 1$ *punti, variabili col primo punto.**) Allora ragionando come nel caso particolare $\pi = 2$ (n° 14) si vede subito che ogni gruppo della serie caratteristica g_Δ^{r-1} di $|\Gamma|$ si deve comporre di $r - 1$ (o più) gruppi di una involuzione ∞^1 d'ordine μ; sicchè

$$\Delta \geqq \mu(r - 1);$$

d'altra parte sappiamo che $\Delta \leqq 2(r - 1)$; quindi il solo caso possibile è

$$\mu = 2, \quad \Delta = 2r - 2, \quad \pi(= \Delta - r + 1) = r - 1.$$

La curva Γ generica è una curva iperellittica, e $|\Gamma|$ *è un sistema lineare* $\infty^{\pi+1}$ *di curve iperellittiche di genere* π, *che si segano a due a due in* π *coppie variabili.*

Le ∞^2 coppie di punti sulla superficie I, tali che le Γ passanti per un punto di una coppia passano pure per il secondo punto, possono rappresentarsi biunivocamente sopra una superficie Σ di ordine π appartenente ad uno spazio $S_{\pi+1}$, superficie le cui sezioni iperpianali sono curve razionali, che contate due volte rappresentano le Γ. Sopra ogni sezione si trovano dunque $2\pi + 2$ punti di diramazione, ed il luogo di questi su Σ è una curva Λ d'ordine $2\pi + 2$; *la superficie* I *è rappresentabile sulla* Σ *doppia, dotata della curva limite* Λ.

---

*) Si potrebbe osservare che il sistema $|\Gamma|$, di cui al n° 10 si è dimostrata l'esistenza, soddisfa alla *prima* ipotesi (n° 16); parrebbe quindi che a questa si potesse limitar la discussione. Si noti però che il sistema $|\Gamma'|$ aggiunto a $|\Gamma|$ costruito al n° 16 può benissimo soddisfare alla *seconda*, anzichè alla *prima* ipotesi, sicchè ad esso dovrebbero applicarsi le considerazioni contenute nel n° 19, le quali preferisco di svolgere subito (anzichè rimandarle al momento in cui diventano necessarie) per ragioni di chiarezza.

La superficie Σ (d'ordine π appartenente a $S_{\pi+1}$) è, per un noto teorema*), rigata se $\pi \gtrless 4$; e nel caso $\pi = 4$, se non è rigata, è la superficie di Veronese con ∞^2 coniche secantisi a due a due in un punto variabile (rappresentata sul piano dalle ∞^5 coniche). Noi possiamo però, questa volta, escludere la superficie di Veronese, perchè la curva limite Λ sopra essa dovrebbe aver l'ordine 10, e quindi dovrebbe segare ciascuna delle ∞^2 coniche in cinque punti, mentre ogni curva algebrica irriduttibile di Σ, corrispondendo ad una curva della superficie I, deve contenere un numero pari di punti di diramazione, deve dunque segar Λ in un numero pari di punti. Resta così da considerare soltanto il caso della Σ rigata, nel quale la I contiene un sistema lineare ∞^1 di curve iperellittiche rappresentate dalle generatrici di Σ contate due volte. La curva Λ sega in un certo numero pari $2h (\geqq 2)$ di punti ogni generatrice della rigata.

Ora se $h = 1$ la generatrice contata due volte rappresenta una curva razionale della superficie I; le ∞^1 curve razionali che si ottengono su questa, formano un sistema lineare (quindi la I è razionale); e prese a $\pi - 1$ per volta dànno su I curve (spezzate) di un sistema lineare $\infty^{\pi-1}$, le quali segano ogni curva Γ (corrispondente ad una sezione iperpianale di Σ) in $\pi - 1$ coppie della serie g_2^1 giacente su Γ, cioè in un gruppo della serie canonica di Γ. Il sistema $\infty^{\pi-1}$ qui nominato può assumersi come sistema $|\Gamma'|$ aggiunto a $|\Gamma|$; esso soddisfa ai lemmi a) e b) che rimangono così dimostrati.

Lo stesso ragionamento e la stessa conclusione valgono pure se (essendo $h > 1$) dei $2h$ punti di ogni generatrice di Σ, $2h-1$ o $2h-2$ si trovano riuniti in un punto di questa, perchè sempre la generatrice contata due volte rappresenterà una curva razionale di I**). Resta dunque soltanto il caso in cui almeno tre punti semplici di Λ si trovano sopra ogni generatrice, distinti dai rimanenti $2h-3$. Allora la rigata Σ non può esser un cono, perchè altrimenti un iperpiano S_π pel vertice segherebbe la curva Λ d'ordine $2\pi + 2$ in almeno $3\pi > 2\pi + 2$ punti ($\pi > 2$). Poichè dunque la Σ non è un cono, gli $\infty^{\pi-1}$ iperpiani condotti per una sua generatrice segano su Σ (d'ordine π) un sistema $\infty^{\pi-1}$ di curve irreduttibili razionali d'ordine $\pi - 1$, le quali incontrano Λ in $2\pi + 2 - 2h$ punti. A queste curve contate due volte corrispondono sulla superficie I $\infty^{\pi-1}$ curve iperellittiche di genere $\pi - h \leqq \pi - 2$ formanti un sistema lineare; ognuna di esse sega una curva Γ (corrispondente ad una sezione iperpianale di Σ) in $\pi - 1$ coppie della g_2^1

*) Del Pezzo, *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di n + 1 dimensioni* (Rendic. dell' Accad. di Napoli, 1885).

**) Si vede facilmente che questo caso è possibile soltanto se Σ è un cono il cui vertice assorbe $2h-1$ o $2h-2$ punti di diramazione di ciascuna generatrice.

appartenente a Γ, cioè in un gruppo della serie canonica di Γ. Dunque il sistema nominato $\infty^{\pi-1}$ sulla I può assumersi come sistema $|\Gamma'|$ aggiunto a $|\Gamma|$; ed insieme all'esistenza del sistema aggiunto (lemma a) resta dimostrato che il suo genere $\pi' = \pi - h$ non supera $\pi - 2$ (lemma c)*).

28) Dimostrati così i lemmi a), b), c) anche nella *seconda ipotesi*, si scorgerà facilmente come essi conducano subito alla dimostrazione della razionalità di I.

Sulla superficie I, soddisfacente alle due proprietà 1), 2) (n° 11), esiste per ipotesi *un sistema lineare* Γ *normale, avente la serie caratteristica completa, e la dimensione* r *superiore al genere* π. Se $\pi \leq 2$ sappiamo già (n° 13, 14) che la I è *razionale*. Sia dunque $\pi > 2$; si costruisca allora il sistema lineare $|\Gamma'|$ aggiunto a Γ, che certamente esiste (lemma a). Ora sono possibili due casi. O la curva generica di Γ è riduttibile, ed allora essa si spezza in $\pi - 1$ curve razionali variabili in un sistema lineare ∞^1 (lemma b)), e la superficie I contenendo un sistema lineare ∞^1 di curve razionali, è *razionale*. Oppure (solo caso che ci rimane da considerare) la curva generica di $|\Gamma'|$ è irriduttibile, ed ha il genere $\pi' \leq \pi - 2$ (lemma c)). Ora sarebbe facile il dimostrare che il sistema $\infty^{\pi-1}|\Gamma''|$ è normale; ma questa considerazione non è nemmeno necessaria, perchè esisterà in ogni caso un sistema lineare normale contenente $|\Gamma'|$ e da esso determinato; ed il nuovo sistema, che potremo indicare ancora con $|\Gamma'|$, avrà la dimensione $r' \geq \pi - 1$, ed il genere (per definizione, n° 8 nota) uguale a π, quindi minore di r'. Così abbiamo riconosciuta l'esistenza sulla superficie I di *un sistema lineare* $|\Gamma'|$ *normale, avente la serie caratteristica completa* (per la 1) del n° 11), *e la dimensione* r' *superiore al genere* π'; e sappiamo inoltre che $\pi' \leq \pi - 2$.

Questo nuovo sistema $|\Gamma'|$, che ha le stesse proprietà di $|\Gamma|$, può esser sostituito a $|\Gamma|$ nelle considerazioni precedenti. E così si continua finchè si arriva (poichè i generi dei successivi sistemi vanno decrescendo) ad un sistema $|\Gamma^{(i)}|$, del quale o la curva generica di spezza in più curve razionali di un sistema lineare ∞^1, ed allora la I è *razionale;* o la curva generica è irriduttibile ed ha il genere $\pi_i \leq 2$, ed anche in questo caso la I è *razionale.*

Sicchè finalmente possiamo affermare che

È razionale ogni superficie la quale goda le due proprietà seguenti:

1) *Ogni sistema lineare normale di curve sulla superficie ha la serie caratteristica completa;*

---

*) Anzi se si osserva che le $\infty^{\pi-2}$ curve di $|\Gamma'|$ che passano per un punto di I, passano pure per il punto coniugato (che ha la stessa imagine su Σ), si deduce (ragionando come per $|\Gamma|$) che $\pi' = r' - 1 = \pi - 2$, e quindi $h = 2$.

2) *Sulla superficie esiste un sistema lineare (normale) di curve avente la dimensione superiore al genere.*

21. Per le considerazioni fatte più volte, il teorema si applica subito ad ogni superficie, i cui punti si possano riferire biunivocamente ai gruppi di una involuzione piana, o (sotto altra forma) ad una superficie il cui punto generico abbia le coordinate funzioni razionali di due parametri. Dunque:

Si può sempre stabilire una corrispondenza (algebrica) *biunivoca tra i gruppi di una involuzione piana ed i punti di un piano.*

Se le coordinate del punto generico di una superficie sono funzioni razionali di due parametri, la superficie è rappresentabile punto per punto sopra un piano.

Venezia, Settembre 1893.

Bemerkung zur Algebra der Logik.

Von

A. Korselt in Pirna.

(Auszug aus einem Briefe an die Redaction).

Die Nichtbeweisbarkeit der „zweiten" Subsumtion des Distributionsgesetzes auf Grund der von Herrn Charles S. Peirce gegebenen Grundlagen erscheint darum wichtig, weil sie die Selbständigkeit oder Abgeschlossenheit des (von Schröder so genannten) Gruppenkalkuls gegenüber dem identischen Kalkul verbürgt.

Vielleicht wird es den Lesern der Annalen willkommen sein, neben den beiden Beweisen von Herrn E. Schröder (Algebra der Logik, § 12) und denen der Herren Voigt (angedeutet in der Vierteljahrsschrift für Philosophie 1892) und Lüroth (Recension in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik) folgenden anschaulichen Beweis der Nichtbeweisbarkeit zu haben.

Es mögen $a, b \ldots$ oder auch $p_1 p_2 \ldots g_1 g_2 \ldots e_1 e_2 \ldots$ Raumelemente, d. h. Punkte, Geraden, Ebenen, 0 das „Nichts", 1 den „ganzen Raum" bedeuten. Es heisse auch

$a \nleq b$ a liegt in b, und bedeute

$a \,.\, b$ oder ab das in a und b enthaltene Element höchster,

$a + b$ das a und b enthaltende Element niedrigster Dimension.

Die Anschauung zeigt nun, dass folgende Sätze bestehen. (Algebra § 4, 5).

I. $a \nleq a$.

II. Wenn $a \nleq b$ und $b \nleq c$, so ist $a \nleq c$.

(1) Wenn $a \nleq b$ und $b \nleq a$, so ist $a = b$.

(2) $0 \nleq a$, $a \nleq 1$ für beliebige a.

($3_\times$) Wenn $c \nleq a$ und $c \nleq b$, so ist $c \nleq ab$

(3_+) Wenn $a \nleq c$ und $b \nleq c$, so ist $a + b \nleq c$ } und umgekehrt.

Es gelten daher auch die in der „Algebra" aus diesen abgeleiteten Sätze z. B.

$$a \,.\, a = a + a = a.$$

Wenn $a \nleq b$, so ist $ab = a$, sowie $a + b = b$, und umgekehrt.

Insbesondere bewahrheitet sich auch die „erste“ Subsumtion des Distributionsgesetzes

$$ab + ac \leqq a(b+c).$$

Nun seien $p_1 p_2 p_3$ drei verschiedene Punkte einer Geraden g, also

$$p_1 p_2 = p_1 p_3 = 0, \quad p_1 g = p_1, \quad p_2 + p_3 = g.$$

Dann ist

$$p_1(p_2+p_3) = p_1 g = p_1, \quad p_1 p_2 + p_1 p_3 = 0 + 0 = 0,$$

also

$$p_1(p_2+p_3) \neq p_1 p_2 + p_1 p_3, \qquad \text{q. e. d.}$$

Pirna, im Februar 1893.

Trasformazione di una curva algebrica in un'altra con soli punti doppi*).

Nota di

E. Bertini a Pisa.

In molti lavori geometrici si applica, come noto, il seguente teorema: — *Qualunque curva piana* (*semplice o composta*) *si può, con una trasformazione birazionale, trasformare in un'altra fornita di soli punti doppi:* — ma non vi è fatto alcun cenno, per quanto mi consta, di una esplicita dimostrazione del teorema stesso. Forse si ritiene facile stabilirlo o con considerazione analoga a quella accolta da Noether per la riduzione di una superficie ad un'altra dotata soltanto di curva doppia e di punti tripli**), ovvero riferendo la curva piana

*) Parmi utile riprodurre dalla *Rivista matematica* diretta da G. Peano (Vol. I, 1891, pag. 22) questa mia breve Nota, contenente una dimostrazione semplice ed esente da ogni obiezione di un teorema geometrico importante; tanto più che lo stesso argomento fu posteriormente trattato in altre pubblicazioni, nelle quali non è fatto alcun cenno di quella Nota. Citerò le *Traité d'Analyse* del sig^{r}. Picard, ove (a pag. 366 del t^{o}. II) è esposta una dimostrazione che l'autore stesso riconosce non del tutto soddisfacente: la Nota del sig^{r}. Simart: *Sur un théorème relatif à la transformation des courbes algébriques* (Comptes rendus, t^{o}. 116, 8 Mai 1893): e la Nota del sig^{r}. Poincaré: *Sur les transformations birationelles des courbes algébriques* (ivi, t^{o}. 117, 3 Juillet 1893). A proposito di quest' ultimo lavoro osserverò anche che il dubbio espresso colle parole: „Il est peu vraisemblable qu'il existe des courbes gauches dont toutes les cordes doubles soient triples", é già risoluto; cioè non esistono curve gobbe di cui ogni corda sia trisecante (cfr. Bertini, *Intorno ad alcuni teoremi della Geometria sopra una curva algebrica.* (Atti della R. Accad. delle scienze di Torino, vol. XXVI, 1890), ultima parte della nota al n^{0} 3).

**) Noether, *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen* (Sitzungsberichte der k. Ak. der Wiss. zu Berlin, 1888) § I. Cfr. anche Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen*, I, pag. 664—65.

univocamente ad una curva di un iperspazio e poi proiettando quest'ultima da uno spazio arbitrario sul piano.

Comunque, espongo qui una dimostrazione del teorema, che mi pare semplice e rigorosa, ottenuta coll'aiuto d'una trasformazione piana doppia.

La data curva piana si trasformi dapprima (con una trasformazione cremoniana del suo piano) in un'altra Γ con soli punti multipli ordinari $A, A_1, A_2, \ldots A_r$. Si consideri uno A di tali punti e una rete di cubiche per A e per altri sei punti del piano $B_1, B_2, \ldots B_6$ indipendenti fra loro e dalla curva Γ. In particolare occorre che, fissati cinque di essi $B_1, B_2, \ldots B_5$, il sesto B_6 sia scelto esternamente a certi quattro luoghi $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$. Uno Λ_1 di questi luoghi è quello del nono punto base di un fascio di cubiche, di cui gli altri otto punti base sono $A, B_1, B_2, \ldots B_5$ e due punti di Γ, uno C fisso (preso arbitrariamente), l'altro C_1 variabile. Un altro luogo Λ_2 è quello del nono punto base di un fascio di cubiche che passano per $A, B_1, B_2, \ldots B_5$ e toccano Γ in un punto variabile. Un terzo luogo Λ_3 è costituito di r cubiche, ciascuna delle quali è pure descritta dal nono punto base di un fascio di cubiche per $A, B_1, B_2, \ldots B_5$ e tangenti in $A_i (i = 1, 2, \ldots r)$ ad una retta variabile intorno a questo punto. E infine il quarto luogo Λ_4 è composto di r curve, ciascuna generata dal nono punto di un fascio di cubiche per $A, B_1, B_2, \ldots B_5, A_i$ e per un punto variabile di Γ.

Nella trasformazione piana doppia, a cui dà origine la rete di cubiche per $A_1, B_1, B_2, \ldots B_6$*) la curva Γ (del piano semplice) si trasforma in una curva Γ_1 (del piano doppio) univocamente, perchè B_6 è esterno a Λ_1 (onde C non può avere per punto congiunto alcun punto C_1 di Γ). Inoltre, per essere B_6 esterno a Λ_2, la trasformata Γ_1 non avrà regressi. La curva Γ_1 possederà invece un certo numero di punti doppi provenienti dai fasci della detta rete, di cui i due rimanenti punti base sono sopra Γ. Possederà altresì singolarità corrispondenti ai punti $A_1, A_2, \ldots A_r$, le quali saranno della stessa natura di queste e quindi singolarità ordinarie, perchè B_6 è esterno a Λ_3, cioè i punti A_i non giacciono sulla curva doppia del piano semplice, e perchè B_6 è esterno a Λ_4, cioè A_i non è congiunto ad alcun punto di Γ**). Ed è chiaro che Γ_1 non ha altre singolarità,

---

*) Cfr., ad es., De Paolis, *Le trasformazioni piane doppie* (Memorie della R. Accad. dei Lincei, serie 3ª, Vol. I°) n. 28.

**) Nell'enunciato del teorema a pag. 668 delle citate *Vorlesungen* di Clebsch-Lindemann non si ha riguardo alla possibilità di questi due casi. Per mantenere in quell'enunciato la locuzione «*in derselben Weise*», occorre escludere non soltanto i punti multipli che sono nei punti base della rete delle Φ, ma anche quelli che sono sulla jacobiana della rete (cioè sulle curve fondamentali e sulla

ricordando che ad A corrisponde una retta e però alle direzioni di Γ uscenti da A, punti distinti di questa retta, e di più che nel piano semplice non esistono curve fondamentali.

Si perviene al teorema eliminando nello stesso modo successivamente le singolarità di Γ_1 corrispondenti ad $A_1, A_2, \ldots A_i$.

Pavia, 21 febbraio 1891.

---

curva doppia) e quelli che sono congiunti a punti della curva nella involuzione del piano semplice.

[Die Methode von Bertini kommt geometrisch zu reden darauf zurück, die Ebene, in welcher uns die Curve mit singulärem Punkte gegeben ist, als eindeutige Abbildung einer Fläche 3. Ordnung zu betrachten, dadurch die Curve in eine Raumcurve zu verwandeln und letztere hinterher wieder von einem hinreichend allgemeinen Punkte aus auf eine andere Ebene zu projiciren. In dieser Form ist mir der Ansatz noch von Clebsch her bekannt, der mir denselben im Herbst 1869 mündlich mittheilte. Ich erwähne dies nur, weil ich gerade in letzter Zeit in meinen Vorlesungen und Vorträgen wiederholt daran angeknüpft hatte. Die Leser der Annalen werden darum Hrn. Bertini für seine ausführliche Darstellung nicht geringeren Dank wissen.]

F. Klein.

Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen s-Function.

Von

Fr. Schilling in Verden a/A.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 162

Erster Theil: Historischer Rückblick nebst Disposition der Abhandlung.

§ 1. Eigenschaften der s-Function. Ihre conforme Abbildung für reelle oder imaginäre Exponenten λ, μ, ν 163

§ 2. Allgemeines Abbildungsprincip, insbesondere für die s-Function mit complexen Exponenten. Gegenüberstellung des „Fundamentalbereiches" und seines „Kernes" 167

§ 3. Disposition der folgenden Untersuchungen. 172

Zweiter Theil: Der Fall zweier singulärer Punkte in der Ebene des Argumentes.

§ 4. Einander entsprechende Curvenschaaren in der conformen Abbildung der Potenz mit complexen Exponenten 174

§ 5. Der Fundamentalbereich der einfachen Potenz für einen reellen, imaginären und complexen Exponenten. Das Meridian- und Breitencurvenprincip 176

§ 6. Anwendung des letztgenannten Principes auf die Fundamentalbereiche im Falle einer grösseren Zahl singulärer Punkte 182

Dritter Theil: Ueber den Kern der Fundamentalbereiche im Falle dreier singulärer Punkte.

§ 7. Neue Veranschaulichung der loxodromischen Substitutionen 183

§ 8. Betrachtung dreier Schraubenbewegungen, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt 186

§ 9. Specialisirung der Resultate für den Fall dreier elliptischer oder hyperbolischer Substitutionen 189

§ 10. Die in der Gleichung $AB\Gamma = 1$ enthaltenen Relationen als Doppelverhältnissbeziehungen der 6 Fixpunkte 193

§ 11. Die geometrische Deutung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie für complexe Argumente 196

§ 12. Construction des Kernes für gegebene Werthe λ, μ, ν 202

§ 13. Ueberblick über die Gesammtheit aller überhaupt möglichen Kerne 207

Vierter Theil: Ueber die geometrische Natur der allgemeinen Kreisbogendreiecke.

Seite
§ 14. Allgemeine Construction der Kreisbogendreiecke bei gegebenen reellen Exponenten λ, μ, ν 208
§ 15. Das Auftreten zusammenfallender oder sich berührender Begrenzungskreise des Dreiecks 215
§ 16. Theorie der „reducirten" und „verwandten" Dreiecke für reelle, nicht ganzzahlige Exponenten 217
§ 17. Endgültige Betrachtung der Kreisbogendreiecke für ganzzahlige Exponenten 223
§ 18. Grenzfälle der Kreisbogendreiecke für unendlich grosse Exponenten 227
§ 19. Die Dreiecke für theils imaginäre, theils reelle Exponenten 230
§ 20. Die Dreiecke für theils imaginäre, theils aber ganzzahlige oder unendlich grosse Exponenten 234

Fünfter Theil: Discussion der Fundamentalbereiche für complexe Exponenten.

§ 21. Allgemeine Betrachtung dieser Bereiche 237
§ 22. Ueber die Theorie der verwandten Bereiche 239
§ 23. Ueber die Fundamentalvierecke mit unendlichen Kreisbändern . . 243

Sechster Theil: Die Fundamentalbereiche für complexe Exponenten unter der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$.

§ 24. Construction der reducirten Bereiche 245
§ 25. Construction der Gesammtheit aller verwandten Bereiche 252
§ 26. Construction der Fundamentalbereiche für einen ganzzahligen Werth eines der Exponenten 256

Schlussbemerkung 259

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit will zu einer geometrischen Einführung in die allgemeine Theorie der Schwarz'schen s-Function einen Beitrag liefern. Ihr Gegenstand ist im Wesentlichen das Studium der conformen Abbildung, welche die genannte Function von der Ebene des Argumentes entwirft; die hierbei angewandten Methoden werden zumeist einen rein geometrischen Charakter, oft in elementarer Einfachheit, tragen. Der sich darbietende Stoff erwies sich zu umfangreich, um die Betrachtungen schon jetzt zum völligen Abschluss zu führen, doch erschien ein längeres Hinausschieben einer ersten Veröffentlichung aus manchen Gründen unthunlich. Die Anregung zu diesen Untersuchungen verdanke ich den Vorlesungen des Herrn Prof. Klein über „Ausgewählte Capitel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung", die derselbe in den Jahren 1890—91 an der Universität Göttingen ge-

halten hat. Soweit ich im Folgenden auf dieselben Bezug zu nehmen habe, werde ich dies durch den in Klammern hinzugefügten Hinweis (K) andeuten.*)

I. Theil.

Historischer Rückblick nebst Disposition der Abhandlung.

§ 1.

Allgemeine Eigenschaften der s-Function. Ihre conforme Abbildung für reelle oder imaginäre Exponenten λ, μ, ν.

Die Schwarz'sche Function $s\left|\begin{matrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \end{matrix} z\right|$ des unbeschränkt veränderlichen Argumentes z soll hier definirt sein durch die folgende symmetrische Differentialgleichung 3. Ordnung**):

$$\frac{\frac{d^3s}{dz^3}}{\frac{ds}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2s}{dz^2}}{\frac{ds}{dz}}\right)^2 = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \cdot \left[\frac{1-\lambda^2}{2}\cdot\frac{(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{1-\mu^2}{2}\cdot\frac{(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{1-\nu^2}{2}\cdot\frac{(c-a)(c-b)}{z-c}\right].$$

In ihr bezeichnen a, b, c die „singulären Punkte" in der z-Ebene, λ, μ, ν die sogenannten „Exponenten", von denen wir sogleich näher sprechen werden. Bezeichnet man den Ausdruck auf der linken Seite, die „Schwarz'sche Differentialinvariante", mit Hrn. Klein durch das Symbol $[s]_z$, so können wir die letzte Gleichung in die abgekürzte Form setzen: $[s]_z = R(z)$, unter $R(z)$ die angeführte rationale Function von z verstanden. Der Zusammenhang der s-Function mit der hypergeometrischen Reihe und der Riemann'schen P-Function, die ihrerseits einer bestimmten Differentialgleichung 2. Ordnung mit rationalen Coefficienten genügen, ist bekannt genug, sodass wir nicht darauf

*) Nach dem Abschluss dieser Arbeit ist inzwischen die Abhandlung von E. Study über „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen" im XX. Bande der Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften erschienen. Freilich verlangt unsere Fragestellung von vornherein einen anderen Standpunkt in der sphärischen Trigonometrie, indem für uns insbesondere stets die „Dreiecksfläche" im Mittelpunkte des Interesses steht, während bei Study nach dem Vorgange von Möbius das allgemeine Dreieck als Gebilde dreier grösster Kreise der Kugel erscheint, welches durch Festlegung des Drehungssinnes in den Seiten und Winkeln näher definirt ist. Gleichwohl ist die Beziehung beider Arbeiten an manchen Punkten unverkennbar. (Vgl. auch den im ersten Hefte dieses Annalenbandes erschienenen Aufsatz von Hrn. Schoenflies: Ueber Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke.)

**) Dieselbe ist in dieser Form zuerst von Hrn. Klein aufgestellt worden; Ann. 12, p. 170, 1876; an sie knüpft später Papperitz an, Ann. 25, p. 214, 1884.

einzugehen brauchen.*) Vielmehr wollen wir in wenigen Sätzen die wesentlichen Eigenschaften der s-Function zusammenstellen, soweit sie für uns in Betracht kommen:

1. *Aus einer gegebenen Particularlösung s_0 stellt sich das allgemeine Integral s der obigen Differentialgleichung in der Form* $s = \frac{\alpha s_0 + \beta}{\gamma s_0 + \delta}$ *dar, d. h. als allgemeinste gebrochene lineare Function von s_0.* Die Differentialgleichung definirt eine ganze *Functionsschaar*, von der eine bestimmte Function in der Gesammtheit ihrer analytischen Fortsetzungen nur ein einzelnes Individuum vorstellt.

2. *Unter den Particularlösungen befinden sich drei ausgezeichnete, welche sich im Allgemeinen (d. h. jedenfalls für nicht ganzzahlige λ, μ, ν) für die Umgebung der singulären Punkte a resp. b, c in die Gestalt setzen lassen:*

$$s_a = (z - a)^\lambda \cdot P_1(z - a),$$
$$s_b = (z - b)^\mu \cdot P_2(z - b),$$
$$s_c = (z - c)^\nu \cdot P_3(z - c);$$

P_1, P_2, P_3 bedeuten Potenzreihen, in denen das constante Glied nicht verschwindet. Mit Ausnahme der Punkte a, b, c verhält sich die einzelne Function der Schaar in allen Punkten der z-Ebene unverzweigt.

3. *Umläuft die Variable z in ihrer Ebene den Punkt a oder b, c, so erleidet die beliebige Particularlösung s_0 bestimmte lineare Substitutionen, die wir als die Fundamentalsubstitutionen* A, B, Γ *bezeichnen.*

Nun lässt sich ein Umlaufsweg, der die Punkte a, b, c gemeinsam umschliesst, einmal in die Aufeinanderfolge der einzelnen Umkreisung der Punkte a, b, c zerlegen, andererseits sich über das Unendliche auf einen Punkt zusammenziehen. Dies ergiebt für die Fundamentalsubstitutionen die wichtige Beziehung, dass ihre successive Anwendung zur Identität führt. Dieses Resultat sei durch die symbolische Gleichung $\mathsf{AB\Gamma} = 1$ ausgedrückt, in der wir die Zusammenstellung AΒΓ von links nach rechts lesen wollen.

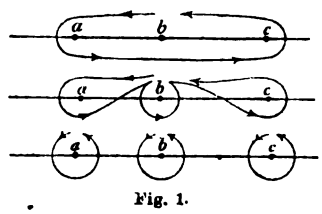


Fig. 1.

Die Sätze unter 1 und 2 genügen geradezu, um umgekehrt die s-Function in der Weise der Riemann'schen Einführung der P-Function vollständig zu bestimmen.

Nun hat Hr. Schwarz nach dem Vorgange Riemann's bemerkt, dass die s-Function für reelle Werthe der Grössen λ^2, μ^2, ν^2 die positive

*) Vergl. z. B. Schellenberg, Diss. Göttingen 1892: Neue Behandlung der hypergeometrischen Function auf Grund ihrer Darstellung durch das bestimmte Integral, pag. 5.

Halbebene des Argumentes s auf ein von 3 Kreisbogen begrenztes Flächenstück abbildet, wie sogleich näher anzugeben ist.*) Bei dieser Fassung des Satzes ist vorausgesetzt, dass die singulären Punkte a, b, c der s-Ebene durch eine geeignete lineare Transformation auf die Axe des Reellen transformirt sind, etwa in die Punkte 0, 1, ∞, was stets möglich ist. Hr. Schwarz hat diesen Gedanken vor allem in der wichtigen, für dieses ganze Untersuchungsgebiet grundlegenden Arbeit ausgeführt: *„Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt.*"**) Sind im Besonderen die Grössen λ^2, μ^2, ν^2 positiv, so wird das Abbild der Halbebene s durch ein Kreisbogendreieck mit den Ecken a_1, b_1, c_1 gegeben, welches im Innern wie auf den Seiten mit Ausnahme der 3 Ecken keinen Windungspunkt enthält. In den Ecken a_1, b_1, c_1 aber, welche den Punkten a, b, c der s-Ebene entsprechen, bilden die Kreisbogen entspr. die Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$; es können demnach hier Windungspunkte beliebig hoher Ordnung auftreten. *Ist jedoch eine oder mehrere der Grössen λ^2, μ^2, ν negativ, so geht die den zugehörigen singulären Punkten a, b, c entsprechende Ecke des Dreiecks verloren, indem die begrenzenden Kreisbogen sich nicht mehr schneiden.*

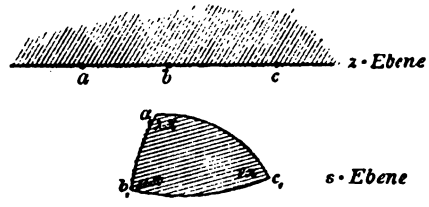


Fig. 2.

Alsdann windet sich die Dreiecksfläche zwischen diesen beiden Kreisen immerfort herum, gleichsam als ein unendliches Band sich selbst unendlich oft überdeckend. Doch unterlässt es Hr. Schwarz von allen diesen Kreisbogendreiecken eine anschauliche geometrische Vorstellung zu geben. In diesem Sinne werden wir im Anschluss an eine Arbeit des Hrn. Klein***) eine erste Ergänzung der bisherigen Theorie geben, indem wir die Dreiecke bei gegebenen reellen oder imaginären Werthen der Exponenten λ, μ, ν wirklich zu construiren unternehmen und in die verschiedenen möglichen Gestalten eine unmittelbare klare Einsicht

*) Man sehe das erste Auftreten dieser Abbildung in Riemann's posthumer Minimalflächenarbeit, Ges. Werke 1. Aufl., 1876, pag. 283 (zuerst 1867 veröffentlicht), sowie l. c. pag. 417; sodann Schwarz: „Ueber einige Abbildungsaufgaben", (1869) Ges. Abh. II, pag. 78—80, „Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel", (1868) Ges. Abh. II, pag. 100—101, „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ etc.", (1870) Ges. Abh. II, pag. 144—45, „Bestimmung einer spec. Minimalfläche", (1871) Ges. Abh. I, pag. 25.

**) Crelle's Journal, Bd. 75 (1873), pag. 292—335, Ges. Abh. II, pag. 211—259 und 172—74.

***) „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe", Ann. Bd. 37, pag. 579 ff. 1890.

gewähren. Wie wir sogleich an dieser Stelle hervorheben wollen, werden wir für unsere Darstellung einmal in bekannter Weise uns der *stereographischen Uebertragung der Ebene auf die Kugeloberfläche* bedienen, die auch den Betrachtungen des Hrn. Schwarz zu Grunde liegt; hat derselbe doch geradezu den Buchstaben s zur Bezeichnung unserer Function gewählt als Abkürzung für „sphärische Function". Wir gewinnen hierdurch den Vortheil, das unendlich Weite anschaulich zu beherrschen, indem wir dessen Sonderstellung aufheben. Unsere von den 3 Kreisbogen begrenzten *Bereiche* werden wir in leicht verständlicher Erweiterung der Bezeichnung der Elementargeometrie dementsprechend als *allgemeine sphärische Dreiecke**) bezeichnen. Zweitens wird es uns möglich sein, von den Anschauungen der projectiven (hyperbolischen) Maassbestimmung, wie sie von den Herren Cayley und Klein entwickelt ist**), Gebrauch zu machen, indem wir die Kugel der Variabeln s als Fundamentalgebilde zu Grunde legen. Es sei dann allgemein der Abstand zweier Punkte wie der Winkel zweier Ebenen definirt als $\frac{i}{2} \cdot \log DV$, wo DV das Doppelverhältniss bedeutet, welches die beiden Punkte resp. Ebenen mit den reellen oder imaginären Elementen ihres Trägers bilden, die der Fundamentalfläche angehören (d. h. mit den Schnittpunkten der Verbindungslinie der beiden Punkte mit der Kugel resp. den Tangentialebenen durch die Schnittgerade der beiden Ebenen an die Kugel). Bieten doch diese für Strecken und Winkel definirten Maassverhältnisse den wesentlichen Vortheil dar, bei projectiven Transformationen des Raumes, welche die Fundamentalkugel in sich überführen, unverändert erhalten zu bleiben. Wir werden übrigens, wenn von solchen nicht-Euklidischen Entfernungen oder Winkeln die Rede ist, es ausdrücklich hervorheben, falls nicht von vornherein eine andere Auffassung ausgeschlossen ist.

Doch wollen wir der Arbeit des Hrn. Schwarz noch die folgenden Sätze entnehmen: Das einzelne Dreieck repräsentirt nur einen einzelnen „Zweig" einer s-Function: *die Gesammtfunction wird uns erst durch die fortgesetzte symmetrische Wiederholung, die „Spiegelung"****) *des Ausgangsdreiecks an seinen begrenzenden Kreisbogen und der neuen Dreiecke an ihren freien Seiten, vor Augen geführt*, ein Process, dem in der Ebene des Argumentes die analoge Aneinanderreihung der Halbebenen

---

*) Im Gegensatze zu Möbius, der die *Liniensüge* dreier Bogen grösster Kreise als allgemeines sphärisches Dreieck bezeichnet, vgl. Ges. Werke II, p. 1—54, p. 71—88.

**) Cayley, Sixth memoir upon Quantics, Phil. Transactions t. 149, 1859. Collected mathem. Papers II, p. 561. — Klein, Annal. Bd. 4, pag. 573 ff., 1871; Bd. 6, pag. 112 ff., 1873.

***) Crelle's Journal, Bd. 75, pag. 316; Ges. Abh. II, pag. 238; sowie Klein-Fricke, ellipt. Modulfunctionen, 1890, I, pag. 85 ff.

um die Punkte a, b, c entspricht. Wir werden hierauf sogleich noch zurückkommen. Im Allgemeinen werden hierbei die Ebenen des Argumentes und der Function in Riemann'scher Anschauung unendlich oft überdeckt zu denken sein, wenn wir eben den Gesammtverlauf der s-Function überblicken wollen. Jedes andere Individuum der Functionenschaar $\frac{\alpha s_0 + \beta}{\gamma s_0 + \delta}$ ferner erhalten wir in seiner Abbildung durch eine lineare Substitution der Variabeln s, welche die Eckpunkte a_1, b_1, c_1 des Ausgangsdreiecks in irgend drei andere Punkte transformirt. *Demgemäss sind alle Dreiecke für uns gleichwerthig, die in directer Möbius'scher Kreisverwandtschaft zu einander stehen.*

§ 2.

Allgemeines Abbildungsprincip, insbesondere für die s-Function mit complexen Exponenten. Gegenüberstellung des „Fundamentalbereiches" und seines „Kernes".

Die Schwarz'schen Betrachtungen sind nun, weit über die nächsten Ziele des Verfassers hinaus, die Grundlage zu einer neuen Theorie geworden, die darauf hinausläuft, die allgemeine Differentialgleichung 3. Ordg.: $[\eta]_s = f(s)$, wo f eine rationale oder algebraische Function bezeichnen möge, geometrisch zu behandeln.*) Anstatt nämlich das conforme Abbild der Ebene des Argumentes im einzelnen Falle von den analytischen Entwickelungen aus zu studiren, kann man umgekehrt dasselbe zum Ausgangspunkt wählen und geradezu als Definition der betreffenden Function an die Spitze der Untersuchung stellen. Diese Gedanken gruppiren sich um den Begriff des *„Fundamentalbereiches"*, wie derselbe von Hrn. Klein in seiner Arbeit: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie" im 21. Bde. der Math. Annal. (1882) in allgemein umfassender Weise eingeführt ist. Unter demselben haben wir einen von Stücken irgend welcher Curven begrenzten Bereich einer „Riemann'schen Mannigfaltigkeit" zu verstehen, die zu je zweien durch ein bestimmtes analytisches Gesetz punktweise einander zugeordnet sind. Wir wollen nicht näher darauf eingehen, wie diese allgemeine Definition zu specialisiren ist, welche Bedingungen ein solcher Bereich zu erfüllen hat, um „brauchbar" zu sein, in welcher Weise wir uns aus ihm eine geschlossene Mannigfaltigkeit hergestellt denken können u. dergl.**) Vielmehr wollen wir sogleich zu unserem Dreiecksfalle zurückgehen, um uns an ihm die Verhältnisse im Einzelnen

*) Man sehe Klein, Math. Ann. Bd. 40, pag. 138 (1892).

**) Vgl. Klein: „Ueber den Begriff des functionentheoretischen Fundamentalbereichs", Ann. 40, pag. 130 ff. (1892).

klar zu machen. Es sei als Ausgangsdreieck das Dreieck $a_1 b_1 c_1$ der Fig. 3 gewählt, welches uns das Abbild der positiven Halbebene vorstellen möge. Indem wir dasselbe an einer seiner 3 Seiten z. B. an $a_1 b_1$ spiegeln, erhalten wir in dem schraffirten Dreiecke $a_1 b_1 c_2'$ eine Abbildung der negativen Halbebene. Dem Viereck $a_1 c_1 b_1 c_2'$ entspricht demnach die ganze von b über c und das Unendliche bis a längs der Axe der Reellen eingeschnittene Ebene des Argumentes z. Allemal zwei Punkte der gleichnamigen Seiten $c_1 b_1$ und $c_2' b_1$ resp. $c_1 a_1$ und $c_2' a_1$ werden nun einander zugeordnet sein, indem sie demselben (aber auf verschiedenen Ufern des Schnittes gelegenen) Argumentwerth z entsprechen. Indem man von dem Punkte X des einen Ufers in der eingeschnittenen z-Ebene durch eine positive (resp. negative) Umkreisung des Punktes a oder b zu dem gegenüberliegenden Punkte X' des anderen Ufers gelangt, so ergiebt sich, dass die Zuordnung der genannten Kreisbogenpaare durch die Fundamentalsubstitutionen A und B geleistet wird. Fügen wir in unserer Figur 3 auch noch die Spiegelung des Ausgangsdreiecks an den Seiten $a_1 c_1$ und $b_1 c_1$ hinzu, so können wir für die beiden neuen Dreiecke $a_1 c_1 b_2'$ und $b_1 c_1 a_2'$ die analoge Betrachtung wie soeben durchführen. Es werden die beiden Halbebenen des Argumentes jetzt längs der Strecke ac bezw. ca zusammenhängen, wobei die letzte Strecke sich über den Unendlichkeitspunkt hinüberzieht. Zu den Substitutionen A und B gesellt sich dann, wie leicht zu übersehen ist, noch die dritte Fundamentalsubstitution Γ hinzu, der Umkreisung des Argumentes z um den Punkt c entsprechend. In unserem Falle reeller Werthe λ, μ, ν haben die Fundamentalsubstitutionen speciell elliptischen Charakter.*) In der Figur 3 erhalten wir zugleich eine unmittelbare geometrische Anschauung unserer symbolischen Gl. $AB\Gamma = 1$. Durch die Anwendung der 3 Substitutionen $AB\Gamma$ in irgend einer cyklischen Reihenfolge gehen nämlich die Dreiecke $b_2' a_1 b_1$, $c_2' a_1 c_1$, $a_2' b_1 c_1$ successive in einander über, sodass wir schliesslich zum ersten Dreieck zurückgelangen. Im speciellen Falle enthält die Gl. $AB\Gamma = 1$ den schon längst bekannten Satz**), dass bei der successiven Drehung der Kugel durch die doppelten Winkel eines ge-

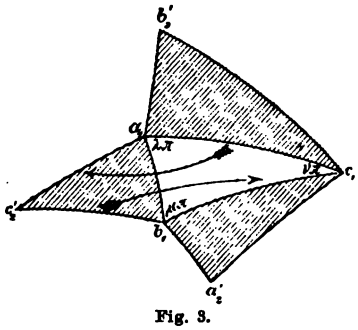


Fig. 3.

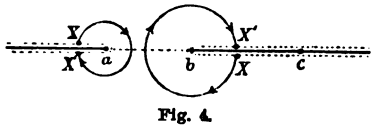


Fig. 4.

*) Vgl. Klein-Fricke, Ellipt. Modulfunctionen, Bd. I, 1890, pag. 165.

**) Man sehe z. B. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin 1853, Art. 280 u. 346; Thomson u. Tait, Natural Philosophy, Cambridge 1886, I. Art. 95.

wöhnlichen sphärischen Dreiecks um die zu seinen Ecken gehörenden Durchmesser der Kugel die letztere in sich selbst übergeführt wird.

Wir sind nun zu dem Punkte gekommen, um das Ziel unserer eigenen Untersuchung angeben zu können. *Ist einmal die erneute Durcharbeitung der geometrischen Theorie für reelle und rein imaginäre Werthe λ, μ, ν eine Hauptaufgabe dieser Arbeit, so gilt es ferner die genannten Betrachtungen für complexe Werthe der Grössen λ, μ, ν zu verallgemeinern, insbesondere auch in diesen Fällen den Fundamentalbereich der s-Function zu construiren, d. h. denjenigen Bereich der s-Ebene, welcher als Abbild der zweckmässig eingeschnittenen Ebene des Arguments zu gelten hat.* Wie sich von selbst versteht, wird es sich jetzt nicht mehr empfehlen, die Abbildung der einzelnen Halbebene für sich zu betrachten. Bevor wir jedoch in die Einzelheiten näher eindringen, wird es zweckmässig sein, uns in Kürze mehr schematisch als streng einen Ueberblick über diese Abbildung zu schaffen.

Erinnern wir uns zunächst, dass unter den Particularlösungen der Differentialgleichung 3. Ordnung für die s-Function drei ausgezeichnete vorhanden sind, die in der Nähe der singulären Stellen a, b, c sich entsprechend verhalten wie $(z-a)^{\lambda}$, $(z-b)^{\mu}$, $(z-c)^{\nu}$, d. h. wie eine Potenz mit complexen Exponenten. Indem nun die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sich als gebrochene, lineare Function dieser ausgezeichneten Lösungen darstellen lässt, so folgt, dass eine geradlinige Fortschreitungsrichtung von einem singulären Punkte in der Ebene des Argumentes durch eine beliebige s-Function der Schaar in der unmittelbaren Nähe des entsprechenden Punktes der Ebene der Function sich einer logarithmischen Spirale anschmiegen wird, *dass aber umgekehrt eine geradlinige Fortschreitungsrichtung in der Ebene der Function von dem letztgenannten Punkte eine spiralige Curvenendigung in den singulären Punkten der s-Ebene bedingt.**) Wollen wir daher eine einfache Gestalt des Fundamentalbereiches wünschen, so werden wir jedenfalls dem Einschnitt der s-Ebene in der Nähe der singulären Punkte bestimmte spiralige Endigungen geben müssen (K).

Die Verallgemeinerung der Betrachtung des speciellen Falles reeller λ, μ, ν legt nun die folgende Vermuthung nahe: *Es dürfte möglich sein, die s-Ebene so mit einem Einschnitt in der soeben charakterisirten Weise von einem der singulären Punkte zu den beiden anderen hin zu versehen, dass die Abbildung dieser eingeschnittenen Ebene wiederum ein Kreisbogenviereck darstellt, dessen Seiten paarweise einander zugeordnet sind, jedoch nunmehr durch loxodromische Substitutionen, deren einer Fixpunkt jedenfalls in der den beiden Seiten gemeinsamen Ecke liegt.***)

*) Man sehe pag. 175 f. dieser Arbeit.

**) Das Auftreten rein imaginärer Werthe der Exponenten sei zunächst ausgeschlossen.

Man sehe die schematischen Figuren 5 und 6. In betreff der Winkel dieser Vierecke wird zu sagen sein, dass der Winkel der Ecke a_1 gleich $2\lambda'\pi$, der Ecke $b_1 = 2\mu'\pi$ und die Summe der Winkel in den Ecken c_1 und c_2' gleich $2\nu'\pi$ betragen wird, woselbst λ', μ', ν' die reellen Theile der Exponenten λ, μ, ν bezeichnen mögen. Diese Vierecke werden wir dann geradezu als eine Verallgemeinerung der sphärischen Dreiecke ansehen können (K). Wie nun im Falle reeller Exponenten λ, μ, ν die zweiten Fixpunkte der Fundamentalsubstitutionen A und B (resp. Γ) in den zweiten Schnittpunkten der zugeordneten Kreisbogen

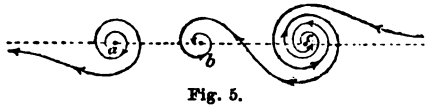


Fig. 5.

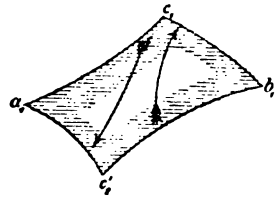


Fig. 6.

liegen, so werden wir auch im allgemeinen Falle complexer Exponenten die gleiche Annahme in den Figuren zu bevorzugen suchen; doch ist dieselbe keineswegs eine nothwendige Forderung. Die solcherweise specialisirten Figuren werden wir dann „*Normalvierecke*" nennen.

Es sei noch erwähnt, dass man die Zerschneidung der z-Ebene auch in anderer, übrigens mehr symmetrischer Weise vorgenommen denken kann, indem man von einem beliebigen Punkte O aus nach den Punkten a, b, c hin Schnitte legt, die sich wieder in der Nähe der letztgenannten Punkte in bestimmter Weise spiralig zu winden haben (Fig. 7). Man wird erwarten können, dass bei geeigneter Einrichtung dieser Schnitte die Abbildung ein *Kreisbogensechseck*

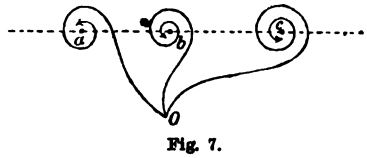


Fig. 7.

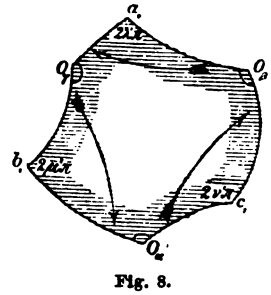


Fig. 8.

$a_1 O_\gamma b_1 O_\alpha c_1 O_\beta$ liefern wird, dessen Winkel in den Ecken a_1, b_1, c_1 gleich $2\lambda'\pi$, $2\mu'\pi$, $2\nu'\pi$ sind, während die Summe der Winkel der Ecken O_α, O_β, O_γ, gerade 2π beträgt (Fig. 8). Die in den Ecken a_1, b_1, c_1 zusammenstossenden Kreisbogen werden, wie die Figur durch Pfeile angiebt, mittels loxodromischer Substitutionen einander zugeordnet sein.

Auch hier ist wieder der „*Normalfall*" denkbar, dass die einander entsprechenden Kreisbogen sich in den zweiten Fixpunkten der zugehörigen Fundamentalsubstitutionen schneiden. Die Kreisbogenvierecke ergeben sich, wie leicht zu sehen, als Specialfall der eben geschilderten Bereiche, wenn der Punkt O in einen der singulären Punkte a, b, c selbst hineinrückt (K).

Wir wollen noch einmal ausdrücklich hervorheben, dass unsere bisherigen Angaben zunächst nur den Werth einer schematischen Uebersicht besitzen.

Was den Fall betrifft, dass einer oder mehrere der Exponenten λ, μ, ν rein imaginär werden, während die übrigen complex sind, so wird derselbe in analoger Weise eine besondere Behandlung erfahren müssen, wie auf pag. 165 im Falle reeller Werthe λ^2, μ^2, ν^2 angegeben ist. Gerade der nächste Theil dieser Arbeit wird der Aufklärung der besonderen Stellung der Abbildung für rein imaginäre Exponenten gewidmet sein.

Eine weitere Bemerkung bezieht sich auf die Gleichung $AB\Gamma = 1$. Zunächst ist leicht zu übersehen, wie die Sätze der pag. 168 sich auf die allgemeineren Figuren 6 und 8 übertragen. Es kommt dabei statt des Principes der Symmetrie das „*Princip der analytischen Fortsetzung*" in Anwendung, wie dasselbe in allgemeiner Fassung zuerst von Herrn Klein in der schon genannten Arbeit Math. Ann. 21 entwickelt ist. Nach demselben haben wir einfach den ersten Bereich vermöge einer der Fundamentalsubstitutionen, welche die Zuordnung der Seiten vermitteln, zu reproduciren, um von der Fortsetzung der Abbildung ein Bild zu gewinnen. Wir wollen im Einzelnen diese einfachen Verhältnisse nicht weiter ausführen. Indem die Aufeinanderfolge linearer Substitutionen allemal wieder eine lineare Substitution ergiebt, so lässt sich die linke Seite der symbolischen Gleichung $AB\Gamma = 1$ sofort durch eine einzige Substitution darstellen; die Vergleichung ihrer Coefficienten mit denen der Identität führt dann in extenso zu 3 Gleichungen (da es ja nur auf das Verhältniss der Coefficienten in einer linearen Substitution ankommt). Dieselben erweisen sich, wie wir sehen werden, für den Fall des gewöhnlichen sphärischen Dreiecks identisch mit den 3 Fundamentalrelationen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie. Im allgemeinen Falle complexer Exponenten λ, μ, ν wird dann die Gleichung $AB\Gamma = 1$ uns als Ausgangspunkt dienen, um die Formeln der sphärischen Trigonometrie auch für complexe Werthe der Argumente geometrisch anschaulich zu deuten. *)

Denken wir uns nun die Figuren auf der Kugel gezeichnet, so

*) Das bezügliche Resultat ist bereits in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1891, p. 188—190 (abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 39, 1891, p. 598—600) von mir angegeben.

werden wir neben den Flächen der Fundamentalbereiche die 3 Verbindungsgeraden der Fixpunktpaare der Fundamentalsubstitutionen als wesentlich erkennen. Wir bringen dies zum Ausdruck, indem wir das Gebilde dieser 3 Geraden als „*Kern*" der Figur bezeichnen und den Fundamentalbereichen selbst gegenüberstellen (K). Demgemäss wird auch unsere spätere Untersuchung dem Kern ein besonderes Capitel widmen. Im Falle eines gewöhnlichen sphärischen Dreiecks stellt der „Kern", wie sofort zu sehen, gerade die 3 Kanten des zugehörigen räumlichen Dreikants dar, die sich im Mittelpunkt der Kugel schneiden.

In Rücksicht auf unsere geometrischen Entwickelungen den Kern betreffend kommen aus der Theorie der s-Function insonderheit die folgenden Sätze in Betracht*):

1. *Wenn die Exponenten* λ, μ, ν *der Gleichung genügen*

$$\pm\lambda \pm\mu \pm\nu = 2n + 1,$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet und von den doppelten Vorzeichen je ein beliebiges auszuwählen ist, dann ist es allemal möglich, einen geeignet ausgewählten Zweig der s-Function durch ein gewöhnliches (unbestimmtes) Integral darzustellen. Dann haben aber die drei Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ einen Fixpunkt gemeinsam, d. h. *die drei Geraden des Kernes schneiden sich auf der Kugel in einem Punkte.*

2. „*Verwandte s-Functionen*" *sind solche, deren Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, die eine gerade Summe haben.* Wie wir sehen werden, gehören die zugehörigen Fundamentalbereiche demselben Kern an, sodass wir geradezu sagen können: *Verwandte s-Functionen sind diejenigen, deren Fundamentalbereiche denselben Kern besitzen.* Im Falle reeller λ, μ, ν wissen wir dann zugleich, dass die Fundamentalbereiche stets von Bogen derselben Kreise begrenzt werden.**) An der letzteren Definition werden wir insbesondere festhalten, wenn es gilt, den Begriff der verwandten Functionen auch auf die Fälle ganzzahliger λ, μ, ν zu übertragen.

§ 3.

Disposition der folgenden Untersuchungen.

Nun ist es von vornherein klar, dass der analytischen Entwicklung der angegebenen Abbildung auf Grund einer anderweitig gegebenen Definition der s-Function sich nicht geringe Schwierigkeiten entgegenstellen werden. Man wird daher umgekehrt auf rein geometrischem Wege die allgemeinen Fundamentalbereiche darzustellen

*) Auf gewisse Fälle eines unbestimmten Kernes und die damit in Zusammenhang stehenden Modificationen, welche die folgenden Sätze für ganzzahlige Werthe der Grössen λ, μ, ν etwa erleiden, sei an dieser Stelle nur eben hingewiesen.

**) Man sehe Papperitz, Math. Ann. Bd. 25, 1885, pag. 218.

erstreben. Vor allem ist der Nachweis zu führen, wie man *für jede beliebige Auswahl complexer Exponenten* λ, μ, ν in der That den Fundamentalbereich, sei es als Kreisbogenviereck oder in allgemeinerer Gestalt, construiren kann. Ist dies gelungen, dann wird man geradezu die geometrische Figur als Definition der s-Function vermöge der Forderung ihrer Abbildung auf die z-Ebene an die Spitze der Untersuchung stellen können und solcherweise eine neue Einführung in die Theorie der s-Function (und damit der hypergeometrischen Function) gewinnen, welche in mancher Beziehung wesentliche Vortheile bieten dürfte, wie am Schlusse der Arbeit näher angegeben wird. Hierbei werden die von den Herren Schwarz und Neumann entwickelten Existenzsätze in Anwendung kommen; betreffs der Angabe weiterer Einzelheiten sei auf die Arbeit des Herrn Ritter*) verwiesen, dessen in § 2 gegebene Betrachtungen sich unmittelbar auf unsere Figuren specialisiren lassen.

Man wird sich nun keineswegs darüber täuschen dürfen, dass diese geometrische Methode ihre eigenartigen Schwierigkeiten besitzt gerade in der Mannigfaltigkeit der Figuren, die es zu beherrschen gilt. Schon der gewöhnliche Fall reeller λ, μ, ν wird uns mit den verschiedensten Gestalten von Dreiecken bekannt machen und uns in den ganzen Reichthum der neuen geometrischen Anschauungen einen Einblick gewähren. Umgekehrt dürfte in dieser Vielseitigkeit an und für sich ein wesentliches Moment des Interesses, auch in rein geometrischer Hinsicht, zu erblicken sein.

Indem wir das bisher Gesagte nochmals überblicken, gewinnen wir folgende Disposition unserer geometrischen Untersuchungen:

Zunächst werden wir im folgenden *zweiten Theile* unserer Arbeit *für den einfacheren Fall die geometrische Theorie vollständig durchführen, dass in der Ebene des Arguments nur zwei singuläre Punkte a und b vorhanden sind.* Die hier in Frage kommende abbildende Function η, die gleichfalls einer Differentialgleichung 3. Ordnung der Form $[\eta]_s = R(s)$ (s. pag. 167) genügt, wird durch $\eta = z^\lambda$ gegeben, woselbst unter λ eine im allgemeinen complexe Grösse zu verstehen ist. Diese Betrachtungen werden uns vor allem in die singuläre Stellung, welche das Auftreten rein imaginärer Exponenten bietet, einen klaren Einblick verschaffen und uns zugleich als Muster unserer allgemeineren Untersuchung dienen können.

Sodann werden wir uns *im dritten Theile mit dem „Kern" der Fundamentalbereiche für die Schwarz'sche s-Function* beschäftigen und dessen Eigenschaften und Construction bei gegebenen complexen Werthen

*) „Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null", Math. Ann. Bd. 41, 1893, pag. 1 ff.

der Exponenten λ, μ, ν allgemein entwickeln. Die letztere kommt insbesondere auf die interessante Aufgabe zurück: *Zu zwei gegebenen Punktepaaren der Kugel ein drittes zu finden, welches mit ersteren vorgegebene Doppelverhältnisse bildet.* Als Anhang wird sich *die geometrische Deutung der Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie für complexe Argumente* ergeben.

Schliesslich werden wir *im vierten Theile* für reelle oder imaginäre Exponenten λ, μ, ν *die Construction der sphärischen Dreiecke* vollständig durchführen, sodann *im fünften Theile* einige Erläuterungen geben betreffs der wirklichen *Construction der Fundamentalbereiche für complexe Exponenten* λ, μ, ν; endlich werden wir *im sechsten Theile* für den p. 172 erwähnten speciellen Fall, *dass die Geraden des Kernes sich auf der Kugel in einem Punkte schneiden, die Fundamentalbereiche in Gestalt geradlinig begrenzter Normalvierecke* allgemein darzustellen lehren.

In dem ganzen Verlauf der Untersuchungen aber werden wir insbesondere stets *die geometrische Theorie der verwandten s-Functionen* hervortreten lassen.

II. Theil.

Der Fall zweier singulärer Punkte in der Ebene des Argumentes.

§ 4.

Einander entsprechende Curvenschaaren in der conformen Abbildung der Potenz mit complexen Exponenten.

Wir beginnen jetzt sogleich damit, die geometrische Theorie des einfachen Falles zu entwickeln, in dem die Zahl der singulären Punkte in der z-Ebene gleich 2 ist. Da die abbildende Function sich besonders einfach gestaltet, so wollen wir hier mit ihrer analytischen Darstellung, nicht mit den Fundamentalbereichen beginnen. Die jene Function definirende Differentialgleichung 3. Ordnung $[\eta]_z = R(z)$, auf die wir bereits pag. 173 dieser Arbeit hingewiesen haben, nimmt im Falle zweier singulärer Punkte a und b die einfache Gestalt an:

$$[\eta]_z = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \cdot \left\{ \frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{a-b}{z-a} + \frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{b-a}{z-b} \right\}$$

oder

$$[\eta]_z = \frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(z-a)^2 (z-b)^2},$$

indem die den Punkten a und b zugehörigen Exponenten einander gleich genommen werden müssen, da andernfalls der Punkt ∞ als singulärer Punkt hinzukommen würde. Verlegen wir die Punkte a und b durch geeignete lineare Substitution der Variabeln z in die Punkte 0 und ∞, so erhalten wir die folgende Gleichung:

$$[\eta]_z = \frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{1}{z^2}.$$

Dieselbe lässt leicht die Particularlösung $\eta_0 = z^\lambda$ erkennen, aus der sich das allgemeine Integral in der Form $\frac{\alpha \cdot \eta_0 + \beta}{\gamma \cdot \eta_0 + \delta}$ mit drei wesentlichen Constanten ergiebt. *Im Falle zweier singulärer Punkte wird daher die abbildende Function allgemein durch die gebrochene lineare Function der Potenz der Unabhängigen mit dem complexen Exponenten λ gegeben.*

Wir wollen zunächst *der Abbildung der Function* $\eta_0 = z^\lambda$ einige Worte widmen, da dieselbe nicht hinreichend bekannt sein dürfte. Die Constanten sind bereits so normirt, dass der Nullpunkt und der Unendlichkeitspunkt beider Ebenen sich entsprechen, indem wir hier unbeschadet der Allgemeinheit den reellen Theil λ' der Grösse $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ als positiv voraussetzen dürfen. Wir wollen unser Augenmerk besonders darauf richten, welches Curvensystem in der η-Ebene dem Orthogonalsystem des vom Nullpunkt der z-Ebene auslaufenden Strahlenbüschels und des concentrischen Kreisbüschels um denselben Punkt entspricht. Wir gehen zu dem Zweck von $\eta_0 = z^\lambda$ zu der logarithmirten Form der Gleichung $log\ \eta_0 = \lambda\ log\ z$ über. Indem wir dann nach einander die Abbildung: $\omega = \log z$, $\omega' = \lambda . \omega$, $\eta = e^{\omega'}$ betrachten, findet man das Resultat: *Dem genannten Orthogonalsystem der z-Ebene entspricht ein aus zwei Schaaren „congruenter" logarithmischer Spiralen bestehendes Orthogonalsystem, von denen die eine Schaar im positiven, die andere im negativen Sinne sich windet.**) Aus dem Umstande, dass ein beliebiger Punkt der z-Ebene einmal dem Punkte $\eta = z^\lambda$, dann jedoch, indem wir in der z-Ebene einen Umlauf um den Nullpunkt ausgeführt denken, dem Punkte $\eta' = e^{2i\pi\lambda} \cdot z^\lambda = e^{2i\pi\lambda} \cdot \eta$ entspricht, folgern wir sofort die analytische Gleichungsform der beiden Loxodromenschaaren in der s-Ebene. Dieselben sind einfach die *Bahncurven der beiden loxodromischen Substitutionen***):

$$\text{I.}\quad \eta' = e^{2i\pi\lambda} \cdot \eta,$$
$$\text{II.}\quad \eta' = e^{2\pi\lambda} \cdot \eta,$$

wobei die Curven I den concentrischen Kreisen, die Curven II den Strahlen der z-Ebene entsprechen.

Wir gehen nun der besseren Uebersicht wegen wieder durch stereographische Projection zur Kugeldarstellung der complexen Variabeln η und z über und wollen unsere geometrische Beschreibung so einrichten, dass eine lineare Substitution der Variabeln nichts Wesentliches ändert.

---

*) Man sehe Fig. 39 pag. 168 der Ellipt. Modulfunctionen von Klein-Fricke, I. Bd. 1893.

**) Vgl. Klein-Fricke, Ellipt. Modulfunctionen, Bd. I, 1890, pag. 168, 172.

Indem auch umgekehrt z sich als Potenzfunction von η mit complexen Exponenten, $z = \eta^{\frac{1}{\lambda}}$, darstellt, so erhalten wir den allgemeinen Satz:

Den hyperbolischen und elliptischen Kreisschaaren [nach Steiners Terminologie)] der Punkte A und B in der η-Ebene oder der Punkte a und b in der z-Ebene entspricht allemal ein aus zwei Loxodromenschaaren bestehendes Orthogonalsystem**) der anderen Ebene, die ihre Asymptotenpunkte in den Punkten a und b, resp. A und B, haben.* (A und B sollen die den Punkten a, b der z-Ebene entsprechenden Punkte der η-Ebene bezeichnen.)

Es sei bemerkt, dass die Conformität der Abbildung überall bewahrt ist, mit Ausnahme in den Punktepaaren A, B und a, b. Dort entspricht einem Winkel φ in der z-Ebene ein Winkel $\varphi \cdot \lambda'$ in s-Ebene.

Es bleibt nur noch ein Wort zu sagen für den Fall, dass λ reell oder imaginär wird. In beiden Fällen entsprechen den beiden Kreisschaaren der einen Kugel die beiden Kreisschaaren der anderen; während jedoch bei reellem λ jedesmal die elliptischen und die hyperbolischen Kreisschaaren der beiden Kugeln beziehungsweise zusammengeordnet sind, ist das Entsprechen für imaginäres λ ein kreuzweises, indem die elliptische Kreisschaar der einen Kugel der hyperbolischen der anderen entspricht. Es ist gut, diese Resultate durch continuirliche Abänderung des Werthes λ in ihrer Beziehung zu einander sich klar zu machen.

§ 5.

Der Fundamentalbereich der einfachen Potenz für einen reellen, imaginären und complexen Exponenten. Das Meridian- und Breitencurvenprincip.

Es wird uns nach diesen Vorbemerkungen ein Leichtes sein, die zu der *Function $\eta = z^{\lambda}$ gehörenden Fundamentalbereiche*, die sich als Abbild der zweckmässig eingeschnittenen z-Ebene darstellen, zu studiren. Denken wir uns zunächst einmal die letztere längs eines Kreisbogens der elliptischen Schaar von a nach b eingeschnitten. Den Ufern dieses

---

*) Unter einer elliptischen Kreisschaar verstehen wir die Gesammtheit aller durch 2 feste Punkte gehende Kreise, indem diese auf ihrer gemeinsamen Centrale eine elliptische Involution bestimmen; unter einer hyperbolischen die Gesammtheit der zu ersteren orthogonalen Kreise, die also auf ihrer Centrale eine hyperbolische Involution bestimmen. Vgl. Klein-Fricke, Ellipt. Modulfunctionen, Bd. I, 1890, pag. 165, Anm.

**) Vgl. Figur 41 der Modulfunctionen pag. 172; sowie Holzmüller, Zeitschrift für Math. und Physik von Schlömilch, 1871, pag. 201 ff.: „Ueber logarithmische Doppelspiralen".

Schnittes entsprechen dann im allgemeinen Falle eines complexen λ zwei logarithmische Spiralen der Schaar II, die im Falle eines reellen λ in 2 Kreisbogen des elliptischen Büschels, im Falle eines rein imaginären λ in unendlich oft zu durchlaufende Kreise des hyperbolischen Büschels übergehen. Allemal schliessen die beiden Curven einen Streifen der η-Kugel zwischen sich ein, wie es durch die Figuren 9—11 angedeutet ist. In Fig. 11 haben wir uns ein zwischen den beiden Kreisen sich unendlich oft windendes Band zu denken. Den Punkten a und b der s-Kugel entsprechen die Punkte A und B der η-Kugel in den Figuren 9 und 10, in der Figur 11 dagegen hat man bei Annäherung an die Punkte a und b sich unendlich oft um die η-Kugel zu bewegen, ohne je ein Abbild dieser Punkte, die Schnitte der begrenzenden Kreise, zu erreichen. Auf der s-Kugel gelangt man nun von dem einzelnen Punkte des einen Ufers zu dem gegenüberliegenden Punkte des anderen Ufers des Einschnittes, indem man längs der Kreise der hyperbolischen Schaar einen Umlauf macht. Entsprechende Punkte der Begrenzungen der Figuren 9—11 werden daher durch eine elliptische, loxodromische resp. hyperbolische Substitution einander zugeordnet, deren Bahncurven eben die Curvenschaar I liefert. Es ist dies in den Figuren durch die quergestellten Pfeile angedeutet. Hierdurch werden die genannten Figuren zu *Fundamentalbereichen* in dem pag. 7 allgemein angegebenen Sinne. Der „*Kern*" derselben wird einfach durch die räumliche Verbindungslinie AB gegeben, welche die innere Axe der Fundamentalsubstitution darstellt.

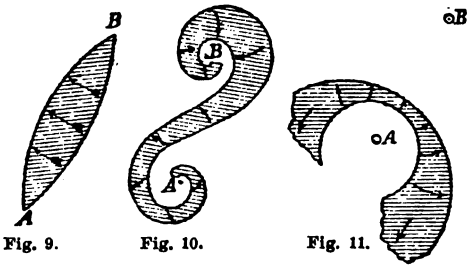


Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11.

Allerdings werden in den Fällen eines reellen oder complexen Exponenten λ keineswegs stets solche einfachen Verhältnisse vorliegen, wie in den Figuren 9—11 gezeichnet sind. Da in Fig. 9 der Winkel, den die beiden Kreisbogen mit einander bilden, $2\lambda'\pi$ beträgt, so werden in den Punkten A und B im allgemeinen Windungspunkte von beliebig hoher Ordnung liegen, indem der Fundamentalbereich sich so oft um die ganze Kugel herüberzieht, als die grösste ganze Zahl in λ' angiebt. Das Analoge findet auch im Falle der Fig. 10 in Rücksicht auf den reellen Theil λ' des complexen Exponenten statt, wie leicht zu übersehen ist. Hierbei wird der Bereich für complexes λ sich bereits für einen Werth $\lambda' < 1$ beliebig oft selbst überdecken können, wenn nur das Verhältniss $\frac{\lambda''}{\lambda'}$ hinreichend gross ist. Ein Theil eines solchen

Fundamentalbereiches ist zur Fixirung der Anschauung in Fig. 12 dargestellt (K). Nun steht aber nichts im Wege, die weit complicirteren Gestalten des Bereiches ins Auge zu fassen, in denen die letzten beiden Vorkommnisse gleichzeitig sich finden. Es ist dann schwierig, wenn nicht ganz unmöglich, sich stets anschaulich klar den *gesammten* Fundamentalbereich vorzustellen. [Doch kann man sich leicht ein *Stück des letzteren* darstellen. Man braucht nämlich für einen gegebenen Exponenten λ nur zwei benachbarte loxodromische Bahncurven der zugehörigen Fundamentalsubstitution zu zeichnen, auf einer derselben zwei sich entsprechende Punkte anzugeben und von diesen orthogonal zur anderen Loxodrome zu gehen. Dann wird ein Flächenstreifen bestimmt, der ein *Stück des genannten Fundamentalbereiches* darstellt und von zwei Elementen der Randcurven des letzteren und von zwei die Endpunkte desselben einander zuordnenden Bahncurven der Fundamentalsubstitution begrenzt wird. Von diesem Flächenstreifen aus kann man beliebig weit die Gestalt des Fundamentalbereiches fortsetzen. Doch werden wir sogleich in einfacherer Weise den Fundamentalbereich für beliebiges λ construiren.] Wir sehen ferner, dass in den Fällen eines reellen oder imaginären Exponenten d. h. der Figuren 9 und 11 der Fundamentalbereich eine symmetrische Gestalt (im Sinne der Symmetrie in Bezug auf einen Kreis) besitzt, d. h. durch einen Kreis des elliptischen resp. hyperbolischen Büschels in zwei bezüglich dieses Kreises symmetrische Hälften zerlegt werden kann, deren jede einer Halbebene des Argumentes z entspricht.

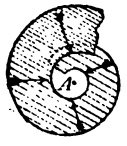


Fig. 12.

Haben wir bisher im Falle des complexen Exponenten λ als Schnittlinie der z-Ebene die einfachere Curve, dagegen als Begrenzung des Fundamentalbereiches der η-Ebene die complicirtere Curve gewählt, so werden wir jetzt wünschen, gerade umgekehrt vorzugehen, wenn wir überhaupt die Theorie auf geometrischer Grundlage entwickeln wollen, wobei wir doch den Fundamentalbereich zum Ausgangspunkt wählen müssen. Da bietet sich nun, sofern wir λ zunächst allgemein complex denken, der doppelte Weg dar, entweder eine Loxodrome der einen oder der anderen ausgezeichneten Schaar in der z-Ebene als Schnittlinie zu wählen. Im einen Falle werden den beiden Ufern des Schnittes zwei Kreisbogen des elliptischen Büschels, im anderen Falle zwei Kreisbogen des hyperbolischen Büschels entsprechen, welch letztere wieder unendlich oft umlaufend zu denken sind (Figur 13 u. 14). Jedesmal

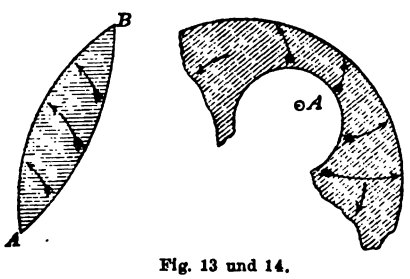


Fig. 13 und 14.

wird ein bestimmtes Flächenstück der η-Kugel eingeschlossen. Indem wir von einem beliebigen Punkte auf dem einen Ufer des Schnittes in der z-Ebene wieder durch Umlaufen eines Kreises des hyperbolischen Büschels der Punkte a und b zu dem gegenüberliegenden Punkte des anderen Ufers gelangen, ergiebt sich die Zuordnung der begrenzenden Kreisbogen jenes Flächenstückes mittels der Loxodromen der Schaar I. Hierdurch wird den Figuren 13 und 14 wieder der Charakter der Fundamentalbereiche verliehen. Das wesentliche Resultat, welches wir dieser Betrachtung entnehmen, ist das folgende: *Im allgemeinen Falle, eines complexen λ ist es sowohl möglich eine Kreissichel wie ein unendliches Kreisband, beidemal mit loxodromischer Zuordnung der Ränder, als Fundamentalbereich zu wählen.* Dies ist die in Aussicht gestellte einfachere Construction. Im ersteren Falle beträgt insbesondere der nicht-Euklidische Winkel, unter dem die Ebenen der beiden Kreise sich schneiden, $2\lambda'\pi$, im letzteren $2\lambda''\pi i$.*) Diese Fundamentalbereiche werden wir als allgemeine *sphärische „Zweiecke"* bezeichnen können.

Wir haben uns nur noch klar zu machen, wie die beiden Darstellungen des Fundamentalbereiches Fig. 13 u. 14 sich in den Grenzfällen eines reellen resp. imaginären Exponenten verhalten. Im Falle des reellen Exponenten bietet die zweite Darstellung (Fig. 14) ein singuläres Vorkommniss, während die erste (Fig. 13) von der anfangs betrachteten (Fig. 9) nicht verschieden ist. Gerade umgekehrt ist es im Falle eines imaginären Exponenten. In den als singulär bezeichneten Fällen geht nämlich die entsprechende loxodromische Zerschneidung der z-Ebene über in die längs eines hyperbolischen Kreises der Punkte a und b, indem die Loxodrome eine unendlich kleine Steighöhe erhält, der zugehörige Fundamentalbereich dagegen im Falle eines reellen λ in ein unendlich schmales Kreisband, im Falle eines imaginären λ in eine unendlich schmale Kreissichel. Diese singulären Formen der Fundamentalbereiche, die als Grenzfälle ihre sehr gute Bedeutung haben, sind, unmittelbar genommen, natürlich unbrauchbar. *Im Falle reeller oder imaginärer Exponenten ist daher nur die Zerschneidung der z-Ebene längs eines elliptischen Kreisbogens zulässig, die zu der Kreissichel mit elliptischer oder dem Kreisband mit hyperbolischer Zuordnung der Ränder führt.*

Wir werden uns leicht auch direct davon überzeugen können, *dass im Falle complexer Exponenten die Zweiecke der Sichelform und der Kreisbandform äquivalent sind*, indem wir geradezu das eine in das andere durch Ausführung „erlaubter Abänderung" des Bereiches überführen können. Gehen wir z. B. von der Sichel mit loxodromischer Zuordnung der Ränder aus. Wir können dann durch Bogen der hyperbolischen Kreise dieselbe in unendlich viele Kreisbogenvierecke zerlegt denken

*) Vgl. die Bemerkungen auf Seite 166 dieser Arbeit.

der Art, dass allemal je zwei gegenüberliegende Ecken der Vierecke z. B. xx', yy', zz' u. s. w. durch die loxodromische Fundamentalsubstitution einander zugeordnet sind. Diese Stücke werden, je näher man den Punkten A und B kommt, für die Anschauung kleiner und kleiner. Dann können wir z. B. von dem schraffirten Stücke (Fig. 15) ausgehen und an dieses die oben und unten anstossenden Stücke beiderseits durch einmalige Anwendung der loxodromischen Fundamentalsubstitution (resp. ihrer Umkehrung) ansetzen, darauf die zweitfolgenden Stücke durch zweimalige Anwendung derselben Substitution u. s. f. Solcherweise erhalten wir schliesslich aus der Kreissichel das unendliche Kreisband mit loxodromischer Zuordnung der Ränder. Die durch die hier angewandte Methode gelieferte Einsicht von der Gleichberechtigung der Sichelform und der Bandform werden wir allgemein als *Meridian- und Breitencurvenprincip* bezeichnen, indem die Begrenzungen der beiden Arten der Bereiche sich wie die Meridiane und Breitenkreise zu einander verhalten.

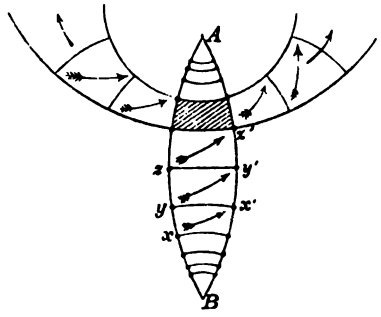


Fig. 15.

Um nun die Gesammtheit aller sphärischen Zweiecke besser übersehen zu können, werden wir *die Begriffe des „reducirten Bereiches"* und *der „mit einander verwandten Bereiche"* einführen, die uns im Falle dreier singulärer Punkte noch wesentliche Dienste leisten werden. Unter einem *„reducirten Zweiecke" verstehen wir einen solchen Fundamentalbereich, dessen Exponent λ in seinem reellen Theile λ' nicht grösser als* 1 *ist.* Ferner nennen wir *„mit einander verwandte Zweiecke" allemal zwei solche Fundamentalbereiche, welche zu demselben Kern gehören, und deren Exponenten in ihrer Summe oder Differenz ganze Zahlen ergeben.*

Zu der Gesammtheit aller mit einander verwandten Bereiche gehören demnach stets *zwei* reducirte Zweiecke, deren Exponenten λ_0 und $1 - \lambda_0$ betragen, woselbst der reelle Theil $\lambda_0' \gtreqless 1$ ist, mit der einzigen Ausnahme ganzzahliger Exponenten, von denen wir sogleich noch sprechen werden. Haben wir ein erstes reducirtes Zweieck in der Form der Sichel, wie in Figur 13, construirt, so wird das zweite reducirte Zweieck durch den nicht schraffirten Theil der η-Kugel mit derselben Zuordnung der Randpunkte gegeben. (Ist der reelle Theil des *complexen* Exponenten λ für das erste reducirte Zweieck speciell gleich 1, so wird das zweite reducirte Zweieck durch die unmittelbar nicht brauchbare unendlich schmale Sichel gegeben, die man durch den äquivalenten Bereich des unendlichen Kreisbandes ersetzen wird.) Von den reducirten Zweiecken der Sichelform aus steigen wir nun zu

allen verwandten Bereichen auf, indem wir in jedem der Zweiecke eine beliebige Zahl von Vollkugeln längs eines ganz auf dem Zweiecke verlaufenden, sich nicht selbst überkreuzenden Verzweigungsschnittes von A nach B anhängen. Liegt dagegen das reducirte Zweieck in der Form des unendlichen Kreisbandes mit bestimmter Zuordnung der Seiten vor, wie in Figur 14, (wobei dann reelle Exponenten natürlich ausgeschlossen sind), so werden wir alle mit ihm verwandten Bereiche, insbesondere auch das zweite reducirte Zweieck, erhalten, indem wir die Punkte des einen Kreises jetzt denjenigen Punkten des anderen Kreises zuordnen, die von den früher den ersteren entsprechenden Punkten um eine beliebige Zahl voller Kreisperipherien in einem oder anderem Umlaufssinne entfernt sind. Offenbar ist wegen der Einfachheit des hiermit geschilderten Processes in Betracht der Verwandtschaft die Form des unendlichen Kreisbandes vielleicht jener der Sichel vorzuziehen, indem für alle verwandten Bereiche die Fläche der Fundamentalbereiche ihrer Gestalt nach dieselbe ist.

Wir haben nun dem Vorstehenden noch zwei Bemerkungen hinzuzufügen, welche die besonderen Fälle der Fundamentalbereiche betreffen sollen, *dass der Exponent λ gleich einer ganzen Zahl (insbesondere gleich* 0) *oder aber ∞ gross geworden ist.*

Was den ersten Fall betrifft, so ist der Fundamentalbereich für $\lambda = 0$ von zwei sich berührenden Kreisen begrenzt, d. h. die Punkte A und B sind zusammengefallen. Die zugehörige Fundamentalsubstitution hat parabolischen Charakter und die abbildende Function wird abgesehen von den Constanten durch $\eta = \log z$ gegeben (Fall der parabolischen Sichel). *Der Fall $\lambda = 0$ ist überdies der einzige, in dem die Fundamentalsubstitution parabolisch wird und demnach ein Logarithmus auftritt.* Verwandte Bereiche gehören zu der parabolischen Sichel nicht.

Die Fälle ganzzahliger, von 0 *verschiedener Werthe des Exponenten λ* ergeben zwar in der algebraischen Summe ihres Exponenten mit $\lambda = 0$ ganze Zahlen, *jedoch gehören ihre Fundamentalbereiche einem anderen Kern an.* Sie bilden für sich *eine einzige Gesammtheit verwandter Bereiche.* Das *einzige* zu ihnen gehörende reducirte Zweieck wird durch die Vollkugel dargestellt, die längs eines die *getrennten* Punkte A und B verbindenden Kreisbogens eingeschnitten ist.

Endlich wollen wir den zweiten Grenzfall betrachten, dass *der Exponent λ unendlich gross geworden ist.* Wir können uns denken, dass wir in einem beliebigen reducirten Zweieck der Sichelform längs eines Verzweigungsschnittes von A nach B nicht mehr eine endliche, sondern eine unendliche Zahl von Vollkugeln angehängt hätten. Dann entsteht ein Bereich, der sich nach beiden Seiten unablässig um die Punkte A und B windet, ohne je begrenzende Kreisbogen zu haben.

Die abbildende Function wird, wieder abgesehen von den Constanten, durch $\eta = e^{\varepsilon}$ dargestellt (d. h. durch die zu der obigen Function $\eta = \log \varepsilon$ inversen Function). Die singulären Punkte a und b in der Ebene des Argumentes sind für diesen Fall in einen Punkt zusammengerückt.

§ 6.

Anwendung des Meridian- und Breitencurvenprincips auf die Fundamentalbereiche im Falle einer grösseren Zahl singulärer Punkte.

Das Meridian- und Breitencurvenprincip wird uns nun leicht auch in den Fällen einer grösseren Anzahl singulärer Punkte *eine Einsicht in das Wesen der unendlichen Kreisbänder* und ihre Beziehung zu den gewöhnlichen Ecken gewähren, wenn wir auch nicht mehr in gleich leichter Weise die zugehörigen Functionen und insbesondere die Zerschneidung der ε-Ebene zu beherrschen vermögen. Wir beschränken uns auf den Fall dreier singulärer Punkte, für den wir einige Beispiele behandeln. Nehmen wir an, es sei uns ein *Normalviereck* $a_1 b_1 c_1 c_2'$ mit loxodromischer Zuordnung der Seitenpaare gegeben; dasselbe ist in Fig. 16 der Einfachheit halber geradlinig begrenzt gedacht. Wir theilen dann den Bereich wieder in Vierecke durch hyperbolische Kreise der zu den Fixpunkten $a_1 a_2$ der Substitution A gehörenden Schaar, soweit die Seiten $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ reichen, sodass die Punkte x, x'; y, y'; z, z' u. s. w. durch die Substitution A einander entsprechen, ebenso in analoger Weise durch hyperbolische Kreise der zu den Fixpunkten $b_1 b_2$ gehörenden Schaar, soweit die Seiten $c_1 b_1$ und $c_2' b_1$ reichen. Dann ist es leicht, wieder durch Verlegung der einzelnen Kreisbogenvierecke zu einem von vier Kreisen begrenzten Bereich überzugehen, von denen je 2, die sich nicht schneiden, durch die loxodromische Substitution A resp. B einander punktweise zugeordnet sind. *Jedoch sind jetzt die den Punkten a und b der Ebene des Argumentes entsprechenden Ecken verloren gegangen; statt dessen windet sich der Bereich, sich selbst überdeckend, jedesmal zwischen den sich nicht schneidenden Kreisen unendlich oft herum.**)

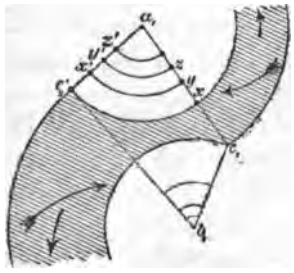


Fig. 16.

*) Die im Texte angegebene Umwandlung der einen Figur in die andere ist natürlich nur dann ohne weiteres (d. h. bei Vermeidung negativ zu rechnender Bereichstücke, wovon wir hier nicht weiter sprechen wollen) möglich, wenn keine zwei gegenüberliegenden Kreise der hyperbolischen Schaaren sich schneiden. Wohl aber kann man stets ein gewisses, hinreichend klein gewähltes Stück in der Ecke a_1 (oder b_1) des ursprünglichen Bereiches in ein ∞ Kreisband überführen. Das Analoge gilt für das Folgende des Textes.

In gleicher Weise können wir auch von einem *Normalsechseck* ausgehen, welches wir wieder geradlinig begrenzt annehmen wollen. Wir verwandeln dann an demselben jede der Ecken $a_1 b_1 c_1$ in ein unendliches Kreisband, wie es in der Figur 17 ausgeführt ist. Wir erhalten schliesslich den schraffirten Bereich der Fig. 17, der drei Ecken O_α, O_β, O_γ aufweist, in denen die Summe der drei Winkel nach wie vor 2π beträgt, und ausserdem *in drei unendliche Kreisbänder ausläuft*, deren begrenzende Seiten durch die loxodromischen Fundamentalsubstitutionen einander zugeordnet sind.

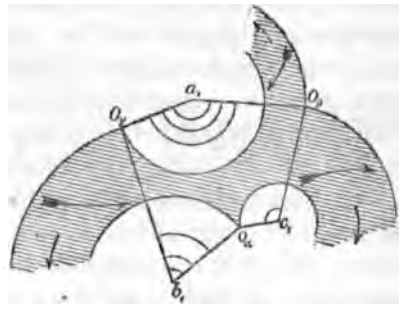


Fig. 17.

Ja, es wird sogar, allgemein gesprochen, möglich sein, für complexe Werthe der λ, μ, ν z. B. einen durchaus brauchbaren von vier Kreisbogen begrenzten Bereich zu construiren, dessen sämmtliche Ecken verloren gegangen sind, indem die betr. Kreisbogen in vier unendliche Kreisbänder auslaufen. (Vgl. z. B. Fig. 83a.) Wie im Falle eines imaginären Exponenten jedoch der Fundamentalbereich in der Nähe einer von elliptischen Kreisbogen gebildeten Ecke unendlich schmal werden d. h. sich auf einen Kreisbogen zusammenziehen würde, so gilt hier das Analoge im Falle eines reellen Exponenten, indem das zugehörige unendliche Kreisband unendlich schmal ausfällt.

Wir wollen noch bemerken, dass auch die Figuren 16 und 17 die Bezeichnung „*Normalvierecke*" (oder Normalvierseite) verdienen, da die begrenzenden Kreise den hyperbolischen Büscheln der Fixpunktpaare angehören. Natürlich kann man diese Specialisirung, d. h. die Beschränkung auf Kreise des Büschels, auch fallen lassen.

III. Theil.

Ueber den Kern der Fundamentalbereiche im Falle dreier singulärer Punkte.

§ 7.

Neue Veranschaulichung der loxodromischen Substitutionen.

Wir wenden uns jetzt zu der geometrischen Theorie der Schwarz'schen *s*-Function; und zwar werden wir unsere Betrachtung zunächst dem *Kern* widmen, den wir dem Fundamentalbereiche gegenüberstellen wollten. *Wir definiren den Kern als das Gebilde der drei inneren*

Axen der Fundamentalsubstitutionen A, B, Γ.*) Gerade in der besonderen Untersuchung des Kernes, die auch sonst manches schöne Resultat liefert, dürfte ein nicht zu unterschätzendes Moment für die geometrische Einführung in die Theorie der Schwarz'schen s-Function begründet liegen.

Vorerst wollen wir in einer Vorbetrachtung eine neue und interessante geometrische Veranschaulichung der loxodromischen Substitutionen der complexen Variabeln auf der Kugel kennen lernen, von der wir sogleich Gebrauch zu machen haben.

Wenn eine *elliptische Substitution* der auf der Kugel gedeuteten Variabeln z mit ihrem Exponenten $2\lambda'\pi i$**) vorliegt, und man legt durch die innere Axe d. h. die Verbindungslinie der Fixpunkte derselben zwei Ebenen ε und ε', die den (nicht-Euklidischen) Winkel $\lambda'\pi$ mit einander bilden, so entsprechen sich allemal zwei solche Raumpunkte Q und Q', die sich als Spiegelbilder eines dritten Raumpunktes R in Bezug auf die beiden Ebenen darstellen. Hierbei wollen wir allgemein unter dem Spiegelbilde eines Raumpunktes R in Beziehung auf eine gegebene Ebene, mag letztere im übrigen die Kugel schneiden oder nicht, denjenigen Punkt Q verstehen, der auf der Verbindungslinie des Punktes R und des Poles der Ebene liegt und (nicht-Euklidisch) gerade so weit auf der anderen Seite der Ebene von dieser entfernt ist, wie der Punkt R auf seiner Seite. Projectiv genommen besagt dies, dass der Punkt R mit seinem Spiegelbilde harmonisch liegt zu der Ebene und deren Pol; zugleich leuchtet ein, dass man ebensogut von der Spiegelung an dem Pol der Ebene reden könnte, indem man unter dem Spiegelbilde eines Punktes R in Beziehung auf einen zweiten denjenigen Punkt Q ihrer Verbindungslinie versteht, der um dieselbe Strecke auf der anderen Seite von dem spiegelnden Punkte entfernt liegt als der Punkt R auf seiner Seite. *Spiegelung an einem Punkte ist identisch mit der Spiegelung an seiner Polarebene.* Ist der Punkt R speciell ein Kugelpunkt, so wird sein Spiegelpunkt der zweite Schnittpunkt der Verbindungslinie von R und dem Pol der spiegelnden Ebene mit der Kugeloberfläche sein.

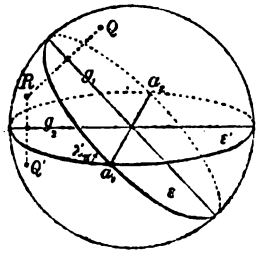


Fig. 18.

*) Unter der „inneren Axe" einer Substitution sei die Verbindungslinie der Fixpunkte verstanden, unter der „äusseren Axe" die conjugirte Polare der ersteren.

**) Unter dem „Exponenten" einer Substitution wollen wir hier die Grösse φ in der Normalform verstehen:

$$\frac{z' - \alpha_1}{z' - \alpha_2} = e^{\varphi} \cdot \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2};$$

dieselbe stimmt natürlich nur bis auf den Factor $2\pi i$ mit dem bezüglichen „Exponenten der s-Function" überein.

Aus dem hiermit ausgesprochenen Satze ergiebt sich nun leicht die folgende Deutung der elliptischen Substitution, sowie der zugehörigen Drehung des Gesammtraumes: *Errichtet man in einem beliebigen Punkte der inneren Axe auf ihr zwei senkrechte (die Kugel schneidende) Gerade q_1 und q_2, die den Winkel $\lambda'\pi$ mit einander bilden, so gehen allemal zwei solche Raumpunkte in einander über, welche aus einem beliebigen dritten Punkte durch halbe (nicht-Euklidische) Drehungen um die beiden Senkrechten entstehen.**) Dieser Uebergang von einem Raumpunkt zu dem ihm entsprechenden ist nämlich identisch mit der Aufeinanderfolge der vier Spiegelungen an der Ebene der beiden Senkrechten, an den Ebenen durch jede der letzteren und die innere Axe und wiederum an der ersten Ebene und erweist sich somit direct aus der geometrischen Figur als gleichwerthig mit der oben geschilderten Construction mittels zweier Spiegelungen.

Diesen Sätzen stehen in ganz analoger Weise die beiden folgenden gegenüber: Bei einer vorliegenden *hyperbolischen Substitution* mit den Exponenten $2\lambda''\pi$ (wo λ'' reell ist) entsprechen sich allemal zwei solche Raumpunkte Q und Q', welche die Spiegelpunkte eines dritten Raumpunktes R in Beziehung auf zwei beliebige, sich unter dem Winkel $i\lambda''\pi$ längs der äusseren Axe schneidende Ebenen ε und ε' darstellen, — diese beiden Ebenen mögen übrigens ausserhalb der Kugel verlaufen oder dieselbe schneiden. Und die Folgerung aus diesem Satz: *Bei der hyperbolischen Substitution gehen stets diejenigen beiden Punkte des Raumes in einander über, welche aus einem dritten Punkte durch halbe Drehungen um zwei beliebige Senkrechte g_1 und g_2 (welche die Kugel schneiden) entstanden sind, die im Abstande $i\lambda''$ auf der inneren Axe in einer beliebigen durch dieselbe gelegten Ebene errichtet wurden.*

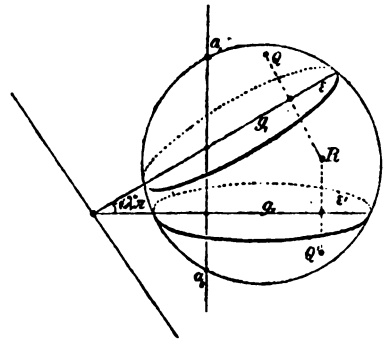


Fig 19.

Da nun jede Schraubenbewegung des nicht-Euklidischen Raumes mit dem *complexen* Exponenten $2(\lambda' + \lambda''i)i\pi$ sich als die Aufeinanderfolge einer elliptischen Substitution mit dem Exponenten $2i\lambda'\pi$ und einer hyperbolischen Substitution mit dem Exponenten $-2\lambda''\pi$ betrachten lässt, welche dieselben Axen haben und überdies mit einander vertauschbar sind, so kommt man sofort zu dem allgemeinen

*) Definition: Eine Gerade steht auf einer Ebene im nicht-Euklidischen Sinne senkrecht, wenn sie durch den Pol derselben hindurchgeht, und auf einer anderen Geraden, wenn sie die conjugirte Polare derselben trifft.

Satze, auf den wir hinaus wollten: *Errichtet man auf der inneren Axe der Schraubenbewegung irgend zwei die Kugel schneidende Senkrechte g_1 und g_2, so dass der Abstand ihrer beiden Fusspunkte gleich $i\lambda''\pi$, dagegen der Winkel der durch sie und die innere Axe gelegten Ebenen gleich $\lambda'\pi$ wird, dann gehen gerade zwei solche Punkte Q und Q' des Raumes durch die zugehörige Collineation in einander über, welche durch eine halbe Drehung um diese beiden Senkrechten aus einem dritten Raumpunkte R hervorgegangen sind.* Mit anderen Worten: *Man kann jede (nicht-Euklidische) Schraubenbewegung auf mannigfache Art durch zwei Rotationen von der Periode 2 ersetzen.**)

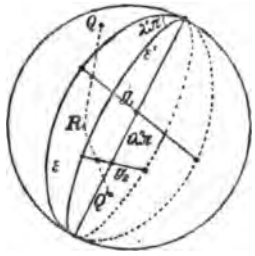


Fig. 20.

Alle diese Sätze gewinnen im übrigen eine einfache Anschaulichkeit, wenn man durch eine geeignete Substitution dafür sorgt, dass die innere Axe durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

§ 8.

Betrachtung dreier Schraubenbewegungen, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt.

Gehen wir nun zu der Betrachtung der Aufeinanderfolge dreier loxodromischer Substitutionen der Variabeln z über. Gegeben seien die zu einander windschiefen inneren Axen der Substitutionen, welche wir mit *I, II, III* bezeichnen wollen. Man construire alsdann die drei inneren kürzesten Abstände 1, 2, 3, die im Sinne der nicht-Euklidischen Geometrie zu je zweien der Geraden *I, II, III* gehören.**) *Fasst man nun bei jeder der Geraden diejenige Schraubenbewegung ins Auge, welche sich in Bezug auf den oben ausgesprochenen Satz als die Aufeinanderfolge zweier halben Drehungen um die zugehörigen kürzesten Abstände darstellt, so erkennt man sofort, dass die Aufeinanderfolge dieser 3 Schraubenbewegungen um die Axen I, II, III zur Identität führt.* Denn bezeichnet man mit R, S, T in

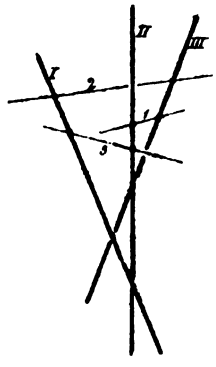


Fig. 21.

*) Es sei auf einige Arbeiten des Herrn Wiener hingewiesen (Sächsische Berichte, 1890 p. 13, 71, 245 und 424 ff.), woselbst ganz analoge Betrachtungen für den Euklidischen Raum durchgeführt werden; man vgl. z. B. p. 22, sowie p. 439 ff. Wie Herr Wiener erwähnt, hat bereits Halphen diese Methoden für die Schraubenbewegung des gewöhnlichen Raumes benutzt in Nouv. Ann. de Math. III. Série, I, 1882, p. 296—299. Ferner sehe man auch Study, Von den Bewegungen und Umlegungen. Ann. Bd. 39, 1891, p. 469.

**) Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie III, 1, 1891, p. 505, sowie auch Wedekind, Studien im binären Werthgebiet, Karlsruhe 1876, p. 9 ff.

symbolischer Weise entspr. die Operationen der halben Drehungen um die 3 kürzesten Abstände 1, 2, 3, so gelten für dieselben die Beziehungen $RR = 1$, $SS = 1$, $TT = 1$, welche bedeuten, dass jede der genannten Operationen zweimal ausgeführt die Identität ergiebt. Die genannten drei Schraubenbewegungen um die Axen *I, II, III* werden nun dargestellt durch die Symbole ST, TR, RS, deren Aufeinanderfolge den geltenden Relationen gemäss in der That die Identität erzeugt.*) Diese drei Substitutionen werden wir in der Folge die Fundamentalsubstitutionen des Kernes der Geraden *I, II, III* nennen und sie mit A, B, Γ entspr. bezeichnen. Wir können als Ergänzung des obigen Satzes noch hinzufügen: *Allemal solche drei Punkte des Raumes gehen durch die Fundamentalsubstitutionen in einander über, die durch* 3 *halbe Drehungen um die Geraden* 1, 2, 3 *aus einem beliebigen Raumpunkte entstanden zu denken sind.*

Da nun die Geraden *I, II, III* ihrerseits die kürzesten Abstände je zweier der Geraden 1, 2, 3 liefern, so behalten die aufgestellten Sätze ihre volle Gültigkeit, wenn man in ihnen die Geraden *I, II, III* mit den Geraden 1, 2, 3 vertauscht. Hierin offenbart sich die Verallgemeinerung derjenigen elementaren Betrachtungen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie, welche sich auf das Polardreieck zu einem gegebenen Dreieck beziehen. Dementsprechend wollen wir das Gebilde 1, 2, 3 den *Polarkern* des gegebenen Kernes *I, II, III* nennen. Ersichtlich gilt der Satz: *Der Polarkern des Polarkernes ist der ursprüngliche Kern.* Wir werden später auf diese Verhältnisse noch wiederholt zurückkommen.

Wir führen nun einige einfache Bezeichnungen ein, denen, wie bisher, wieder die nicht-Euklidische Massbestimmung zu Grunde liegt. Zunächst fassen wir je einen von den zwei Schnittpunkten der Geraden *I, II, III* mit der Kugel besonders ins Auge, der später bei der Aufstellung der Normalformen für die loxodromischen Substitutionen in den Zähler zu stehen kommen soll. Wir nennen diese 3 ausgezeichneten Punkte a_1, b_1, c_1. In entsprechender Weise wählen wir bei den Geraden 1, 2, 3 drei Punkte α_1, β_1, γ_1 aus. Die auf den Geraden *I, II, III* durch die kürzesten Abstände abgeschnittenen Längen setzen wir nun gleich $i\lambda''\pi$, $i\mu''\pi$, $i\nu''\pi$, die auf den Geraden 1, 2, 3 abgeschnittenen Längen gleich $il''\pi$, $im''\pi$, $in''\pi$, und zwar mögen diese Grössen ein positives oder negatives Vorzeichen besitzen, je nachdem in Rücksicht auf die cyklische Reihenfolge I, 3, II, 1, III, 2 entspr. die Richtung vom Schnittpunkte einer dieser Geraden mit der voranstehenden Geraden zum Schnittpunkte mit der folgenden

*) Eine Verallgemeinerung dieser Betrachtungen ergiebt z. B. den Satz: Jede beliebige Schraubenbewegung kann in die Aufeinanderfolge dreier Schraubenbewegungen um drei vorgegebene Axen zerlegt werden.

Geraden auf den zu ersterer gehörenden ausgewählten Schnittpunkt hinweist oder von ihm abweist; es ist also z. B. $i\lambda''\pi$ positiv oder negativ, je nachdem die Richtung vom Punkte (2 *I*) zum Punkte (*I* 3) auf den Punkt a_1 hinweist oder von ihm abweist. Weiter bezeichnen wir den Winkel, durch welchen man die durch eine der Geraden *I, II, III* und die vorhergehende der Geraden 1, 2, 3 gelegte Ebene im positiven Sinne um die erste Gerade drehen muss, bis sie mit der durch diese und die nachfolgende der Geraden 1, 2, 3 gelegten Ebene zusammenfällt, mit $\lambda'\pi, \mu'\pi, \nu'\pi$; hierbei soll unter der positiven Drehungsrichtung diejenige verstanden werden, die sich für einen im Punkte a_1 oder b_1, c_1 auf der Kugel stehenden Beobachter als mit dem Drehungssinne des Uhrzeigers übereinstimmend erweist. In ganz entsprechender Weise führen wir in Bezug auf die Geraden 1, 2, 3 und die zugehörigen Punkte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkelbezeichnungen $l'\pi, m'\pi, n'\pi$ ein. Wie man sofort sieht, sind diese Winkel nur bis auf ganze Vielfache von π bestimmt; diese Mehrdeutigkeit wird auch in unseren Schlussformeln sich wieder geltend machen. Im übrigen werden wir sogleich hierauf noch einzugehen haben; zum Zweck dieser späteren Betrachtung ist auch die Definition der Grössen λ', λ'' etc. mit der angegebenen Genauigkeit vorgenommen worden. Setzt man nun:

$$\begin{array}{l|l} \lambda = \lambda' + i\lambda'' & l = l' + il'' \\ \mu = \mu' + i\mu'' & m = m' + im'' \\ \nu = \nu' + i\nu'' & n = n' + in'', \end{array}$$

so kann man den soeben aufgestellten Satz in der einfachen Form aussprechen: *Führt man um die Geraden I, II, III nach einander drei nicht-Euklidische Schraubenbewegungen aus, deren Exponenten bezw. gegeben sind durch* $2\lambda\pi i, 2\mu\pi i, 2\nu\pi i$, *so gelangen die Punkte des Gesammtraumes wieder in ihre Anfangslage zurück.* Der analoge Satz gilt natürlich für die Aufeinanderfolge der drei nicht-Euklidischen Schraubenbewegungen um die Axen 1, 2, 3 mit den Exponenten $2l\pi i, 2m\pi i, 2n\pi i$. —

Wir können nun den an die einfache Figur 21 angeknüpften Betrachtungen noch eine Erweiterung geben, indem wir auch die Polaren *I', II', III'* der Geraden *I, II, III*, d. h. die äusseren Axen der Schraubenbewegungen A, B, Γ, und die Polaren 1', 2', 3' der Geraden 1, 2, 3, d. h. die äusseren kürzesten Abstände der Geraden *I, II, III*, in Betracht ziehen. Die Geraden 1, 2, 3 resp. 1', 2', 3' enthalten dann zugleich die kürzesten Abstände je zweier der Geraden *I', II', III'*, während umgekehrt die Geraden *I', II', III'* wiederum die äusseren kürzesten Abstände je zweier Geraden des Tripels 1', 2', 3' bilden. Auf jeder der 12 Geraden liegen ferner 4 Schnittpunkte, die zu je zweien sich involutorisch entsprechen, und zwar bilden die Schnitt-

punkte der Geraden mit der Kugel die Doppelpunkte der Involution, die daher für die 6 die Kugel schneidenden Geraden hyperbolischen Charakter, für die übrigen 6 ausserhalb der Kugel verlaufenden Geraden elliptischen Charakter besitzt. Der kürzeste Abstand $i\lambda''$ zum Beispiel, d. h. der Abstand der inneren beiden Punkte der Geraden I, findet sich wieder als Abstand der beiden äusseren Punkte derselben Geraden oder als Winkel, welchen die Polarebenen dieser beiden inneren oder dieser beiden äusseren Punkte mit einander bilden, also z. B. als Winkel der Ebenen $(I'\,2')$ und $(I'\,3')$. Entsprechendes gilt natürlich für alle übrigen Grössen.

§ 9.

Specialisirung der Resultate für den Fall dreier elliptischer oder hyperbolischer Substitutionen.

Es dürfte interessant sein, diese Beziehungen zu specialisiren für den Fall, *dass die* 3 *Geraden I, II, III sich in einem Punkte* (*innerhalb, ausserhalb oder auf der Kugel*) *schneiden oder in einer Ebene liegen*, der Art, dass wir es mit *drei elliptischen* oder *drei hyperbolischen* Fundamentalsubstitutionen zu thun haben. Im letzteren Falle z. B. werden wir die folgenden Figuren in der Ebene der Geraden I II,

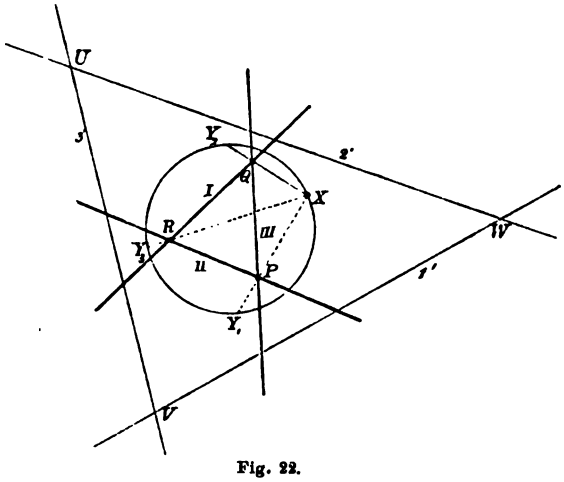


Fig. 22.

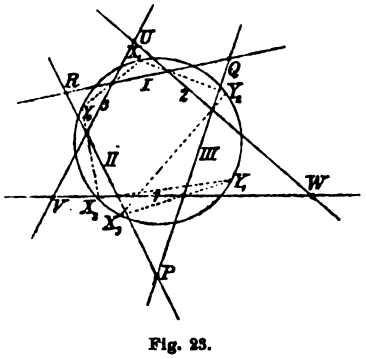


Fig. 23.

III erhalten, je nachdem die drei Schnittpunkte P, Q, R der Geraden I, II, III sämmtlich innerhalb oder sämmtlich ausserhalb der Kugel liegen. Die Verbindungslinien der Punkte P, Q, R mit dem Pol der Zeichenebene geben für Fig. 22 die Geraden 1, 2, 3, für Fig. 23 die Geraden 1′, 2′, 3′; die Verbindungslinien der Punkte U, V, W mit dem gleichen Pol dagegen für Fig. 22 wie 23 die Geraden I', II', III'.

Es ist nun gemäss den Bemerkungen auf pag. 187 ein Leichtes, zu jedem beliebigen Punkte der Kugeloberfläche die beiden anderen sofort anzugeben, in die er durch die zu unserem Kern gehörigen linearen Substitutionen übergeht. Verbindet man z. B. in Fig. 22 einen beliebigen Punkt X der Kugeloberfläche mit den Punkten P, Q, R und bezeichnet die zweiten Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden und der Kugel mit Y_1, Y_2, Y_3, so geht durch die Substitution A der Punkt Y_2 in Y_3, durch B Y_3 in Y_1, durch Γ Y_1 in Y_2 über. In der Fig. 23 erfordert die analoge Construction dreier einander entsprechender Punkte Y_1, Y_2, Y_3 den im Allgemeinen räumlichen Linienzug des Sechsecks $Y_2 X_1 Y_3 X_2 Y_1 X_3$, deren Seiten, wie die Figur es zeigt, durch je einen der Schnittpunkte im Innern des Kreises gehen. Diese Constructionen lassen sich in sehr einfacher Weise auf den allgemeinen Fall dreier Schraubenbewegungen übertragen, wenn man sich erinnert, dass jede Schraubenbewegung in die Aufeinanderfolge einer Drehung und einer Verschiebung zerlegt werden kann. An Stelle des räumlichen Sechsecks der Fig. 23 tritt dann ein räumliches, der Kugel einbeschriebenes Zwölfeck, dessen abwechselnde Ecken den Gang des betreffenden Kugelpunktes angeben.

Wenn wir nun den aus unseren späteren Betrachtungen folgenden allgemeinen Satz hier vorweg nehmen, dass bei 3 vorgegebenen Geraden *I, II, III*, die wir als innere Axen dreier Schraubenbewegungen des Raumes anzusehen haben, die Exponenten der zugehörigen Substitutionen im Allgemeinen bis auf ganze Vielfache von $2\pi i$ *eindeutig* bestimmt sind, falls ihre Aufeinanderfolge die Identität erzeugen soll, so können wir aus unseren Betrachtungen sofort den Satz folgern: *Die Bedingung, dass die drei Geraden I, II, III sich in einem Punkte innerhalb oder ausserhalb der Kugel schneiden, oder in einer Ebene liegen und dann sich in* 3 *Punkten, die sämmtlich innerhalb oder sämmtlich ausserhalb der Kugel liegen, schneiden, ist nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig, damit wir es mit drei elliptischen resp. drei hyperbolischen Substitutionen zu thun haben, welche hinter einander angewandt die Identität erzeugen.**)

Dieser letzte Satz lässt sich sehr leicht auch direct nachweisen: *Bei einer einfachen Drehung des nicht-Euklidischen Raumes* z. B., wie er durch eine elliptische Substitution gegeben wird, bleiben die Punkte der inneren Axe unverändert in ihrer Lage; jeder andere Raumpunkt beschreibt in einer zu dieser Axe senkrechten Ebene um den Schnittpunkt beider einen nicht-Euklidischen Kreis. Sollen nun zwei elliptische Drehungen sich wieder zu einer solchen zusammensetzen, so muss zum wenigsten auch ein Punkt im Innern der Kugel nach beiden Drehungen an seine Ausgangsstelle zurückgekommen sein.

---

*) Vgl. Klein, Ann. 9, 1876, p. 186—187.

Dieser Punkt hat bei den beiden Drehungen Bogen zweier Kreise beschrieben, die sich in 2 Punkten schneiden. Durch diese Kreise lässt sich daher eine nicht-Euklidische Kugel legen. Verbindet man den Mittelpunkt dieser Kugel mit den Mittelpunkten der beiden Kreise, so werden, wie leicht zu sehen ist, diese Verbindungslinien auf den Ebenen der Kreise senkrecht stehen und müssen daher mit den beiden ersten Drehungsaxen zusammenfallen. Folglich schneiden sich dieselben in einem Punkte, durch den dann auch die dritte Axe hindurchgeht.*)

In ganz analoger Weise werden wir auch den Beweis im *Falle dreier hyperbolischer Substitutionen* führen können, indem wir mutatis mutandis an Stelle der inneren die äusseren Axen der Collineation treten lassen. Haben wir aber zunächst die Nothwendigkeit der Bedingung erwiesen, dass die inneren Axen in einer Ebene liegen müssen, damit die Gleichung $AB\Gamma = 1$ für 3 hyperbolische Substitutionen gilt, so zeigt eine einfache Specialbetrachtung leicht, dass ausserdem noch die Schnittpunkte der drei inneren Axen sämmtlich innerhalb oder sämmtlich ausserhalb der Kugel gelegen sein müssen. Denn falls einer der Schnittpunkte innerhalb, die beiden anderen aber ausserhalb der Kugel liegen, oder zwei innerhalb und der dritte ausserhalb (Fig. 24 u. 25), so kann man bei beliebiger Wahl der Bewegungsrichtungen

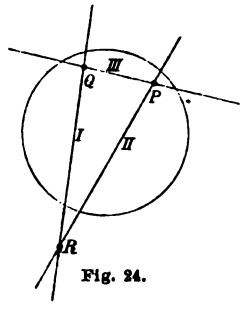


Fig. 24.

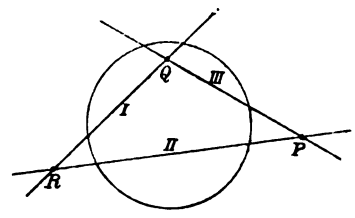


Fig. 25.

in den inneren Axen stets einen Fixpunkt der Substitutionen angeben, der unmöglich nach der Aufeinanderfolge der Substitutionen A, B, Γ in cyklischer Reihenfolge an seine Ausgangsstelle zurückgelangt sein kann.**)

Werfen wir nun noch einen Blick auf die Schraubenbewegungen,

*) Dieser Beweis bedient sich der gewöhnlichen Beweismethode, wie sie von Lobatcheffsky und Bolyai in ihren Entwicklungen der hyperbolischen Geometrie („absolute Geometrie") angewandt ist; insbesondere sind bekanntlich alle Lehrsätze, die nicht das Parallelaxiom, wohl aber z. B. die Congruenzsätze zu ihrem Beweise bedürfen, in der Euklidischen wie in der nicht-Euklidischen Geometrie in gleicher Weise giltig.

**) Als Uebergangsfall der soeben behandelten ergiebt sich der Fall dreier parabolischer Substitutionen, dessen Kern durch drei sich in einem Punkte schneidende Tangenten der Kugel gegeben wird.

die zu den Axen 1, 2, 3, dem Polarkern, im Falle dreier elliptischer oder dreier hyperbolischer Substitutionen gehören, so finden wir die folgende interessante Beziehung:

1. *Der Fall dreier elliptischer Substitutionen, deren innere Axen sich im Innern der Kugel schneiden, entspricht sich selbst, d. h. die zugehörigen Substitutionen des Polarkernes, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt, haben ebenfalls elliptischen Charakter derselben Art, d. h. ihre inneren Axen schneiden sich gleichfalls im Innern der Kugel.*

2. *Im Falle dreier elliptischen Substitutionen, deren innere Axen sich ausserhalb der Kugel schneiden, sind die zugehörigen Substitutionen des Polarkernes von hyperbolischem Charakter, jedoch liegen die Schnittpunkte der inneren Axen derselben sämmtlich im Innern der Kugel. Ebenso gilt die Umkehrung.*

3. *Der Fall dreier hyperbolischer Substitutionen, deren innere Axen sich sämmtlich ausserhalb der Kugel treffen, entspricht wieder sich selbst, d. h. die zugehörigen Substitutionen des Polarkernes haben hyperbolischen Charakter derselben Art.**)

Bisher haben wir nur von den Specialfällen gesprochen, in denen die 3 Fundamentalsubstitutionen entweder sämmtlich elliptisch oder sämmtlich hyperbolisch waren. Die Figuren 24 und 25 geben uns nun sogleich Anlass, auch die Specialfälle ins Auge zu fassen, *dass eine der Substitutionen elliptisch, die beiden anderen aber hyperbolisch oder eine hyperbolisch, die beiden anderen aber elliptisch sind.* Die gegenseitige Lage der inneren Axen in diesen Fällen wird nämlich direct durch den Polarkern der genannten Figuren gegeben. Es ist kaum nöthig, diese einfachen Verhältnisse noch näher auszuführen; die zu den Geraden der Figuren 24 und 25 selbst, d. h. zu dem Polarkern unserer Specialfälle gehörenden Fundamentalsubstitutionen sind durch 3 Substitutionsexponenten charakterisirt, deren imaginäre Bestandtheile bis auf beliebige Vielfache von $2\pi i$ entspr. gleich πi, πi, 0 sind. Allgemein gilt der Satz:

Schneiden sich 2 der inneren Axen ausserhalb in einem Punkte, so hat die zu ihrem kürzesten Abstand zugehörige Fundamentalsubstitution des Polarkernes hyperbolischen Charakter.

Schneiden sich 2 der inneren Axen innerhalb der Kugel, so hat die zu ihrem kürzesten Abstande zugehörige Fundamentalsubstitution des Polarkernes elliptischen Charakter.

---

*) Von dem Specialfalle, dass die 3 inneren Axen sich auf der Kugel in einem Punkte schneiden, zugleich dem Uebergangsfall von 1 und 2, werden wir später noch ausführlich handeln. Wir erkennen schon jetzt, dass dann die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen keineswegs ohne Weiteres eindeutig bestimmt sind, allemal jedoch eine Auswahl derselben 3 elliptische Substitutionen darstellt, vgl. pag. 172 und pag. 195 u. 196.

§ 10.

Die in der Gleichung $\mathsf{ABC} = 1$ enthaltenen Relationen als Doppelverhältnissbeziehungen der 6 Fixpunkte.

Wir gehen nun dazu über, in der Betrachtung des Kernes und seiner Fundamentalsubstitutionen den rein geometrischen Weg zu verlassen und uns der algebraischen Rechnung zu bedienen. Unser nächstes Ziel wird die Aufstellung gewisser Doppelverhältnissgleichungen bilden, welche die Fixpunkte der Substitutionen mit ihren Exponenten verknüpfen. Sie stellen in entwickelter Form den Ausdruck der Bedingung $\mathsf{ABC} = 1$ dar, welche 3 unabhängige Relationen in sich birgt. Es seien 3 loxodromische Substitutionen*) gegeben in der Form:

$$\mathsf{A}) \qquad s' = e^{2i\pi\lambda} \cdot s,$$

$$\mathsf{B}) \quad \frac{s' - b_1}{s' - b_2} = e^{2i\pi\mu} \cdot \frac{s - b_1}{s - b_2},$$

$$\mathsf{C}) \quad \frac{s' - c_1}{s' - c_2} = e^{2i\pi\nu} \cdot \frac{s - c_1}{s - c_2}.$$

Wir haben das Coordinatensystem der Einfachheit halber der Art angenommen, dass die Fixpunkte a_1 und a_2 der Substitution A zum Null- und Unendlichkeitspunkt gewählt sind. Wir benutzen nun den Ansatz $\mathsf{ABC} = 1$ in der Form $\mathsf{AB} = \mathsf{C}^{-1}$, d. h. die Aufeinanderfolge der Substitutionen A und B soll gleichwerthig mit der inversen Substitution C sein. Ein beliebiger Punkt s_0 wird nach der Anwendung der Substitutionen A und B in einen Punkt s_0' übergegangen sein, der sich aus der folgenden Gleichung ergiebt:

$$\mathrm{I}) \quad \frac{s_0' - b_1}{s_0' - b_2} = e^{2i\pi\mu} \cdot \frac{e^{2i\pi\lambda} \cdot s_0 - b_1}{e^{2i\pi\lambda} \cdot s_0 - b_2}.$$

Zu demselben Punkte muss man gelangen, wenn man auf s_0 die Substitution C^{-1} anwendet. Wir haben daher die weitere Gleichung:

$$\mathrm{II}) \quad \frac{s_0' - c_1}{s_0' - c_2} = e^{-2i\pi\nu} \cdot \frac{s_0 - c_1}{s_0 - c_2}.$$

Wir geben nun s_0 nach einander die speciellen Werthe $e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_2$, $e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_1$, c_1 und c_2. Dies führt uns zu folgenden Gleichungen:

$$1) \quad \frac{b_2 - c_1}{b_2 - c_2} = e^{-2i\pi\nu} \cdot \frac{e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_2 - c_1}{e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_2 - c_2}, \qquad \begin{pmatrix} s_0 = e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_2 \\ s_0' = b_2 \end{pmatrix},$$

$$2) \quad \frac{b_1 - c_1}{b_1 - c_2} = e^{-2i\pi\nu} \cdot \frac{e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_1 - c_1}{e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_1 - c_2}, \qquad \begin{pmatrix} s_0 = e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_1 \\ s_0' = b_1 \end{pmatrix},$$

*) Die Grössen λ, μ, ν, um beliebige ganze Zahlen vermehrt, lassen unsere Ausgangsformel unverändert, doch haben wir die beiden Gruppen der Auswahl dieser Grössen einander gegenüberzustellen, für welche die Summen $\lambda + \mu + \nu$ sich um eine ungerade ganze Zahl unterscheiden. Wir werden diesen Umstand in unseren Endformeln klar hervortreten sehen.

$$3)\quad \frac{c_1 - b_1}{c_1 - b_2} = e^{2i\pi\mu} \cdot \frac{e^{2i\pi\lambda} \cdot c_1 - b_1}{e^{2i\pi\lambda} \cdot c_1 - b_2}, \qquad (s_0 = c_1,\ s' = c_1),$$

$$4)\quad \frac{c_2 - b_1}{c_2 - b_2} = e^{2i\pi\mu} \cdot \frac{e^{2i\pi\lambda} \cdot c_2 - b_1}{e^{2i\pi\lambda} \cdot c_2 - b_2}, \qquad (s_0 = c_2,\ s_0' = c_2).$$

Zwischen diesen Gleichungen muss nothwendig eine Beziehung bestehen, da der Ansatz $AB\Gamma = 1$ nur 3 Gleichungen umfasst; man erkennt, dass in der That die Gleichungen 1 und 2, sowie 3 und 4, beiderseits durch einander dividirt zu demselben Resultate führen. Fasst man in diesen Gleichungen die Quotienten $\frac{c_1}{b_1}$, $\frac{c_2}{b_1}$, $\frac{c_1}{b_2}$, $\frac{c_2}{b_2}$ als Unbekannte auf, *so führt die directe Auflösung der ersteren zu der in Aussicht gestellten Formelgruppe*, in der wir zugleich in Rücksicht auf die Annahme $a_1 = 0$, $a_2 = \infty$ für die genannten Quotienten ihre Doppelverhältniss-Ausdrücke einführen:

$$\text{I.}\quad \left|\begin{array}{l} \frac{c_1}{b_1} = D\,V(a_1 a_2 c_1 b_1) = \frac{e^{-i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\nu-\mu)}}{e^{i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\nu-\mu)}}, \\ \frac{c_2}{b_1} = D\,V(a_1 a_2 c_2 b_1) = \frac{e^{-i\pi\lambda} \pm e^{-i\pi(\mu+\nu)}}{e^{i\pi\lambda} \pm e^{-i\pi(\mu+\nu)}}, \\ \frac{c_1}{b_2} = D\,V(a_1 a_2 c_1 b_2) = \frac{e^{-i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\mu+\nu)}}{e^{i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\mu+\nu)}}, \\ \frac{c_2}{b_2} = D\,V(a_1 a_2 c_2 b_2) = \frac{e^{-i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\mu-\nu)}}{e^{i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\mu-\nu)}}. \end{array}\right.$$

Und zwar ist in diesen Formeln, wie sich aus ihrer Ableitung ergiebt, entweder *stets das positive oder stets das negative Zeichen zu wählen;* wir kommen sogleich hierauf noch zurück. *Hierzu tritt noch die Gleichung:*

$$\text{II.}\quad \frac{c_1}{b_1} \cdot \frac{c_2}{b_2} = D\,V(a_1 a_2 c_1 b_1) \cdot D\,V(a_1 a_2 c_2 b_2) = e^{-2i\pi\lambda},$$

die sich aus der oben angegebenen, zunächst für $e^{2i\pi\lambda}$ quadratischen Identität ergiebt, nachdem man die Wurzel $e^{2i\pi\lambda} = 1$, d. h. λ gleich einer ganzen Zahl, abgesondert hat. (Die Wurzel $e^{2i\pi\lambda} = 1$ bedeutet geometrisch, dass man drei Operationen, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt, auch erhält, wenn man um jede der Axen eine beliebige Zahl voller Umdrehungen ausführt. Von diesem trivialen Falle sehen wir natürlich weiterhin ab.)

Man kann den Gleichungen I durch Ersetzung der Exponentialgrössen durch goniometrische Functionen leicht auch die folgende, besonders für reelle λ, μ, ν bequeme Gestalt geben:

$$\text{I}'.\quad D\,V(a_1 a_2 c_1 b_1) = e^{-i\pi\lambda} \cdot \frac{\cos\left(\frac{-\mu+\nu+\lambda}{2} \cdot \pi\right)}{\cos\left(\frac{-\mu+\nu-\lambda}{2} \cdot \pi\right)} \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Formeln entsprechen den positiven Zeichen der Formelgruppe I; ihnen gegenüber stehen die den negativen Zeichen entsprechenden, in denen die Cosinusfunctionen durch Sinusfunctionen ersetzt sind.*)

Es ist ersichtlich, dass wir durch cyklische Vertauschung der Buchstaben noch weitere analoge Gleichungen erhalten, die wir nicht anführen wollen.

Machen wir nun sogleich einige Anwendungen der gefundenen Beziehungen. Das wesentliche Resultat, welches wir der Formelgruppe II entnehmen, ist zunächst der Satz, dessen wir bereits auf pag. 190 Erwähnung thaten:

Bei drei gegebenen Geraden I, II, III (welche natürlich die Kugel schneiden müssen) sind die Exponenten der zugehörigen loxodromischen Substitutionen, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt, bis auf ganze Vielfache von $2\pi i$, eindeutig bestimmt.

Weiter aber gestatten die Gleichungen z. B. bei gegebenen Fixpunkten die Exponenten und bei gegebenen Werthen der λ, μ, ν und drei gegebenen Fixpunkten die übrigen Fixpunkte in einfachster Weise wirklich zu berechnen; gemäss des doppelten Vorzeichens der Formeln I ist die Lösung der zweiten Aufgabe *zweiwerthig*. Betreffs der genauen Unterscheidung der beiden Vorzeichen wird man aus der Betrachtung specieller zu dem Kern zugehöriger Fundamentalbereiche leicht erkennen, dass nur die *eine* Auswahl der Grössen λ, μ, ν den Fundamentalbereichen entspricht, nämlich diejenige, welche zu den Cosinusformeln führt; wir werden daher diese Auswahl auch zu bevorzugen haben. (Die Gleichungen I mit positivem Vorzeichen erhält man übrigens aus den Gleichungen I mit negativem Vorzeichen, indem man λ oder μ oder ν um 1 vermehrt; beide Gleichungsgruppen bleiben unverändert, wenn man die Grössen λ, μ, ν um ganze Zahlen vermehrt, deren Summe gerade ist.) Die letzten Gedanken hängen aufs Engste mit der Theorie der verwandten s-Functionen zusammen**); wir werden geradezu als geometrische *Definition* aufstellen, *solche s-Functionen mit einander verwandt zu nennen, deren Fundamentalbereiche zu demselben Kern gehören*. Wir werden hierauf später noch eingehend zurückkommen.

Man erkennt weiter aus der Formelgruppe I′ den Satz: *Ist $\pm\lambda \pm\mu \pm\nu$ in irgend einer Auswahl der Vorzeichen für den Fall*

*) Für reelle Werthe der Grössen λ, μ, ν wird man diese Formel leicht mit der Form der Doppelverhältnisse von 4 Kugelpunkten in Beziehung setzen können, wie sie Hr. Wedekind in seinen „Beiträgen zur geometrischen Interpretation binärer Formen" angiebt (Diss. Erlangen, 1875, pag. 12). Man vergleiche auch die bezüglichen Formeln in der bereits genannten Arbeit Riemanns, Ges. Werke 1876, pag. 68, sowie Papperitz, Ann. 25, 1885, pag. 217.

**) Papperitz, Ann. 25, 1885, pag. 212 ff.; Ann. 26, 1886, pag. 97 ff.

der Gültigkeit der Cosinusformeln gleich einer ungeraden Zahl (für den Fall der Gültigkeit der Sinusformeln gleich einer geraden Zahl), *so schneiden sich die inneren Axen I, II, III stets in einem Punkte auf der Kugelfläche und umgekehrt.* Der Beweis ergiebt sich daraus, dass jedenfalls eines der Doppelverhältnisse bei der angegebenen Voraussetzung 0 oder ∞ wird. Hieraus folgt aber, dass zwei der Axen *I, II, III* durch einen Punkt der Kugelfläche gehen müssen, welcher dann auch der dritten Axe angehört. Auch dieser Satz findet seine gute Anwendung in der Theorie der hypergeometrischen Function, indem aus der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ (wo n eine ganze Zahl bezeichnet) auf die Möglichkeit geschlossen wird, einen geeignet ausgewählten Zweig der s-Function durch ein einfaches unbestimmtes Integral darzustellen.*) Dieser Specialfall wird uns besonders später noch beschäftigen; es ist gerade derjenige, dessen Fundamentalbereiche wir auch im Falle complexer λ, μ, ν in dieser Arbeit bis zu Ende behandeln werden.

§ 11.

Die geometrische Deutung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie für complexe Argumente.

Wir wollen nun einen Excurs einschalten, der die in Aussicht gestellte *geometrische Deutung der sphärischen Formeln für complexe Argumente* zum Gegenstande haben soll. Wir werden zu dem Zwecke *zwei verschiedene Wege* einschlagen: Der erste schliesst sich eng an die aufgestellten Doppelverhältnissformeln an. Wir knüpfen wieder an Fig. 21 an, für die wir die Vertheilung der Werthe s auf der Kugel so gewählt denken, dass $a_1 = 0$, $a_2 = \infty$, dagegen $\gamma_1 = +1$, und in Folge dessen $\gamma_2 = -1$ wird, was stets möglich ist. Dann gilt

$$D\,V(a_1 a_2 b_1 b_2) = \frac{b_1}{b_2} = (b_1)^2,$$

da $b_1 = \frac{1}{b_2}$ ist. Weiter ergiebt sich:

$$D\,V(\gamma_1 \gamma_2 b_1 a_1) = \frac{1 - b_1}{1 + b_1} = \pm e^{in\pi} = \pm e^{i(n' + in'')\pi},$$

wo n' und in'' gemäss pag. 187 u. 188 definirt sind. Wir haben uns hier einer *sehr einfachen projectiven Interpretation der Doppelverhältnisse von 3 Kugelpunkten* bedient.**) Sind nämlich irgend 4 Punkte p, q, r, s

*) Vgl. pag. 172.

**) Dieselbe dürfte in mancher Beziehung einfacher sein als die von Hrn. Wedekind l. c. gegebene Definition. Aus ihr folgen z. B. sofort die von ihm in seinen „Studien im binären Werthgebiet" (Habilitationsschrift, Karlsruhe 1876) mit Hülfe der Begriffe „Moment und Comoment" zweier Geraden abgeleiteten Formen des Doppelverhältnisses von 4 Kugelpunkten.

auf der Kugel gegeben, so kann man allgemein das Doppelverhältniss derselben darstellen in der Form $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi' + i\varphi'')}$; in derselben bedeutet φ' den mit richtigen Vorzeichen genommenen nicht-Euklidischen Winkel der beiden Ebenen, welche die Raumgerade (p, q) mit den Punkten s und r verbinden, und $i\varphi''$ den nicht-Euklidischen Winkel der beiden Ebenen, welche die Polare der Geraden (p, q) mit denselben Punkten verbinden. Der Beweis hierfür ergiebt sich direct aus der Substitutionsformel:

$$\frac{s' - p}{s' - q} = e^{i\varphi} \cdot \frac{s - p}{s - q}$$

für $s = s$ und $s' = r$.

Aus der Gleichung

$$D\,V(\gamma_1 \gamma_2 b_1 a_1) = \frac{1 - b_1}{1 + b_1} = \pm e^{i(n' + in'')\pi}$$

folgt nun, indem wir das doppelte Vorzeichen in den Werth von n hineinnehmen, $b_1 = \frac{1}{i} \cdot \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2}$. Setzen wir diesen Werth in die erste Doppelverhältnissgleichung der vorigen Seite ein und bemerken zugleich, dass:

$$D\,V(a_1 a_2 b_1 b_2) = \frac{D\,V(a_1 a_2 c_1 b_2)}{D\,V(a_1 a_2 c_1 b_1)}$$

ist, so erhalten wir unter Benutzung der Gleichungen I′ folgendes Schlussergebniss:

$$-\operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\mu + \nu + \lambda}{2}\pi\right)}{\cos\left(\frac{\mu + \nu - \lambda}{2}\pi\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{-\mu + \nu - \lambda}{2}\pi\right)}{\cos\left(\frac{-\mu + \nu + \lambda}{2}\pi\right)}$$

oder:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{2}} = \cos n\pi = \frac{\cos \nu\pi + \cos \mu\pi \cdot \cos \lambda\pi}{\sin \mu\pi \cdot \sin \lambda\pi}.$$

Dies aber ist die bekannte *Cosinusformel der sphärischen Trigonometrie, jetzt aber für complexe Argumente gedeutet.* In analoger Weise werden wir durch cyklische Vertauschung der Buchstaben die Formeln für $\cos l\pi$, $\cos m\pi$ ableiten können; aus ihnen folgen alsdann bekanntlich alle anderen Formeln der sphärischen Trigonometrie durch rein algebraische Rechnung. Im übrigen würden wir noch auf eine Vorzeichenbestimmung in obiger Formel eingehen können, da ja die Grössen λ, μ, ν nur bis auf ganze Zahlen bestimmt sind. Doch können wir dies hier übergehen, da die folgende überdies übersichtlichere Ableitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie jede Zweideutigkeit ausschliessen dürfte.

Wir wollen zunächst eine Ableitung der Fundamentalformeln des gewöhnlichen sphärischen Dreiecks vorausschicken, deren Grundgedanken wir dann auf unsere allgemeine Frage übertragen wollen (K). Wir bedienen uns der Darstellung und Zusammensetzung der linearen Substitutionen in der Quaternionenform, welche der Drehung der Kugel um ihren Mittelpunkt entsprechen, wie sie z. B. von Herrn Klein in seinen Vorlesungen über das Ikosaeder pag. 32ff. angegeben werden.*) Die lineare Substitution der Variablen z wird dort in der Gestalt dargestellt: $z' = \frac{(d+ic)z-(b-ia)}{(b+ia)z+(d-ic)}$ mit der Bedingung $a^2+b^2+c^2+d^2=1$; dieselbe ist daher bestimmt durch die vier Grössen a, b, c, d, die wir die *„Euler'schen Parameter"* nennen. Die Aufeinanderfolge zweier Drehungen mit den Parametern a, b, c, d und a', b', c', d' kann durch eine einzige Drehung ersetzt werden, deren Parameter a'', b'', c'', d'' durch die *Rodrigues'schen Formeln* gegeben werden:

$$\begin{aligned} a'' &= (ad'+a'd)-(bc'-b'c),\\ b'' &= (bd'+b'd)-(ca'-c'a),\\ c'' &= (cd'+c'd)-(ab'-a'b),\\ d'' &= -aa'-bb'-cc'-dd'. \end{aligned}$$

Wir geben nun dem vorliegenden sphärischen Dreieck LMN auf der Kugel, die durch die Gleichung $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ in rechtwinkligen Coordinaten gegeben sei, speciell die in nebenstehender Figur angegebene Lage gegen das Coordinatensystem, sodass die Ecke L die Coordinaten $0, 0, 1$,

„ M „ „ $0, \sin n\pi, \cos n\pi$,

„ N „ „ $\sin m\pi \sin \lambda\pi$,
$\sin m\pi \cos \lambda\pi, \cos m\pi$

besitzt.

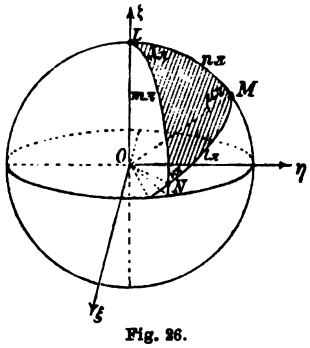


Fig. 26.

Wir benutzen jetzt den Satz, dass die Aufeinanderfolge dreier Drehungen A, B, Γ um die Kanten des zum Dreieck gehörenden Dreikants entspr. durch die doppelten Winkel $2\lambda\pi, 2\mu\pi, 2\nu\pi$ des Dreiecks zur Identität führt, und zwar wieder in der Form $AB = \Gamma^{-1}$. Die den einzelnen Drehungen zugehörigen Euler'schen Parameter ergeben sich wie folgt:**)

für A als: $a=0, b=0, c=\sin\lambda\pi, d=\cos\lambda\pi$;

*) 1884. Besonders sei auf die Litteraturangabe l. c. p. 36, Anm. hingewiesen.
**) Gemäss Formel 12 pag. 34 der Vorles. über das Ikosaeder.

für B als: $a' = 0$, $b' = \sin n\pi \sin \mu\pi$, $c' = \cos n\pi \sin \mu\pi$,
$d' = \cos \mu\pi$;

für Γ als: $a'' = \sin m\pi \sin \lambda\pi \sin \nu\pi$, $b'' = \sin m\pi \cos \lambda\pi \sin \nu\pi$,
$c'' = \cos m\pi \sin \nu\pi$, $d'' = -\cos \nu\pi$;

Setzt man diese Werthe in die Zusammensetzungsformeln von Rodrigues ein, *so bekommen wir sofort die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie:**)

1) $a'' = b'c$; oder:
$\sin m\pi \sin \nu\pi = \sin n\pi \sin \mu\pi$;
2) $b'' = b'd$; oder:
$\sin m\pi \sin \nu\pi = \sin n\pi \sin \mu\pi$;
} Sinussatz,

3) $c'' = cd' + c'd$; oder:
$\sin n\pi \operatorname{ctg} m\pi - \sin \lambda\pi \operatorname{ctg} \mu\pi = \cos n\pi \cos \lambda\pi$; Tangenssatz,

4) $d'' = -cc' + dd'$; oder:
$-\cos \nu\pi = -\cos n\pi \sin \mu\pi \sin \lambda\pi + \cos \mu\pi \cos \lambda\pi$; Cosinsusatz.

Kehren wir nun zu unserer *allgemeinen Aufgabe* zurück. *Die zweite Methode, die wir jetzt einschlagen, um die Formeln der sphärischen Trigonometrie für complexe Argumente zu deuten, knüpft direct an das geometrische Gebilde des Kernes und Polarkernes an*; die Schnittpunkte der Geraden *I*, *II*, *III*, sowie 1, 2, 3 mit der Kugel seien mit

$a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ resp. $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$, $\gamma_1 \gamma_2$

bezeichnet, wie die Figur 27 es angiebt. Wir können dann zunächst die Formelgruppe I für die Doppelverhältnisse dieser Punkte aufstellen:

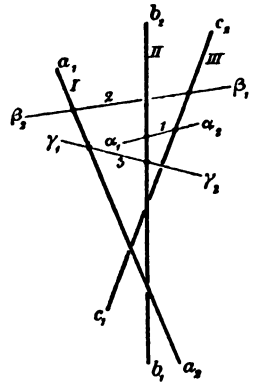


Fig. 27.

I. $(a_1 a_2 \beta_1 \beta_2) = -1$, $(b_1 b_2 \alpha_1 \alpha_2) = -1$, $(c_1 c_2 \alpha_1 \alpha_2) = -1$,
$(a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2) = -1$, $(b_1 b_2 \gamma_1 \gamma_2) = -1$, $(c_1 c_2 \beta_1 \beta_2) = -1$.

Dieselben besagen, dass die Geraden 1, 2, 3 die kürzesten Abstände je zweier der Geraden *I*, *II*, *III* enthalten und umgekehrt. Hierzu fügen wir als Definitionsgleichungen der Grössen $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$; $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ die zweite Formelgruppe:

II. $(a_1 a_2 \gamma_2 \beta_1) = e^{i\lambda\pi}$, $(\alpha_1 \alpha_2 c_2 b_1) = e^{il\pi}$,
$(b_1 b_2 \alpha_2 \gamma_1) = e^{i\mu\pi}$, $(\beta_1 \beta_2 a_2 c_1) = e^{im\pi}$,
$(c_1 c_2 \beta_2 \alpha_1) = e^{i\nu\pi}$, $(\gamma_1 \gamma_2 b_2 a_1) = e^{in\pi}$.

*) Vgl. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin 1853, Art. 524, 526, 529; sowie Papperitz, Untersuchungen über algebraische Transformation der hypergeometrischen Functionen. Habilitationsschrift, Leipzig 1886, p. 20 ff. Ann. 27, 1887, p. 232 ff.

Hierdurch sind die genannten Grössen nicht wie bisher nur bis auf ganze Vielfache von π, sondern bis auf ganze Vielfache von 2π bestimmt. Die Formelgruppen I und II geben uns 12 Gleichungen für die 12 Schnittpuncte, von denen der Natur der Sache nach drei willkürlich angenommen werden können. Man erkennt daher leicht, dass die Formeln I und II uns drei Relationen zwischen den Grössen $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$; $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ liefern müssen, die dann zu den trigonometrischen Formeln hinführen. Die directe Elimination gelingt in der That; doch ziehen wir es vor, genau so vorzugehen, wie eben beim Dreieck.

Wir führen zuerst wieder die möglichst günstige Werthevertheilung der complexen Variabeln s auf der Kugel ein, indem wir $a_1 = 0$, $a_2 = \infty$, $\gamma_1 = +1$ setzen. Mit Hülfe der Formelgruppen I und II findet man durch einfache Ausrechnung:

$$\gamma_2 = -1, \quad (\text{aus } (a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2) = -1),$$

$$\beta_1 = -\beta_2 = -e^{-i\lambda\pi}, \quad (\text{aus } (\beta_1 \beta_2 a_1 a_2) = -1 \text{ und } (a_1 a_2 \gamma_2 \beta_1) = e^{i\lambda\pi}),$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1} = -i \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2}, \quad (\text{aus } (b_1 b_2 \gamma_1 \gamma_2) = -1 \text{ und } (\gamma_1 \gamma_2 b_2 a_1) = e^{in\pi}),$$

$$c_1 = e^{-i\lambda\pi} . i \operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}, \quad (\text{aus } (\beta_1 \beta_2 a_2 c_1) = e^{im\pi}),$$

$$c_2 = -i e^{-i\lambda\pi} . \operatorname{tg} \frac{m\pi}{2}, \quad (\text{aus } (\beta_1 \beta_2 c_1 c_2) = -1).$$

Unsere weitere Rechnung knüpft natürlich an den Ansatz $\mathsf{AB} = \Gamma^{-1}$ an, und zwar werden wir zunächst wieder darauf ausgehen, die Substitutionen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ in der Normalform darzustellen:

$$s' = \frac{(d + ic)s - (b - ia)}{(b + ia)s + (d - ic)}$$

mit der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Da wir es mit loxodromischen Substitutionen zu thun haben, so werden die Grössen a, b, c, d selbst wieder complexe Werthe annehmen, sodass die Coefficienten der Substitutionen „doppelcomplex" sind. Für die Zusammensetzung zweier Substitutionen der Normalform gelten nach wie vor die Formeln von Rodrigues. Es ergiebt sich unter Berücksichtigung der für die Grössen b_1, b_2, c_1, c_2 gefundenen Werthe:

Für die Substitution A:

$$s' = \frac{e^{i\lambda\pi} . s}{e^{-i\lambda\pi}}.$$

ist zu setzen:

$$a = 0, \; b = 0, \; c = \frac{e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi}}{2i} = \sin \lambda\pi, \; d = \frac{e^{i\lambda\pi} + e^{-i\lambda\pi}}{2} = \cos \lambda\pi.$$

Für die Substitution B:

$$\frac{s'-b_1}{s'-b_2} = \frac{e^{i\mu\pi}(s-b_1)}{e^{-i\mu\pi}(s-b_2)}$$

oder:

$$s' = \frac{s\,.\,[b_1 e^{-i\mu\pi} - b_2 e^{i\mu\pi}] - b_1 b_2\,.\,[e^{-i\mu\pi} - e^{i\mu\pi}]}{s\,.\,[e^{-i\mu\pi} - e^{i\mu\pi}] + [b_1\,.\,e^{i\mu\pi} - b_2\,.\,e^{-i\mu\pi}]}$$

ist zu setzen:

$$a' = 0,\quad b' = -\sin\mu\pi\sin n\pi,\quad c' = -\sin\mu\pi\cos n\pi,\quad d' = \cos\mu\pi.$$

Für die Substitution Γ:

$$\frac{s'-c_1}{s'-c_2} = \frac{e^{i\nu\pi}(s-c_1)}{e^{-i\nu\pi}(s-c_2)}$$

oder:

$$s' = \frac{s[c_1 e^{-i\nu\pi} - c_2 e^{i\nu\pi}] - c_1 c_2 [e^{-i\nu\pi} - e^{i\nu\pi}]}{s[e^{-i\nu\pi} - e^{i\nu\pi}] + [c_1\,.\,e^{i\nu\pi} - c_2\,.\,e^{-i\nu\pi}]}$$

ist zu setzen:

$$a'' = -\sin\nu\pi\sin\lambda\pi\sin m\pi,\quad b'' = -\sin\nu\pi\cos\lambda\pi\sin m\pi,$$
$$c'' = -\sin\nu\pi\cos m\pi,\quad d'' = \cos\nu\pi.$$

Indem man berücksichtigt, dass für die inverse Substitution von Γ nur die Grösse d'' ihr Vorzeichen zu wechseln hat, findet man dann aus den Formeln von Rodrigues nach Einführung der gefundenen Werthe für die vorkommenden Grössen:

$$1)\ \pm a'' = +b'c, \qquad 3)\ \pm c'' = cd' + c'd,$$
$$2)\ \pm b'' = b'd, \qquad 4)\ \mp d'' = -cc' + dd',$$

oder, da wir der nothwendigen Symmetrie der Endformeln wegen nur das obere Vorzeichen zu berücksichtigen haben:

1 u. 2) $\sin\nu\pi\sin m\pi = \sin\mu\pi\sin n\pi$ (Sinussatz),

3) $-\sin\nu\pi\cos m\pi = \sin\lambda\pi\cos\mu\pi - \sin\mu\pi\cos n\pi\cos\lambda\pi$

oder unter Berücksichtigung von 1:

$-\sin n\pi\,\mathrm{ctg}\,m\pi = \sin\lambda\pi\,\mathrm{ctg}\,\mu\pi - \cos n\pi\cos\lambda\pi$ (Tangenssatz),

4) $-\cos\nu\pi = \sin\lambda\pi\sin\mu\pi\cos n\pi + \cos\mu\pi\cos\lambda\pi$ (Cosinussatz).

Wir erkennen sofort, *diese Förmeln stimmen bis auf die Vorzeichen mit den Fundamentalformeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie überein.* Es wäre uns ein Leichtes, z. B. durch andere Definition der Grössen λ, μ, ν volle Uebereinstimmung zu erzielen. Doch bieten unsere Formeln in der erhaltenen Form einen wesentlichen Vorzug, indem sie gestatten, in ihnen die Grössen $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ mit den Grössen $l\pi$, $m\pi$,

$n\pi$ direct zu vertauschen ohne Aenderung der Vorzeichen.*) Bekanntlich gilt dies nicht für die Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie. Der Grund liegt darin, dass in dem Polardreieck nicht einfach die Winkel und Seiten des ursprünglichen Dreiecks vertauscht sind, während in unserem allgemeinen Falle der Fig. 27 die Geradentripel *I, II, III* und 1, 2, 3 völlig gleichwerthig erscheinen.

§ 12.

Construction des Kernes für gegebene Werthe λ, μ, ν.

Wir wollen nun weiter zu der Aufgabe übergehen, *für gegebene complexe Grössen $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ die inneren Axen der zugehörigen drei Schraubenbewegungen, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt, geometrisch zu construiren.* Die Methode, die wir in der Lösung dieser Aufgabe befolgen, wird darin bestehen, dass wir in der Zahlenebene der Variablen s, dem stereographischen Abbild unserer Kugelfläche, die 6 Fixpunkte $a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2$ der Fundamentalsubstitutionen zu zeichnen lehren. Wir haben die gleiche Aufgabe bereits pag. 35 algebraisch gelöst und gesehen, dass zu drei gegebenen Exponenten allemal zwei verschiedene Geradentripel *I, II, III* construirt werden können, welche den Bedingungen genügen; von diesen wird einer den Cosinusformeln, der andere den Sinusformeln für die gleiche Auswahl der Werthe λ, μ, ν entsprechen. Wir kommen auf diese Zweideutigkeit noch am Schlusse dieses Paragraphen zurück. Wir haben natürlich alle Geradentripel als identisch anzusehen, welche durch eine lineare Transformation der Kugel in sich in einander übergeführt werden können. Gerade dieser letzte Punkt entspricht dem Umstande, dass wir bei der Ausführung der geometrischen Construction drei der sechs Fixpunkte beliebig wählen bez. eine andere gleichwerthige Annahme machen können. Da die reellen Bestand-

*) Man vgl. z. B. Stolz: „Ueber eine analytische Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie etc." (Schlömilch's Zeitschrift, Bd. XVI, 1871, pag. 175). — Das von mir gefundene allgemeine Resultat ist in aller Kürze bereits in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1891, pag. 188, sowie in den Math. Ann. Bd. 39, 1891, p. 598 veröffentlicht worden. Es sei an dieser Stelle auch hingewiesen auf die Behandlung der trigonometrischen Formeln in der nicht-Euklidischen Geometrie, z. B. Lobatcheffsky, Ges. Werke (Kasan 1883, 1886) Bd. II, pag. 577, 586, 630, sowie Frischauf „absolute Geometrie nach J. Bolyai", 1872, pag. 51ff., von neuerer Litteratur sei nur Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie" II, 1 pag. 480ff. und 519 erwähnt.

Unsere specielle Fragestellung erlaubt hier nicht, den analogen Sätzen, die bei anderer Maassbestimmung im Raume sich unseren Entwicklungen zur Seite stellen, weiter nachzugehen. Dass dieselben mir jedoch keineswegs entgangen sind, wie Herr Study in seiner Arbeit in den Abh. der Sächs. Gesellschaft der Wissensch. Bd. XX, 1893, pag. 229 meint, scheint doch wohl selbstverständlich.

theile λ', μ', ν' der Grössen λ, μ, ν nur bis auf ganze Zahlen in Betracht kommen, so wollen wir in diesem Abschnitt gleich von vornherein voraussetzen, dass sie sämmtlich kleiner als 1 sein mögen. Die Werthe der Grössen $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ mögen ferner geometrisch durch die Punkte $e^{\lambda\pi i}$, $e^{\mu\pi i}$, $e^{\nu\pi i}$ der complexen Zahlenebene gegeben sein, deren Abweichung gleich $\lambda'\pi$, $\mu'\pi$, $\nu'\pi$ und deren Abstand vom Nullpunkt gleich $e^{-\lambda''\pi} = L$, $e^{-\mu''\pi} = M$, $e^{-\nu''\pi} = N$ ist (Fig. 28).

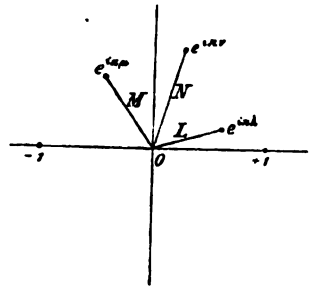


Fig. 28.

Eine besondere Betrachtung würden *die Fälle ganzzahliger Werthe der Grössen λ, μ, ν erfordern, für welche die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen entweder parabolischen Charakter tragen oder die Identität darstellen.* Da diese Fälle sich sehr leicht überblicken lassen, so wollen wir ihnen zunächst einige Worte widmen, wobei wir uns auf die Angabe der Resultate beschränken. Von den drei Grössen λ, μ, ν mögen entweder alle drei oder zwei oder nur eine ganzzahlig sein.

a) *Sind alle drei Exponenten ganzzahlig*, so ist der Fall von vornherein als unmöglich ausgeschlossen, dass eine der Fundamentalsubstitutionen parabolisch ist, die beiden anderen die Identität bilden. Es bleiben daher nur die folgenden Möglichkeiten übrig:

1. Einmal seien alle drei Substitutionen parabolisch; dann wird der Kern von drei sich in einem Punkte ausserhalb der Kugel schneidenden Tangenten der Kugel gebildet, die beliebig angenommen werden können.

2. Oder aber alle drei Substitutionen sind Identitäten; dann ist der Kern der Geraden *I*, *II*, *III* (selbst bei Festlegung der Punkte a_1, b_1, c_1) völlig *unbestimmt*.

3. Oder endlich es sind zwei Substitutionen, etwa B und Γ, parabolisch, und die dritte A ist gleich der Identität. Dann fallen die Geraden *II*, *III* in eine Tangente der Kugel zusammen, während die dritte Gerade *I* völlig *unbestimmt* ist. Zugleich ist die parabolische Substitution B zu der parabolischen Substitution Γ invers.

b) *Sind nur zwei Exponenten ganzzahlig*, z. B. μ und ν, so ist von vornherein wieder ausgeschlossen, dass nur eine der Fundamentalsubstitutionen B und Γ parabolischen Charakter besitzt, während die andere die Identität darstellt, oder dass beide Fundamentalsubstitutionen B und Γ Identitäten darstellen. Es bleibt allein der nicht weiter singuläre Fall übrig, dass beide Fundamentalsubstitutionen B und Γ parabolischen Charakter tragen. Der Kern wird ausser von der die Kugel schneidenden Geraden *I* von zwei Tangenten *II* und *III* der

Kugel gebildet. (Falls auch der dritte Exponent λ reell ist, werden die drei Geraden *I, II, III* natürlich durch einen Punkt gehen.)

c) *Ist schliesslich nur ein Exponent ganzzahlig*, etwa λ, so kann zu ihm entweder eine identische oder eine parabolische Substitution gehören.

1. Im ersten Falle folgt dann weiter, dass die Substitutionen B und Γ nothwendig wieder zu einander invers sein müssen; im Kern sind daher die beiden Geraden *II* und *III* zusammengefallen, während die Gerade *I* völlig *unbestimmt* ist.

2. Im letzten Falle dagegen wird im Kern die Gerade *I* von einer Tangente der Kugel und die Geraden *II* und *III* von zwei festen, die Kugel schneidenden Geraden dargestellt. (Sind die Exponenten μ und ν überdies ebenfalls reell oder gilt allgemein die Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$, so werden sich die drei Geraden *I, II, III* natürlich wieder in einem Punkte schneiden.)

Da alle die genannten speciellen Kerne sehr leicht für gegebene Werthe λ, μ, ν zu construiren sind, so wollen wir sie bei der folgenden Darstellung der Construction des Kernes für allgemeine Werthe der Grössen λ, μ, ν nicht weiter berücksichtigen, um nicht unsere Betrachtungen dementsprechend unnöthig modificiren zu müssen. Doch haben wir um so lieber die besonderen Fälle angeführt, als sie sogleich bei der Betrachtung der Fundamentalbereiche wieder hervortreten werden.

Wie wird sich nun die Construction der sechs Fixpunkte in dem allgemeinen Falle gestalten, in dem uns drei complexe Werthe der Grössen λ, μ, ν vorliegen? Unsere Zeichnungen, die wir in praxi in der s-Ebene ausführen, wollen wir zugleich stets auf die Kugel durch stereographische Projection übertragen denken. Wie wir vorab bemerken wollen, werden wir unsere Aufgabe auf die folgende einfache Hülfsaufgabe *zurückführen: Es seien geometrisch die Fixpunkte, sowie die Exponenten zweier Substitutionen B und C gegeben; die Fixpunkte derjenigen dritten Substitution A^{-1} zu finden, welche die gegebenen Substitutionen ersetzt, sodass die symbolische Gleichung gilt: $BC = A^{-1}$ oder $ABC = 1$.* Wir erkennen, wir können unmittelbar die Figur 21 auf diese Hülfsaufgabe anwenden, wenn wir die inneren Axen der Substitutionen B und C z. B. als die Geraden *II, III* wählen. Die Lösung unserer Hülfsaufgabe übersieht sich dann leicht: Man findet zunächst das Schnittpunktepaar der Geraden (2) mit der Kugel als gemeinsames harmonisches Punktepaar zu den Schnittpunktepaaren der Geraden (*II*) und (*III*). (Wir haben die Bezeichnungen der Geraden in Klammern gesetzt, da dieselben keineswegs mit den gleich bezeichneten Geraden unserer Hauptaufgabe übereinstimmen.) Die Schnittpunktepaare der Geraden (1) und (3) sind durch die gegebenen Exponenten der Substitutionen B und C leicht den Betrachtungen auf pag. 186 ff. gemäss aus dem Schnittpunktepaare der Geraden (2) zu finden.

Das zu letzterem Paar gemeinsam harmonische Paar stellt dann die gesuchten Fixpunkte der Substitution A dar.*) — *Wir gehen nun zu unserer Hauptaufgabe zurück.*

Es ist zunächst klar, dass wir die Schnittpunkte der Kugel mit den Theilgebilden der Geraden $I, 2, 3$ oder $II, 3, 1$ oder $III, 1, 2$ in ihrer Lage zu einander, insbesondere was ihre Doppelverhältnisse betrifft, sofort geometrisch construiren können. Um z. B. die betreffenden

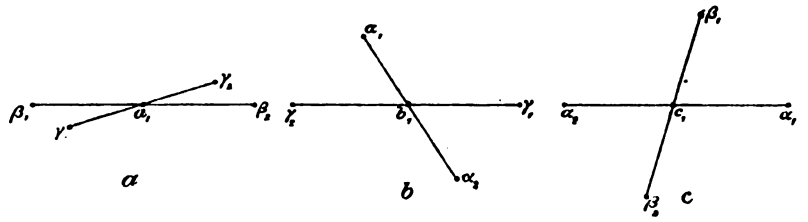


Fig. 29a, b, c.

Punkte des Gebildes der Geraden $III, 1, 2$ zu bestimmen, wählen wir die Punkte $0, \infty$ der complexen Zahlenebene als Schnittpunkte der Geraden III, die Punkte ± 1 als Schnittpunkte der Geraden 1. Dann liefern uns sofort die Punkte $\pm e^{i\nu\pi}$ die Schnittpunkte der Geraden 2. Analog finden wir die Schnittpunkte für die beiden anderen Theilgebilde, wie in den Figuren 29, b, c angegeben ist; in ihnen haben wir die Bezeichnungen der Schnittpunkte in einer beliebigen zulässigen Auswahl hinzugesetzt. Gehen wir nun von dem in solcher Weise bestimmten Theilgebilde der Geraden $I, 2, 3$ in der s-Ebene aus; es bleiben dann zu ihm noch die Schnittpunkte der Geraden 1 mit der Kugel zu construiren. Alsdann werden die Schnittpunktepaare der Geraden II und III durch die Bedingung leicht gefunden werden können, dass jedes derselben gleichzeitig harmonisch liegt zu den Schnittpunktepaaren der Geraden 1, 2 bezw. 1, 3. Die Doppelverhältnisse der Schnittpunkte von 1 mit den Schnittpunkten von 2 bezw. 3 sind uns aber geometrisch, wie gezeigt ist, durch die Figuren 29, b, c gegeben. Unsere Aufgabe erweist sich daher mit der folgenden, allgemein interessanten identisch: *Ein Punktepaar in der s-Ebene zu finden, welches mit zwei gegebenen Punktepaaren vorgegebene Doppelverhältnisse bildet.* Wie wird nun die Lösung für diese Aufgabe ver-

*) Man kann auch leicht die Hülfsaufgabe mit der folgenden identificiren: *Auf der Kugel ist durch zwei einander entsprechende Punktetripel p, q, r und p', q', r' eine projective Beziehung festgelegt; es gilt, die Doppelpunkte der letzteren zu construiren.* Man hat einfach zu dem Zweck drei in geeigneter Weise ausgewählte Punkte der Kugel durch die Substitutionen B^{-1} und C in drei neue Punkte zu transformiren. Die Doppelpunkte der durch diese beiden Punktetripel bestimmten projectiven Beziehung stellen dann die gesuchten Doppelpunkte der Substitution A dar. Vgl. die Lösung jener Aufgabe bei Wedekind, Diss. Erlangen (1875) pag. 30.

laufen?*) Wir argumentiren folgendermassen: Führt man um die Gerade 2 eine Schraubenbewegung B aus, die den Punkt α_2 in den Punkt α_1 überführt und dann eine Schraubenbewegung C um die Gerade 3, welche α_1 in α_2 überführt, so ist α_2 an seine Ausgangsstelle zurückgekommen. Mit anderen Worten: Durch die Aufeinanderfolge der Substitutionen B und C ist auf der Kugel eine projective Beziehung ihrer Punkte hergestellt, deren einer Doppelpunkt vom Punkte α_2 geliefert wird. Nun sind aber die genannten beiden Substitutionen B und C durch die Figuren 29, b, c vollständig geometrisch bekannt. *Damit ist die Hauptaufgabe auf die Hülfsaufgabe zurückgeführt, deren geometrische Lösung oben bereits durchgeführt ist.* Mit dem Punkte α_2 ist natürlich sofort der Punkt α_1 gegeben. Wir wollen es übergehen, die Construction in einer Figur auszuführen, da ja eine solche keinerlei Schwierigkeit mehr bietet, wenn sie auch ziemlich complicirt sich gestaltet.

Es bleibt nur noch ein Wort zu sagen über die Auswahl des Punktes α_2 unter den beiden Fixpunkten der Substitution A, sowie über die Willkür in der Bezeichnung der Schnittpunkte $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2$ in den Figuren 29a, b, c. Was den ersten Punkt betrifft, so zeigt eine einfache Betrachtung, dass die Gebilde der Geraden *I, II, III,* welche man durch die eine oder andere Auswahl des Punktes α_2 unter den Fixpunkten der Substitution A erhält, sich nur um eine halbe Drehung um die Axe I unterscheiden und daher gleichwerthig sind. Was aber die Willkür in der Bezeichnung der Punktepaare $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2$ der Figuren 29, a, b, c angeht, so ist unschwer zu erkennen, dass man bei einer geraden Anzahl von Vertauschungen der Bezeichnung jedes Paares zu derselben Construction der Fixpunkte der Substitution A und damit des Gebildes *I, II, III,* bei einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen dagegen (z. B. bei der Vertauschung der Bezeichnungen γ_1 und γ_2 in Fig. 29, b) zu anderen Fixpunkten der Substitution A und damit zu einem zweiten, von dem ersten verschiedenen Gebilde der Geraden *I, II, III* geführt wird. *Wir bekommen für gegebene Werthe λ, μ, ν demnach geometrisch immer zwei Kerne, von denen aber, sobald wir die Werthe der Exponenten λ, μ, ν bestimmt fixirt denken, nur der eine functionentheoretisch für uns in Betracht kommt.***) Dies Resultat erweist sich völlig

*) Für den speciellen Fall, dass das gesuchte Punktepaar zu den beiden gegebenen gemeinsam harmonisch gelegen sein soll, ist eine einfache Construction nach der Mittheilung des Herrn Klein von Herrn Wedekind in seiner Diss. (Erlangen 1875) pag. 31ff. angegeben. Wir haben diese Construction ja bereits anzuwenden Gelegenheit gehabt. — Interessant ist insbesondere der Specialfall, dass je zwei der drei Punktepaare ein reelles Doppelverhältniss darbieten; derselbe führt insbesondere auf solche Geradengebilde 1, 2, 3, wie sie zu dem Kern reeller oder rein imaginärer λ, μ, ν gehören (Wedekind, l. c. pag. 25).

**) Vergl. pag. 222 und pag. 172 Nr. 2.

in Uebereinstimmung mit der Bemerkung zu Anfang dieses Paragraphen, dass die Lösung der Constructionsaufgabe zweiwerthig sein muss. Wohl aber führt die richtig verstandene Aufgabe der p. 206 natürlich nur zu einer Lösung.

§ 13.

Ueberblick über die Gesammtheit aller überhaupt möglichen Kerne.

Wir fügen den bisherigen Betrachtungen des Kernes noch einige Sätze hinzu, die uns einen Ueberblick über die 6-fach unendliche Mannigfaltigkeit aller überhaupt möglichen Kerne gestatten. Der einzelne Kern ist durch die Punkte a_1, b_1, c_1 und die gegebenen Werthe $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ vollständig (allerdings zweideutig) bestimmt. Umgekehrt sind durch den Kern ja auch die Grössen $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ bestimmt, abgesehen von der Vieldeutigkeit dieser Werthe, die stets beim einzelnen Kern vorhanden ist.*) Richten wir nun unser Augenmerk auf diejenigen Punkte, die aus den Fixpunkten a_1 bezw. b_1 oder c_1 durch die Fundamentalsubstitutionen B bezw. Γ oder A hervorgehen; wir wollen dieselben mit a_2', b_2', c_2' bezeichnen, indem sie leicht aus den Punkten a_2, b_2, c_2 erhalten werden, wenn wir entsprechend um die drei Geraden des Polarkernes halbe Umdrehungen ausführen. Man übersieht sofort, dass der einzelne Kern auch durch die Punkte a_1, b_1, c_1; a_2', b_2', c_2' vollständig (und zwar eindeutig) bestimmt ist, indem z. B. die Substitution A durch die sich entsprechenden Punktepaare b_2', c_1 und b_1, c_2' und den Fixpunkt a_1 bestimmt, und damit dann auch ihr zweiter Fixpunkt a_2 zu construiren ist. Letzteres führt zu der allgemeinen Aufgabe: *Auf der Kugel ist eine projective Beziehung gegeben, deren einer Doppelpunkt bekannt ist; den zweiten Doppelpunkt zu construiren.* Ich habe die folgende, einfache Lösung gefunden: Man lege in dem obigen Beispiel durch die Punkte a_1, c_2', b_1 und die Punkte a_1, c_1, b_2' je einen Kreis; der zweite Schnittpunkt dieser Kreise sei der Punkt P. Dann lege man durch P, b_1, b_2' und andererseits P, c_1, c_2' wiederum je einen Kreis. Der zweite Schnittpunkt der letzteren ist der gesuchte Punkt a_2.

Es gelten nun die folgenden Sätze:

Wählt man bei festgehaltenen Punkten a_1, b_1, c_1 die Punkte a_2', b_2', c_2' bezw. irgendwie auf drei Kreisbogen der zu den Punkten $b_1 c_1$, $c_1 a_1$, $a_1 b_1$ gehörenden elliptischen Kreisschaar, so haben die reellen Bestandtheile λ', μ', ν' der zugehörigen Grössen λ, μ, ν stets denselben Werth.

Wählt man bei festgehaltenen Punkten a_1, b_1, c_1 die Punkte a_2', b_2', c_2' bezw. irgendwie auf drei Kreisen der analogen hyperbolischen Kreisschaar, so haben die imaginären Bestandtheile $i\lambda''$, $i\mu''$, $i\nu''$ der Grössen λ, μ, ν stets denselben Werth.

*) Vergl. pag. 187 und 188, sowie pag. 199 und 200.

Der Beweis dieser Sätze stützt sich bei passend gewählter specieller Lage der Punkte $a_1 b_1 c_1$ auf die Sätze der Elementargeometrie der Ebene von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen und dem geometrischen Ort aller Punkte, deren Verbindungslinien mit zwei festen Punkten dasselbe Verhältniss zeigen.

Die beiden Lösungen der Construction des Kernes bei gegebenen Werthen λ, μ, ν unterscheiden sich in der Weise, dass die Punkte a_2', b_2', c_2' bei festgehaltenen Punkten a_1, b_1, c_1 wohl auf denselben hyperbolischen Kreisen, doch auf „complementären" (d. h. sich zu einem vollen Kreise ergänzenden) elliptischen Kreisbogen liegen.

Die Punkte a_2', b_2', c_2' gewinnen übrigens besonders deswegen für uns an Interesse, weil sie die vierten Eckpunkte unserer Fundamentalbereiche in der Viereckform darstellen.

In wiefern die pag. 203 u. 204 ff. behandelten Fälle eines *unbestimmten Kernes* hier zur Geltung kommen, ist leicht zu erkennen. Bei dem Kern a, 1 des vorigen Paragraphen sind insbesondere die Punkte a_2', b_2', c_2' entspr. in die Punkte a_1, b_1, c_1, bei dem Kern c, 1 die Punkte b_2' und c_2' in die Punkte b_1 und c_1 gefallen, während a_2' von a_1 getrennt liegt. Jedoch sei auch auf den Kern a, 3 hingewiesen, bei dem es nicht möglich ist, wie hier stillschweigend angenommen ist, die Fixpunkte a_1, b_1, c_1 als von einander getrennte Punkte auszuwählen.

IV. Theil.

Ueber die geometrische Natur der allgemeinen Kreisbogendreiecke.

§ 14.

Allgemeine Construction der Kreisbogendreiecke bei gegebenen reellen Exponenten λ, μ, ν.

Wir wenden uns zu einem neuen Haupttheile unserer Untersuchungen. Derselbe beschäftigt sich mit den von Kreisbogen begrenzten Flächen, die zu dem Kern der Geraden *I*, *II*, *III*, als *Fundamentalbereiche* der zugehörigen s-Function zu construiren sind. Um uns bestimmter ausdrücken zu können, beschränken wir uns zunächst auf den Fall *reeller* λ, μ, ν, in dem die Geraden *I*, *II*, *III* des Kernes sich, wie wir wissen, in einem Punkte ausserhalb, innerhalb oder auf der Kugel schneiden. Hier legen wir uns die Frage vor: Wie werden die von drei Kreisbogen begrenzten, einfach zusammenhängenden Flächen, die wir *„sphärische Dreiecke" im weiteren Sinne* nennen können, ganz allgemein aussehen, deren Ecken in drei Schnittpunkten der Geraden *I*, *II*, *III* mit der Kugel liegen und deren Seitenebenen sich in den-

selben drei Geraden schneiden? Wir werden uns hier natürlich von vornherein auf solche Dreiecke zu beschränken haben, bei denen Windungspunkte irgend welcher Ordnung weder im Innern noch auf den Seiten mit Ausnahme der drei Eckpunkte vorkommen. Die nebenstehende Figur möge jedoch ein einfaches Beispiel eines Dreiecks mit einem Windungspunkte erster Ordnung im Innern geben.

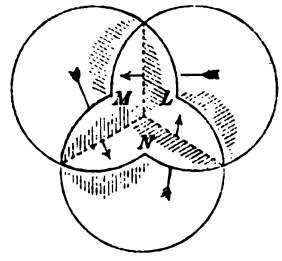


Fig. 30.

Offenbar können wir sofort den ganz allgemeinen, für alle Dreiecke geltenden Satz aufstellen: *Die Winkel in den Ecken des Dreiecks müssen allemal mit den pag.* 187 u. 188 *am Kern definirten reellen Grössen* $\lambda'\pi, \mu'\pi, \nu'\pi$ *bis auf ganze Vielfache von* π *übereinstimmen.* Denn denken wir uns die drei Symmetriedreiecke eines vorliegenden, beliebig gestalteten Dreiecks in Bezug auf die begrenzenden Kreisbogen hinzugefügt, so kann man stets um die drei Kanten des zum ursprünglichen Dreieck gehörenden Dreikants, d. h. um die drei Geraden des Kernes, nach einander Drehungen ausführen, welche die Symmetriedreiecke successive in einander überführen und demnach in ihrer Aufeinanderfolge die Identität erzeugen (vergl. pag. 168). *Auf welche Weise können wir nun Kreisbogendreiecke der hier in Betracht kommenden Art mit beliebig vorgegebenen Winkeln* $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ *wirklich construiren?* In der Beantwortung dieser Frage wollen wir unser Augenmerk zugleich darauf richten, wie oft in den construirten Dreiecken sich die Seiten selbst überschlagen, d. h. wie oft dieselben eine volle Kreisperipherie umspannen. Wir treffen in dem Betracht die Bestimmung, dass wir bei einer Seite, welche gerade eine ganze Zahl von Kreisperipherieen umläuft, die letzte Umspannung nicht als Ueberschlagung rechnen wollen. In unseren Figuren werden wir uns, wie bisher, der stereographischen Projection der Kugelfläche auf die Ebene bedienen. Unsere Betrachtungen schliessen sich im übrigen eng an die schon erwähnte Arbeit des Herrn *Klein Ann.* 37, 1890, pag. 579 ff. an.

Man sollte nun vielleicht erwarten, dass wir die Construction der Kreisbogendreiecke jetzt direct auf der Construction des einzelnen Kernes bei gegebenen Werthen λ, μ, ν aufbauen würden. Es würde dieses auch sehr gut möglich sein. Gleichwohl ziehen wir es vor, hier independent vorzugehen, da wir auf solche Weise sogleich einen Ueberblick über die Gesammtheit aller überhaupt möglichen Kreisbogendreiecke gewinnen. Erst in einem der späteren Paragraphen werden dann die bisherigen Betrachtungen des Kernes zu ihrer vollen Geltung kommen.

Zunächst ist es einleuchtend, dass wir die drei Ecken des zu construirenden Dreiecks willkürlich wählen können, indem wir ja alle diejenigen Dreiecke als gleichwerthig für uns anzusehen haben, die

durch eine lineare Transformation der Kugel in sich in einander übergeführt werden können. Unsere Methode wird nun darin bestehen, dass wir von einem bestimmten Ausgangsdreiecke aus *durch einen continuirlichen geometrischen Process*, der einer arithmetischen Zerlegung der Werthe $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ entspricht, das verlangte Dreieck aufbauen. Wir werden zugleich erkennen, dass wir auf solche Weise *für jedes Werthetripel* λ, μ, ν *stets ein und nur ein Dreieck* erhalten, so dass wir die Berechtigung gewinnen, den geometrischen Process geradezu zur Definition unserer Dreiecke an die Spitze zu stellen. Möge es gestattet sein, hier eine Bemerkung allgemeiner Art einzuschalten.

Wenn es auch wohl kaum zweifelhaft sein kann, dass die von uns dargestellten Kreisbogendreiecke die Gesammtheit aller Kreisbogendreiecke erschöpfen, die einfach zusammenhängende Bereiche ohne Windungspunkte im Innern und auf den Seiten mit Ausnahme der Ecken darstellen, d. h. dass es ausser den von uns construirten Kreisbogendreiecken keine anderen der genannten Eigenschaft giebt, so ist jedenfalls ein zwingender Nachweis für diese Behauptung überhaupt zu führen unmöglich. Denn wie soll man zeigen, dass irgend ein geometrisches Gebilde von gewissen Eigenschaften nicht anders zu denken möglich ist, als das gerade vorliegende Beispiel zeigt, da doch jeder derartige Beweisgang an eine bestimmte und klare Vorstellung anknüpfen muss? Auch ein functionentheoretischer Beweis, der etwa sagt: Jedes Kreisbogendreieck der genannten Art muss man doch auf die Halbebene abbilden können, dies führt uns aber zu der bestimmten Differentialgleichung $[s]_z = R(z)$, welche umgekehrt nur *eine* s-Function für gegebene Werthe λ, μ, ν definirt und also auch nur *ein* Kreisbogendreieck (abgesehen von einer linearen Transformation) als möglich zulässt (vergl. Klein, Ann. 37, p. 579 (1890)), auch dieser Beweis ist für den hier vorliegenden Gesichtspunkt nicht als zwingend anzusehen. Denn derselbe legt in der Benutzung des Riemann'schen Existenzsatzes wieder bestimmte geometrische Vorstellungen zu Grunde. Letzterer kann aber keineswegs verwandt werden, um umgekehrt den Schluss zu machen, dass es nun auch keine anderen Gebilde giebt als bei seiner Begründung allgemein vorschweben. Im übrigen hat diese ganze Frage ja mehr philosophische als rein mathematische Bedeutung. —

Es seien nun *die Grössen* λ, μ, ν, *die wir stets als positiv voraussetzen wollen*, der Art geordnet, dass $\lambda \geqq \mu \geqq \nu$ ist, was die Allgemeinheit nicht beschränkt. Wir setzen dann:

$$(1) \qquad \lambda = \beta + \gamma, \quad \mu = \gamma + \alpha, \quad \nu = \alpha + \beta.$$

Hieraus ergiebt sich sofort:

$$(2) \qquad \alpha = \frac{\mu + \nu - \lambda}{2}, \quad \beta = \frac{\nu + \lambda - \mu}{2}, \quad \gamma = \frac{\lambda + \mu - \nu}{2}.$$

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\lambda \leqq \mu + \nu$

oder $\lambda > \mu + \nu$ ist. Im ersteren Falle sind die Zahlen α, β, γ sämmtlich positiv oder gleich 0, im letzteren Falle ist β und γ positiv, α dagegen negativ, dagegen niemals eine der Grössen gleich 0.

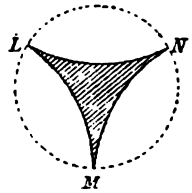


Fig. 31.

Wir behandeln zunächst den ersten Fall: $\lambda \leqq \mu + \nu$.

Als Ausgangsdreieck unserer Betrachtung wählen wir ein Dreieck mit drei Winkeln gleich 0, wie es die nebenstehende Figur giebt. Unser geometrischer *Process I* wird nun darin bestehen, dass wir die Fläche dieses Dreiecks über die drei Seiten hinaus unter Festhaltung der Ecken in bestimmter Weise wachsen lassen der Art, dass die Begrenzungen stets wieder von Kreisbogen gebildet werden. Die Figuren 32—34 mögen das Wachsthum der Fläche über die Seite LM

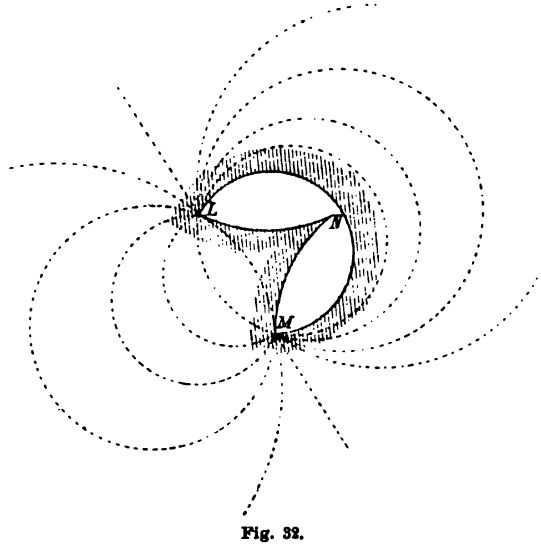


Fig. 32.

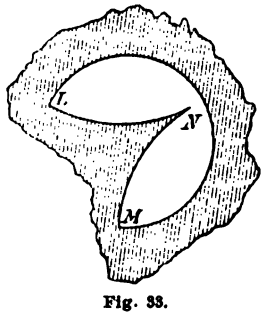


Fig. 33.

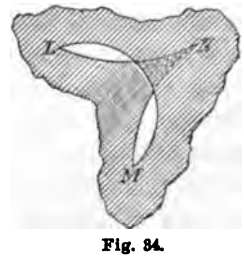


Fig. 34.

hinaus veranschaulichen. Der Kreisbogen LM wird immer weiter nach aussen hinausgeschoben; wir können uns etwa denken, dass bei

der Darstellung auf der Kugel die Ebene der Seite LM um die gerade Verbindungslinie der Punkte L und M sich dreht und hierbei die Fläche des Dreiecks LMN gleichsam wie eine dünne Membran mit sich zieht und ausspannt. Bei weiterer und weiterer Drehung wird die Membran sich dann, wie über die ganze Kugel, so über die ursprüngliche Fläche des Ausgangsdreiecks hinüberschieben, vielleicht auch noch zum zweiten, dritten Male u. s. w., indem sie sich um die Punkte L und M herumwindet. Es hat nun durchaus keine Schwierigkeit, sodann in gleicher Weise eine Ausdehnung des Ausgangsdreiecks über die Seite LM und MN vorzunehmen. — Nun erkennt man, dass bei dem Wachsen der Fläche z. B. längs der Seite LM der Winkel an der Ecke N unverändert bleibt und nur die Winkel L und M und zwar stets um dieselben Beträge zunehmen. Werfen wir daher einen Blick auf die Formeln (1), so kommen wir zu folgendem Endresultat: *Um in unserem ersten Falle das Dreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ zu construiren, werden wir in unserem Ausgangsdreieck LMN die Seite MN um den Winkel $\alpha\pi$, die Seite LN um den Winkel $\beta\pi$, die Seite LM um den Winkel $\gamma\pi$ nach aussen zu drehen haben.* Die Anschauung zeigt zugleich, dass in den *Dreiecken dieser ersten Art* sich keine Dreiecksseite überschlagen wird.

Wir wenden uns nun zu dem zweiten Falle: $\lambda > \mu + \nu$.

Wir setzen: $\lambda = \mu + \nu + 2|\alpha|$, $\mu = \mu$, $\nu = \nu$, indem wir mit $|\alpha|$ den absoluten Betrag von α bezeichnen. Als Ausgangsdreieck wählen wir wieder ein Dreieck, dessen sämmtliche Winkel gleich 0 sind; dasselbe möge jedoch von drei Halbkreisen begrenzt sein, wie Figur 35 zeigt. Wir gelangen jetzt in zwei Schritten zum allgemeinen Dreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. Zunächst construiren wir ein Dreieck mit den Winkeln $\lambda_1\pi = 2|\alpha|\pi$, $\mu_1\pi = 0$, $\nu_1\pi = 0$. Wir halten in dem Ausgangsdreieck die Ecken L und M fest, lassen die Ecke N sich jedoch im positiven Sinne auf dem Kreise der Seite MN bewegen, so dass die Seite LN sich um L dreht und hierbei die Membran der Dreiecksfläche mit sich zieht (Fig. 36). Man sieht, dieser *Process II* lässt sich beliebig fortsetzen. Die Ecke N des Dreiecks wird sich mit ihrem Zipfel schliesslich über die Fläche des Ausgangsdreiecks hinüberschieben (Fig. 37), bei nochmaligem Umlauf des Punktes N zum zweiten Male u. s. f. Hierbei nimmt allein die Grösse des Winkels L continuirlich zu. *Hat man in solcher Weise das Dreieck mit den Winkeln $\lambda_1\pi = 2|\alpha|\pi$, $\mu_1\pi = 0$, $\nu_1\pi = 0$ construirt, so steht nichts im Wege, jetzt in einem zweiten Schritte noch die Seiten LN und LM dieses Dreiecks durch den Process I um den Winkel $\mu\pi$ resp. $\nu\pi$*

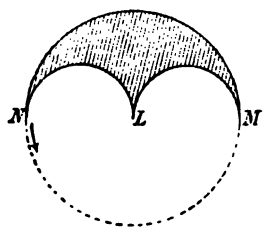


Fig. 35.

nach aussen hinauszuschieben. So erhalten wir leicht das gewünschte *Dreieck zweiter Art* mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$.

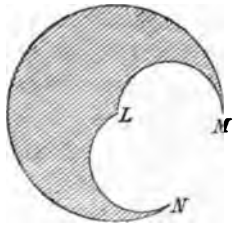


Fig. 36.

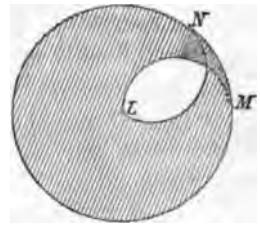


Fig. 37.

Wie verhält es sich nun in dem schliesslich gefundenen Dreieck mit der Ueberschlagung der Seiten? Offenbar ist sofort ersichtlich, dass der zweite Schritt die Seiten LM und LN sich niemals überschlagen lässt. Andererseits wird die erste Seite MN sich einmal überschlagen haben, sobald der Winkel $\lambda_1\pi$ grösser als π geworden ist. Wir erhalten daher das Resultat: Die Seite MN wird sich so oft überschlagen, als die Zahl $E\left(\frac{2|\alpha|+1}{2}\right) = E\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right)$ angiebt, wobei das Symbol E die grösste ganze Zahl bezeichnet, welche von dem Klammerausdruck überschritten wird. Wenn wir die Bedeutung des Symbols E noch dahin modificiren, dass es die grösste ganze *positive* Zahl bezeichnen soll, welche von dem beigesetzten Klammerausdruck überschritten wird, so können wir die Betrachtung der Fälle I und II unter Verzicht auf die Bedingung $\lambda \geqq \mu \geqq \nu$ schliesslich in dem allgemeinen Satze zusammenfassen, der genau das von Herrn Klein gefundene Resultat darstellt: *Es ist bei vorgegebenen Grössen $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ allemal möglich, das zugehörige Dreieck zu construiren. In demselben überschlägt sich die dem beliebigen Winkel $\lambda\pi$ gegenüberliegende Seite so oft, als das Symbol $E\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right)$ angiebt. Jedoch wird diese Zahl höchstens für eine der Dreiecksseiten grösser als Null sein.*

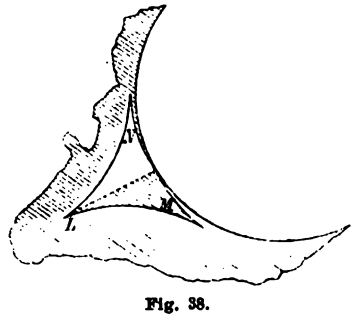


Fig. 38.

Es ist nun leicht zu übersehen, dass man auch im Falle II die Dreiecke aus dem Ausgangsdreieck des Falles I unter Festhaltung der Ecken aufbauen kann. Jedoch wird man nicht mehr einen continuirlichen Process durchführen können, sondern man wird neben der Anwendung des geometrischen Processes I längs eines von dem Eckpunkte L nach der Gegenseite MN gezogenen Verzweigungsschnittes E Kugelkalotten anhängen müssen ($\lambda \geqq \mu \geqq \nu$),

deren Begrenzungskreis mit dem Kreis der Seite MN zusammenfällt. Die Anhängung *einer* solchen Kalotte wird durch die Figur 38 erläutert; der Bereich ist im Unendlichen geschlossen zu denken, indem er sich über die ganze Kugel herüberzieht. Diese Betrachtungen finden ihren Ausdruck in dem Satze: *Alle Dreiecke mit denselben Ecken, welche dieselbe Zahl der Ueberschlagungen der einen Seite besitzen, bilden ein Continuum,* d. h. man kann von einem beliebigen Dreieck unter ihnen zu jedem anderen durch einen continuirlichen geometrischen Process (bei Festhaltung der Ecken) gelangen, der nur durch Dreiecke dieser Schaar hindurchführt. Diese letzte Eigenschaft besteht andererseits niemals für zwei Dreiecke, bei denen die gleiche Seite in verschiedener Zahl oder aber verschiedene Seiten sich überschlagen.

Der letzte Grund für das Auftreten der verschiedenen Continua der Dreiecke mit denselben Ecken ist darin zu suchen, dass z. B. das Dreieck mit den Winkeln $\pi, 0, 0$ (*oder allgemeiner* $\pi + (\sigma + \tau)\pi$, $\sigma\pi$, $\tau\pi$) *als Grenzfall zwei verschiedenen Continuis angehört* und somit sprungweise den Uebergang zwischen Dreiecken verschiedener Continua vermittelt (Fig. 39, 40)

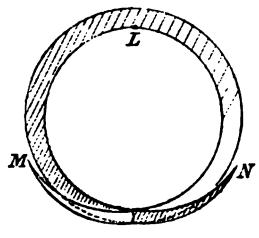


Fig. 39.

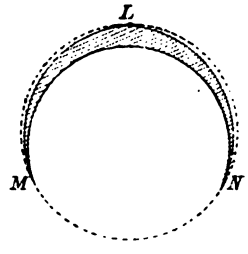


Fig. 40.

Dieser sprungweise Uebergang erklärt sich weiter aus dem Umstande, dass nach der für die Dreiecke zweiter Art angegebenen Methode construirt das Dreieck mit den Winkeln π, 0, 0 durch die Figur 41 gegeben wird, also durch ein Dreieck mit zwei *zusammenfallenden* Ecken.

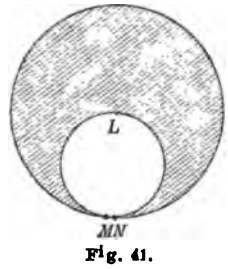


Fig. 41.

Die zu den Figuren 39, 40 gehörenden Fundamentalbereiche der Exponenten $\lambda = 1 + \sigma + \tau$, $\mu = \sigma$, $\nu = \tau$ sind natürlich functionentheoretisch unbrauchbar, da dieselben durch eine Einschnürung am Punkte L in zwei Stücke zerfallen (vgl. Fig. 52). Es ist interessant näher zu verfolgen, was aus der Abbildung des sphärischen Dreiecks auf die positive Halbebene (oder auf das Innere eines Kreises) in diesen Grenzfällen wird, wenn man sich denselben continuirlich von brauchbaren Dreiecken aus nähert.

Man wird die Figuren 39 und 40 einerseits, Figur 41 andererseits natürlich nur in dem Sinne noch kreisverwandt (nach Möbius) nennen können, wenn man Substitutionen mit ∞ hohem Exponenten zulässt.

§ 15.

Das Auftreten zusammenfallender oder sich berührender Begrenzungskreise des Dreiecks.

Es bleibt noch ein Wort zu sagen *über das Auftreten ganzzahliger Werthe der Grössen* λ, μ, ν.

Offenbar kann der einzelne Exponent λ, μ, ν nur dann ganzzahlig sein, wenn die beiden die entsprechende Dreiecksecke einschliessenden Kreisperipherieen entweder zusammenfallen oder sich berühren, und umgekehrt. Indem wir uns einen Gesammtüberblick über die geometrische Gestalt der Dreiecke mit ganzzahligen Werthen λ, μ, ν zu geben vorbehalten, wollen wir hier vorerst die Frage erörtern, wie wir von vornherein bei gegebenen Werthen λ, μ, ν entscheiden können, *ob für einen ganzzahligen Exponenten die zugehörige Ecke von 2 zusammenfallenden oder von 2 sich berührenden Kreisen gebildet wird.* Diese Frage ist deswegen von besonderer Wichtigkeit, weil im letzteren Falle die auf pag. 164 für die betreffende Particularlösung unserer Differentialgleichung allgemein angegebene Potenzentwickelung nicht mehr in unveränderter Form gilt, vielmehr dann auf der rechten Seite ein logarithmisches Glied auftritt.

Betrachten wir zunächst auf Grund unserer auf pag. 210 ff. angegebenen Methode der Construction des sphärischen Dreiecks für gegebene Werthe λ, μ, ν, wann die Begrenzung des letzeren nur einer Kreisperipherie, wann sie nur zwei Kreisperipherieen angehören wird.

Eine Kreisperipherie, die also durch die Punkte L, M, N bestimmt ist, kann offenbar nur bei den Dreiecken erster Art eintreten, und zwar werden allgemein, wie sofort zu übersehen ist, die Grössen λ, μ, ν die Form haben müssen

$$\lambda = 1 + m + n, \quad \mu = 1 + l + n, \quad \nu = 1 + m + l,$$

woselbst l, m, n positive ganze Zahlen einschliesslich der Null bezeichnen. *Die Grössen* λ, μ, ν *müssen daher ganze Zahlen von ungerader Summe sein, für die überdies die Bedingung* $\lambda \leqq \mu + \nu$, $\mu \leqq \nu + \lambda$, $\nu \leqq \lambda + \mu$ *gilt* (vergl. Schwarz, Ges. Abh. II. pag. 259).

Wann aber werden wenigstens für eine Ecke, z. B. für die Ecke L, die beiden zugehörigen Kreisperipherieen der Begrenzung zusammenfallen? Was zunächst wieder die Dreiecke erster Art betrifft, so werden die Grössen λ, μ, ν sich alsdann in der Form darstellen lassen müssen:

$$1) \quad \lambda = 1 + p + q, \quad \mu = \tfrac{1}{2} + q + \varrho, \quad \nu = \tfrac{1}{2} + p + \varrho,$$

woselbst jetzt p und q ganze Zahlen bezeichnen, während ϱ eine beliebige positive Zahl ist. — Bei den Dreiecken zweiter Art dagegen kann natürlich nur von der dem grössten Exponenten zugehörigen Ecke L (Fig. 37) in dem angegebenen Sinne die Rede sein. Wir

wollen zunächst ausschliessen, dass die beiden übrigen Ecken M und N zusammengefallen sind. Dann müssen die Grössen λ, μ, ν die folgende Darstellung zeigen:

$$2)\quad \lambda = 2|\alpha| + 2\mu_0 + p + q,\quad \mu = \mu_0 + p,\quad \nu = \mu_0 + q$$

mit der Bedingung, dass $2|\alpha| + 2\mu_0 = 2m + 1$ d. h. eine ungerade positive ganze Zahl ist. Hier hat $2|\alpha|$ die auf pag. 52 angegebene Bedeutung; p und q bezeichnen wieder ganze Zahlen, μ_0 mag überdies der Gleichung $0 < \mu_0 < 1$ genügen. — Fallen endlich die beiden Eckpunkte M und N unserer sphärischen Dreiecke des Falles II zusammen (vgl. Fig. 41), so müssen die Grössen λ, μ, ν die folgende Zerlegung gestatten:

$$3)\quad \lambda = 2n + 1 + p + q,\quad \mu = p + \delta,\quad \nu = q - \delta,$$

woselbst n, p, q wieder ganze Zahlen und δ eine beliebige Zahl bedeutet. Nun erkennt man leicht, wieder in Rücksicht auf die allgemeine Methode der Construction der sphärischen Dreiecke, dass auch umgekehrt die Darstellungsformen 1, 2 oder 3 eine hinreichende Bedingung bilden, um auf das Zusammenfallen der die Ecke L bildenden Kreisperipherieen zu schliessen; zugleich werden im Falle 3 stets die Ecken M und N des Dreiecks zusammenfallen. — Indem wir die in der Darstellung 1, 2, 3 liegenden Bedingungen in allgemeiner Form zusammenfassen, gewinnen wir den wichtigen Satz: *Die beiden die beliebige Ecke L bildenden Kreisbogen werden denselben Kreisperipherieen angehören, falls λ eine ganze Zahl und*

$$\lambda - \mu + \nu = 2n + 1 \quad \text{(Darstellungsform 1 und 2)}$$

oder

$$\lambda - \mu - \nu = 2n + 1 \quad \text{(Darstellungsform 3)}$$

d. h. gleich einer ganzen positiven ungeraden Zahl ist, wobei wir zugleich $\mu > \nu$ voraussetzen. Letztere Einschränkung ergiebt sich als nothwendig, um die erste Bedingung allein für die zu dem grössten Exponenten zugehörige Ecke eines Dreiecks zweiter Art gültig zu wissen.*)

Dem letzten Satze können wir nun sogleich noch die folgende wichtige Ergänzung zur Seite stellen: *Ist der Exponent λ eine ganze Zahl, dagegen weder*

$$\lambda - \mu + \nu = 2n + 1 \quad (\textit{für } \mu > \nu)$$

noch

$$\lambda - \mu - \nu = 2n + 1,$$

so gehören nothwendig die beiden die Ecke L bildenden Bogen zwei sich berührenden Kreisen an, d. h. die Ecke L ist eine wesentlich singuläre

*) Vgl. Schwarz. Ges. Abh. II. pag. 256, insbesondere auch für das Folgende, sowie Schellenberg, Diss. Göttingen 1892, pag. 65, woselbst dieselben Bedingungen bei der *analytischen* Untersuchung betr. das Wegfallen der Logarithmen hervortreten.

Stelle für die s-Function (nach der Bezeichnung von Weierstrass). Indem die zu der Ecke L zugehörige Fundamentalsubstitution dann parabolischen Charakter trägt, wollen wir die Ecke im vorliegenden Falle als *parabolische Ecke* bezeichnen.

§ 16.

Theorie der „reducirten" und „verwandten" Dreiecke für reelle, nicht ganzzahlige Exponenten.

Die Gesammtheit aller Dreiecke, in denen kein Winkel grösser als 2π und keine 2 Winkel grösser als π sind, wollen wir weiterhin als *„reducirte Dreiecke"* bezeichnen.*) Dieselben gehören, abgesehen von einer cyklischen Vertauschung in der Bezeichnung der Ecken $a_1 b_1 c_1$, in dem früher festgesetzten Sinne offenbar 2 Continuis an. *Wie viel reducirte Dreiecke wird es nun bei einem beliebigen Kerne der Geraden I, II, III geben, wenn wir die Wahl der Dreiecksecken unter den Fixpunkten $a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2$ freistellen?* Um nicht immerfort unsere allgemeinen Betrachtungen durch Zusätze begrenzen zu müssen, wollen wir vor der Hand ganzzahlige Werthe der Exponenten ausschliessen, indem wir die zu ihnen gehörigen Dreiecke für eine besondere Betrachtung uns vorbehalten.

Wir haben die 3 *Fälle des Kernes* zu unterscheiden, *dass die Geraden I, II, III sich entweder im Innern der Kugel oder im Aeusseren derselben oder auf der Kugel in einem Punkte schneiden.* Die beiden ersten Fälle sind morphologisch dadurch unterschieden, dass die 3 Schnittkreise der durch je 2 der Geraden *I, II, III* gelegten

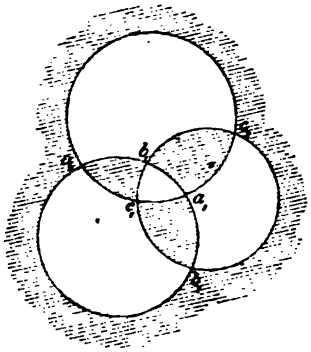


Fig. 42.

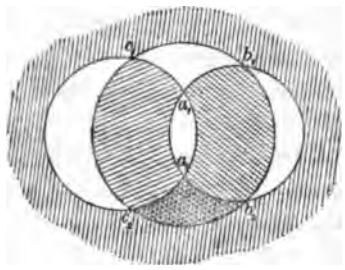
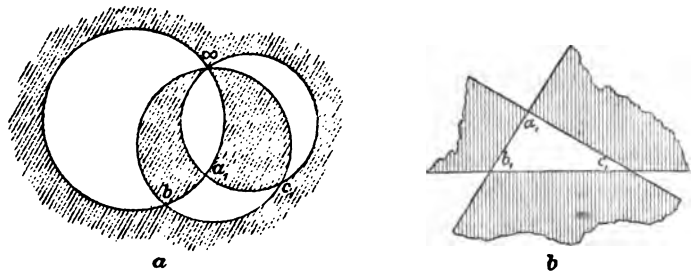


Fig. 43.

Ebenen mit der Kugel einen imaginären oder einen reellen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen (Fig. 42, 43). Im letzten Falle da-

*) Vergl. die etwas abweichende Definition des reducirten Dreiecks bei Hrn. Schwarz, 1872, Ges. Abh. II. pag. 235—236, sowie bei Hrn. Klein, 1890, Ann. 37, pag. 580.

gegen gehen die genannten 3 Schnittkreise durch einen Punkt, denselben wird man gern ins Unendliche transformiren, wodurch in der s-Ebene die 3 Kreise in gerade Linien übergehen (Fig. 44, a, b.).



a *b*

Fig. 44, a. b.

Wir wollen nun zunächst die für die Figuren 42—44 gemeinsam geltenden Beziehungen in Worten beschreiben und dann durch weitere Figuren für die einzelnen Fälle erläutern. Wir sagen: Zu jeder Auswahl der 3 Ecken gehören vier reducirte Dreiecke, von denen drei zu dem vierten Dreieck in der Beziehung der *„Aussendreiecke"* zum *„Grunddreieck"* stehen; *in jedem Aussendreieck ist allemal einer der Winkel grösser als* π. Je zwei „complementäre" Auswahlen der 3 Ecken liefern zu einander „symmetrische" Dreiecke, d. h. Dreiecke mit denselben Winkeln, jedoch mit verschiedener Aufeinanderfolge der 3 Ecken bei bestimmter Umlaufsrichtung der Begrenzung. Indem wir symmetrische Dreiecke nicht als verschieden ansehen — dieselben stehen in indirecter Möbius'scher Kreisverwandtschaft —, werden wir demnach 4 Grunddreiecke in jedem Kern auswählen können; von diesen 4 Dreiecken stehen 3 zu dem vierten in der Beziehung der „Nebendreiecke" zum „Hauptdreieck"; doch ist diese letzte Unterscheidung, besonders für den Fall der Figur 42, weniger von principieller Bedeutung. In den Figuren 42—44 ist allemal das Dreieck $a_1 b_1 c_1$ als Hauptdreieck gewählt worden, die an seine drei Seiten anstossenden Nebendreiecke $a_1 b_1 c_2$; $a_1 c_1 b_2$; $b_1 c_1 a_2$ sind durch Schraffirung hervorgehoben. In der Figur 43 überdecken sich diese drei Nebendreiecke gemeinsam in dem Dreieck $a_2 b_2 c_2$. Die Summe der Winkel des Hauptdreiecks $a_1 b_1 c_1$ der Figuren 42—44 ist entsprechend $> \pi$, $< \pi$ oder gleich π, wie leicht zu übersehen ist.

Bezeichnen wir die Winkel eines Grunddreiecks z. B. des Hauptdreiecks eines Kernes mit $\lambda_0 \pi$, $\mu_0 \pi$, $\nu_0 \pi$, *so werden die Winkel der* 16 *überhaupt vorhandenen reducirten Dreiecke desselben durch die folgende Tabelle, wieder unter Fortlassung des Factors* π, *gegeben:*

Ecken:	$a_1 b_1 c_1$ oder $a_2 b_2 c_2$	$a_1 b_1 c_2$ oder $a_2 b_2 c_1$	$a_1 b_2 c_1$ oder $a_2 b_1 c_2$	$a_2 b_1 c_1$ oder $a_1 b_2 c_2$
Grunddreiecke:	$\lambda_0,\ \mu_0,\ \nu_0$	$1-\lambda_0,\ 1-\mu_0,\ \nu_0$	$1-\lambda_0,\ \mu_0,\ 1-\nu_0$	$\lambda_0,\ 1-\mu_0,\ 1-\nu_0$
Aussendreiecke:	$2-\lambda_0,\ 1-\mu_0,\ 1-\nu_0$	$1+\lambda_0,\ \mu_0,\ 1-\nu_0$	$\lambda_0,\ 1-\mu_0,\ 1+\nu_0$	$1-\lambda_0,\ 1+\mu_0,\ \nu_0$
	$1-\lambda_0,\ 2-\mu_0,\ 1-\nu_0$	$\lambda_0,\ 1+\mu_0,\ 1-\nu_0$	$1+\lambda_0,\ 1-\mu_0,\ \nu_0$	$1-\lambda_0,\ \mu_0,\ 1+\nu_0$
	$1-\lambda_0,\ 1-\mu_0,\ 2-\nu_0$	$\lambda_0,\ \mu_0,\ 2-\nu_0$	$\lambda_0,\ 2-\mu_0,\ \nu_0$	$2-\lambda_0,\ \mu_0,\ \nu_0$

Nun gilt es, von den verschiedenen möglichen Gestalten dieser Dreiecke sich eine Anschauung zu bilden. Am einfachsten ist der Fall der Figur 42, in dem die Nebendreiecke nicht wesentlich vom Hauptdreieck verschieden sind; eines der Aussendreiecke wird beispielsweise durch Fig. 45 gegeben. (In den Ecken der Dreiecke wird allemal die

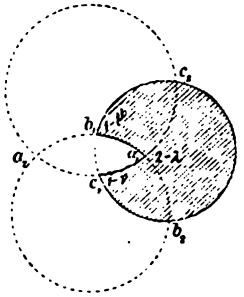


Fig. 45.

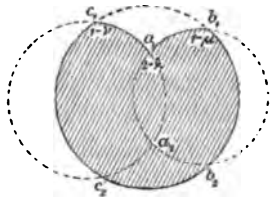


Fig. 46.

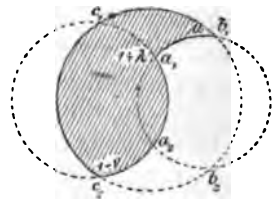


Fig. 47.

Grösse der Winkel in Beziehung auf die Tabelle angegeben.) Im Falle der Figur 43 sei eines der morphologisch gleichwerthigen Aussendreiecke des Hauptdreiecks durch Fig. 46, eines der Aussendreiecke des Nebendreiecks $a_1 b_1 c_2$, welches dem zweiten Aussendreieck wieder morphologisch gleichwerthig ist, durch Fig. 47, das dritte Aussendreieck des Nebendreiecks aber durch Fig. 48 gegeben. In letzterem überschlägt sich die Seite $a_1 b_1$ einmal; die Figur ist daher etwas verzerrt gezeichnet worden. Nun kommt schliesslich noch der Uebergangsfall der Fig. 44, a, b. Auch an ihr werden wir sämmtliche 16 reducirten Dreiecke aufzeigen können, jedoch ist allemal von je zweien der zu einander symmetrischen Dreiecke eines zu einem unbrauchbaren Bereich ausgeartet. Eines der Aussendreiecke

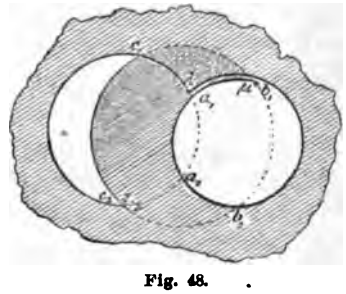


Fig. 48.

des Hauptdreiecks $a_1 b_1 c_1$ giebt Fig. 49, woselbst die Seite $b_1 c_1$ sich über den Unendlichkeitspunkt herüberzieht; eines der Aussendreiecke

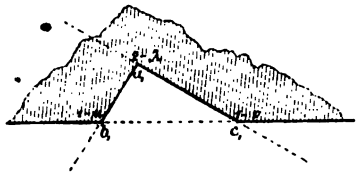


Fig. 49.

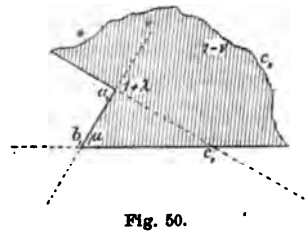


Fig. 50.

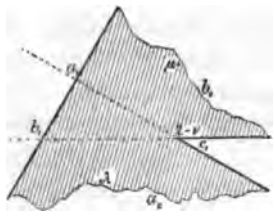


Fig. 51.

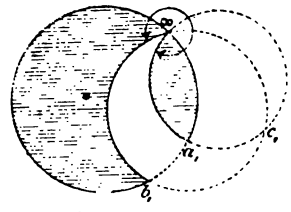


Fig. 52.

des Nebendreiecks $a_1 b_1 c_2$, welches dem zweiten wieder morphologisch gleichwerthig ist, giebt Fig. 50, das dritte zugehörige Aussendreieck endlich Fig. 51. Das zu letzterem symmetrische Dreieck, welches der ursprünglichen Auswahl der Ecken $a_1 b_1 c_2$ entspricht, ist in 2 Zweiecke ausgeartet, wie sie Fig. 52 darstellt.

Wir werden jetzt wünschen, ein unmittelbares algebraisches Kriterium zu besitzen, um bei gegebenen Werthen λ, μ, ν (die wir, wie schon gesagt, stets als positive Grössen voraussetzen) einmal sofort zu erkennen, wann überhaupt ein Bereich sich geradlinig begrenzen lässt, und ferner welche Ecken hierbei in den Unendlichkeitspunkt fallen. Den Betrachtungen des Kernes auf pag. 195 u. 196 gemäss ergiebt sich sofort, *dass wir nur dann und stets dann ein geradliniges Dreieck haben werden, wenn* $\lambda + \mu + \nu$ *oder* $\lambda + \mu - \nu$ *oder* $\lambda - \mu - \nu$ (*oder einer der durch cyklische Vertauschung entstehenden Ausdrücke*) *eine positive ungerade Zahl vorstellt.* — Gehen wir nun der Reihe nach die einzelnen reducirten Dreiecke durch, die wir soeben angeführt haben, so ergeben sich die weiteren Sätze, die wir hernach auf die allgemeinen geradlinig begrenzten Dreiecke übertragen werden:

Ist für ein reducirtes Dreieck $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$, *so liegen alle Ecken im Endlichen* (*Bedingung A*).

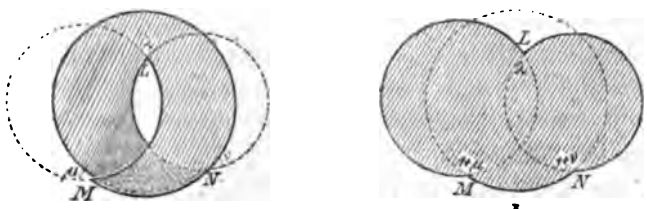
Ist für ein reducirtes Dreieck $\lambda + \mu - \nu = 2n + 1$, *so liegt nur die Ecke N im Unendlichen* (*Bedingung B*).

Ist für ein reducirtes Dreieck $\lambda - \mu - \nu = 2n + 1$, *so liegen die Ecken M und N im Unendlichen* (*Bedingung C*).

Natürlich gestatten die beiden letzten Sätze die cyklische Vertauschung der Buchstaben λ, μ, ν und L, M, N.

Wir gehen nun einen Schritt weiter, indem wir *die Gesammtheit aller derjenigen Dreiecke betrachten, die zu demselben Kern gehören* und daher von Bogen derselben Kreise begrenzt werden. Wie bereits früher erwähnt wurde, nennt man diese Dreiecke mit einander *„verwandt"*, die zu ihnen gehörenden Functionen aber *„verwandte" s-Functionen*. Wir können offenbar bei einem beliebig vorgegebenen Dreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ die auf den Seiten 210 ff. geschilderten geometrischen Processe auch rückwärts vornehmen, indem wir einmal an derjenigen Ecke, welche einer sich etwa überschlagenden Seite gegenüberliegt, so viele Kugelkalotten als möglich „polar" abnehmen, andererseits die sich nicht überschlagenden Seiten, so viele Male als möglich, um den Winkel π zurückdrehen, d. h. Kugelkalotten „lateral" abnehmen. Man erkennt, dass wir auf solche Weise stets nur zu Dreiecken gelangen, die mit dem Ausgangsdreieck verwandt sind; schliesslich werden wir zu einem reducirten Dreieck (welches in besonderen Fällen auch ein ausgeartetes Dreieck darstellen kann) geführt. Jeder Schritt, den wir ausführen (die Abnahme resp. Hinzufügung einer Kalotte), vermindert resp. vermehrt, wie man sofort erkennt, die Summe der 3 Winkel jedesmal um 2π. Dies führt uns mit Rücksicht auf die Tabelle pag. 219 zu dem Satze: *Stets dann und nur dann sind (bei Ausschluss ganzzahliger Werthe λ, μ, ν) zwei beliebige Dreiecke mit einander verwandt, wenn die mit bestimmten Vorzeichen versehenen Winkel der beiden Dreiecke sich entsprechend um ganze Vielfache von π unterscheiden, deren Summe ein gerades Vielfaches von π ist.*

Je nachdem die Summe der ganzen in λ, μ, ν enthaltenen Zahlen gerade oder ungerade ist, *ist die soeben geschilderte Reduction eines beliebigen Dreiecks eindeutig oder dreideutig*, entsprechend dem Umstande, dass zu jedem Grunddreieck 3 Aussendreiecke gehören. Um dies klar einzusehen, berücksichtige man, dass man z. B. von dem reducirten Dreieck



a *b*

Fig. 53, a, b.

der Figur 53a (mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$) zum nicht reducirten Dreiecke Fig. 53b (mit den Winkeln $\lambda\pi$, $(\mu+1)\pi$, $(\nu+1)\pi$) ge-

langen kann, indem man die Seiten LM und LN in Fig. 53a um den Winkel π hinausdreht und dann in L eine Kalotte abtrennt. Analog kommt man von dem Dreieck, welches von dem nicht schraffirten Theil der Ebene Fig. 53b dargestellt wird, zu dem neuen Dreieck, dessen Winkel an der Ecke L um 2π vermehrt ist, indem man an den Seiten LM und LN eine Kalotte lateral anhängt, dagegen dann an der Seite MN eine Kalotte lateral abtrennt.

Es ist im übrigen nach dem Vorstehenden nicht schwer, umgekehrt *alle zu einem bestimmten Kern gehörenden verwandten Dreiecke* aus seinen 16 reducirten Dreiecken mittels der geometrischen Processe der lateralen und polaren Anhängung von Kugelkalotten aufzubauen.*) Auf jedes der 16 reducirten Dreiecke baut sich somit eine unendliche (abzählbare) Menge verwandter Bereiche auf. Von besonderem Interesse ist wieder der allgemeine Fall geradlinig begrenzter Dreiecke.

Die nähere Betrachtung, wie man von den reducirten Bereichen zu den allgemeinen Bereichen aufsteigt, führt uns hier zu der in Aussicht gestellten Erweiterung der Sätze pag. 220, die jetzt allgemein lautet:

Ist für ein sphärisches Dreieck

$$\lambda + \mu + \nu = 2n + 1 \quad (\textit{Bedingung } A)$$

oder

$$\lambda + \mu - \nu = 2n + 1 \quad (\textit{Bedingung } B)$$

oder

$$\lambda - \mu - \nu = 2n + 1 \quad (\textit{Bedingung } C),$$

so kann man dasselbe stets durch geeignete Transformation in ein geradlinig begrenztes Dreieck verwandeln, und zwar werden dabei im ersten Falle alle 3 *Ecken des Dreiecks im Endlichen liegen, im zweiten Falle dagegen wird die Ecke N, im dritten Falle werden die Ecken M und N ins Unendliche gerückt sein.* Wieder kann man natürlich cyklische Vertauschungen der Buchstaben eintreten lassen; es sei dabei bemerkt, dass zwei der genannten Bedingungen nur dann gleichzeitig gelten können, wenn ganzzahlige Werthe der Grössen λ, μ, ν auftreten, die wir hier einstweilen ausgeschlossen haben.

Aus der Theorie der verwandten Dreiecke folgt zugleich, dass irgend 2 Dreiecke, welche zu je einem der beiden gemäss pag. 204 ff. für gegebene Werthe der λ, μ, ν sich ergebenden Kerne gehören, sich in ihrer mit richtigen Vorzeichen genommenen algebraischen Winkelsumme um ein ungerades Vielfache von π unterscheiden, während die sich entsprechenden Winkel um ganze Vielfache von π differiren. Werfen wir schliesslich an dieser Stelle nochmals einen Rückblick auf die Bestimmung der Grössen $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ am Gebilde des Kernes,

*) Ein solcher Weg ist in der Darstellung des Hrn. Klein befolgt, Ann. 37, 1890, p. 579 ff.

wie dieselbe auf pag. 187 u. 188 gegeben ist, so werden wir durch Betrachtung specieller Dreiecke leicht finden, dass für die Werthe der Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ eines Dreiecks LMN, dessen Ecken die Punkte $a_1 b_1 c_1$ darstellen mögen, in der Formelgruppe pag. 194 stets die oberen Vorzeichen (d. h. die Cosinusformeln) zu wählen sind (je nachdem man jedoch bei einer Umlaufung der Dreiecksbegrenzung, die Fläche linker Hand lassend, die 3 Ecken LMN in dieser oder in der umgekehrten Reihenfolge antrifft, sind die Winkel des Dreiecks positiv oder negativ in Rechnung zu bringen). Die Endformeln pag. 201 übertragen sich auf unsere Dreiecke, indem man für die Grössen $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ die um π vermehrten Werthe der 3 Seiten des Dreiecks einsetzt.

§ 17.

Endgültige Betrachtung der Kreisbogendreiecke für ganzzahlige Exponenten.

Es erübrigt noch, wie wir uns vornahmen, die Dreiecke für ganzzahlige Exponenten λ, μ, ν im Zusammenhange zu betrachten. Mögen nun alle drei Exponenten, zwei oder nur einer derselben ganzzahlig sein, stets wird sich zeigen, dass wir nicht mehr 16 reducirte Dreiecke als von einander verschieden an dem einzelnen Kern zu unterscheiden haben. Ja, es wird sogar in einigen Fällen eintreten, dass gar nicht einmal alle 16 in der Tabelle pag. 219 genannten Exponententripel zu Dreiecken *desselben* Kernes führen, sondern zu Dreiecken *zweier verschiedener Kerne*. (Dann ist also der einzelne Kern durch die Exponenten λ, μ, ν allein nicht festgelegt.) Hierbei zeigt sich, dass gerade die Dreiecke, welche bei dem einen Kern unbrauchbar sind, bei dem andern brauchbar sind und umgekehrt, und somit treten 2 getrennte Schaaren mit einander verwandter Dreiecke auf. Wir wollen sogleich die einzelnen möglichen Fälle nach einander besprechen. Hierbei werden besonders die speciellen Betrachtungen des Kernes auf pag. 203 u. 204 zur unmittelbaren Anwendung gelangen; auf sie sei allemal am Schlusse der folgenden Fälle hingewiesen.

a) *Sind alle drei Exponenten λ, μ, ν ganze Zahlen*, so haben wir die zwei Fälle zu unterscheiden, dass *ihre Summe gerade oder ungerade ist.*

1) Im *ersten* Falle haben wir es nur mit *einer Gesammtheit mit einander verwandter Dreiecke* zu thun. Diese leitet sich ab von dem reducirten Dreieck, dessen drei Winkel einzeln gleich Null sind (Fig. 31). Es giebt ausserdem an dem Kern dieses Dreiecks noch drei weitere reducirte Dreiecke, entsprechend mit den Winkeln $0, \pi, \pi$; $\pi, \pi, 2\pi$; $0, 0, 2\pi$ (Fig. 38). Von ihnen haben wir die beiden letzten als

Aussendreiecke anzusehen. Man übersieht zugleich sofort, dass stets auch in dem allgemeinen Dreieck der Verwandtschaft *drei parabolische Ecken* auftreten werden (Kern a, 1 pag. 203).

2) Im *zweiten* Falle leiten sich sämmtliche möglichen Dreiecke von den beiden reducirten Dreiecken mit den Winkeln $0, 0, \pi$ resp. π, π, π ab. Das erste Dreieck giebt Fig. 41, das zweite Dreieck erhält man leicht aus Fig. 31, indem man die einzelnen Seiten nach dem Process I je um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ nach aussen dreht (Fig. 54). Indem diese beiden Dreiecke zu ganz verschiedenen Kernen gehören, die übrigens beide unbestimmt sind, so haben wir daher *zwei von einander getrennte Schaaren verwandter Dreiecke*, die sich wie folgt von einander sondern und für sich charakterisiren lassen:

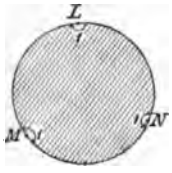


Fig. 54.

Haben wir ein *Dreieck erster Art*, d. h. ein Dreieck, für welches jeder Exponent kleiner als die Summe der beiden anderen ist, so gehören die 3 begrenzenden Bogen derselben Kreisperipherie an und eine parabolische Ecke tritt nicht auf. Ausser dem Dreiecke π, π, π giebt es weiter kein reducirtes Dreieck (Kern a, 2 pag. 203).

Haben wir ein *Dreieck zweiter Art*, d. h. ein Dreieck, für welches der grösste Exponent grösser als die Summe der beiden anderen ist, so gehören nur die Kreisbogen der zu dem grössten Exponenten zugehörigen Ecke einer einzigen Peripherie an, während die beiden anderen Ecken zusammenfallen und parabolischen Charakter tragen. Neben dem Dreieck $0, 0, \pi$ (Fig. 41 u. Fig. 55a) tritt noch das Dreieck $0, \pi, 2\pi$ (Fig. 55b) als reducirtes Dreieck auf (Kern a, 3 pag. 203).

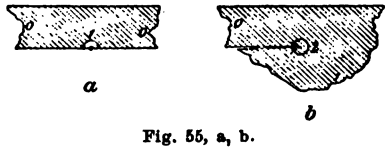


Fig. 55, a, b.

Natürlich lässt sich dem einzelnen Dreieck in beiden Fällen stets eine geradlinige Begrenzung geben.

b) *Sind nur zwei der Exponenten* λ, μ, ν *ganze Zahlen*, etwa λ und μ, so haben wir es im einzelnen Falle stets nur mit *einer Gesammtheit mit einander verwandter Bereiche* zu thun, die sich von dem reducirten Dreieck $0, 0, \nu_0\pi$ mit wohlbestimmtem Kern ableiten lassen, woselbst $0 < \nu_0 < 1$ sei (Fig. 56). Insgesammt wird man gemäss der Tabelle pag. 219 drei Grunddreiecke und zu ihnen 5 Aussendreiecke als von einander verschiedene reducirte Dreiecke finden; die bezüglichen Figuren derselben ergeben sich unmittelbar als Grenzfälle der Figuren 43 und 46—48 der Seiten 217 u. 219 (vgl. auch Fig. 36 u. 37). Es besitzen also die Ecken L und M des allgemeinen Dreiecks parabolischen Charakter. (Geradlinige Bereiche

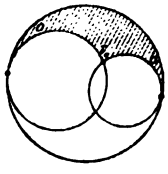


Fig. 56.

sind hier ausgeschlossen, da für dieselben eine der Bedingungen $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ gelten müsste, die auch für den dritten Exponenten eine ganze Zahl verlangen würde.) (Kern *b* pag. 203.)

c) *Ist nur einer der Exponenten eine ganze Zahl*, z. B. λ, so wollen wir von vornherein die beiden Fälle auseinander halten, *dass eine der Bedingungen für die Möglichkeit geradliniger Begrenzung* ($\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$) *erfüllt wird oder nicht.*

1) Im *letzteren Falle* zeigt die nähere Betrachtung, dass die Gesammtheit aller verwandten Dreiecke sich von einem reducirten Dreiecke $0, \mu_0\pi, \nu_0\pi$ mit wohlbestimmtem Kern ableiten lässt, woselbst $0 < \mu_0 < 1$ und $0 < \nu_0 < 1$ sei (Fig. 57). Wir haben insgesammt 14 verschiedene reducirte Dreiecke gemäss der Tabelle pag. 219 zu unterscheiden, indem die Dreiecke π, $\pi - \mu_0\pi$, $\nu_0\pi$ und π, $\mu_0\pi$, $\pi - \nu_0\pi$ in letzterer doppelt auftreten. Alle diese Dreiecke ergeben sich wieder in einfachster Weise aus Fig. 57 als Grenzfälle der Figuren 43 und 46—48 der Seiten 217 und 219. Es tritt stets eine parabolische Ecke L auf.

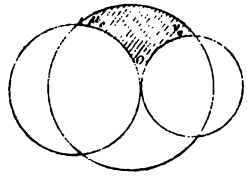


Fig. 57.

2) Dagegen in dem besonderen Falle, dass sich *geradlinige Begrenzung* einführen lässt, sondern sich die reducirten Dreiecke der Tabelle pag. 219 wieder in 2 Gruppen, die verschiedenen Kernen angehören und demnach zu verschiedenen Schaaren verwandter Dreiecke führen.

Die eine Gesammtheit verwandter Dreiecke leitet sich von dem Dreieck $0, \mu_0\pi, \nu_0\pi$ mit wohlbestimmtem Kern ab, woselbst $0 < \mu_0 < 1$, $0 < \nu_0 < 1$ und $\mu_0 + \nu_0 = 1$ sei. (Fig. 58). Diesem Grunddreieck gesellen sich nur vier reducirte Dreiecke zu, die sämmtlich den Charakter von Aussendreiecken haben.

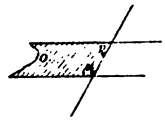
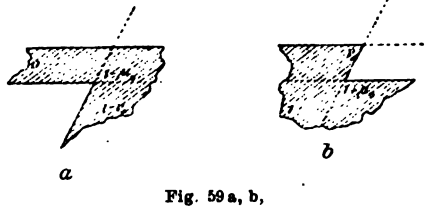


Fig. 58.



a *b*

Fig. 59a, b.

Ihre Winkel sind in Rücksicht auf die Beziehung $\mu_0 + \nu_0 = 1$ bezüglich gleich:

$$\begin{cases} 0, & \pi + \mu_0\pi, & \mu_0\pi, \\ 0, & \pi - \mu_0\pi, & 2\pi - \mu_0\pi \end{cases} \quad \text{(Fig. 59a)}$$

und:

$$\begin{cases} \pi, & 2\pi - \mu_0\pi, & \mu_0, \\ \pi, & \pi - \mu_0\pi, & \pi + \mu_0\pi \end{cases} \quad \text{(Fig. 59b)}.$$

Die Ecke L besitzt stets parabolischen Charakter (Kern c, 2, pag. 204).

Die zweite Gesammtheit verwandter Dreiecke baut sich auf dem Grunddreiecke π, $\pi - \mu_0 \pi$, $\nu_0 \pi$ mit unbestimmtem Kern auf, woselbst wieder $0 < \mu_0 < 1$, $0 < \nu_0 < 1$ und $\mu_0 + \nu_0 = 1$ ist (Fig. 60).

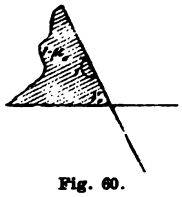


Fig. 60.

a b

Fig. 61a, b.

Ausserdem gehört hierher noch ein zweites Grunddreieck π, $\mu_0 \pi$, $\pi - \nu_0 \pi$ und ein Aussendreieck 2π, $\pi - \mu_0 \pi$, $\mu_0 \pi$ (Fig. 61a oder b). Die in der Ecke L zusammenstossenden Seiten fallen allemal in eine Peripherie zusammen (Kern c, 1, pag. 204).

Als Kriterium für das Auftreten des einen oder anderen Falles gilt gemäss unserer Sätze auf pag. 216: *Die Kreisbogen des Kernes c, 1 kommen zur Begrenzung des sphärischen Dreiecks in Anwendung, wenn*

$$\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$$

(für $\mu > \nu$) ist; andernfalls treten die Kreisbogen des Kernes c, 2 ein.

Geben wir schliesslich noch darauf acht, welche Ecken bei Einführung geradliniger Begrenzung der Dreiecke ins Unendliche fallen, so ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

Für die Dreiecke des Kernes c, 2 gilt:

Die Ecke L liegt stets im Unendlichen.

Ist $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$ (Bedingung A), so liegt nur die Ecke L im Unendlichen. (Es gilt dann auch stets $\mu + \nu - \lambda = 2n + 1$ (Bedingung B).)

Ist dagegen $\mu - \nu - \lambda = 2n + 1$ (resp. $\nu - \mu - \lambda = 2n + 1$) (Bedingung C), so liegt ausser der Ecke L noch die Ecke N (resp. M) im Unendlichen. (Es gilt dann wieder stets auch $\lambda + \mu - \nu = 2n + 1$ für $\mu > \nu$ resp. $\lambda + \nu - \mu = 2n + 1$ für $\nu > \mu$ (Bedingung B).)

Für die Dreiecke des Kernes c, 1 gilt:

Die Ecke L liegt stets im Endlichen.

Ist nun $\lambda - \mu - \nu = 2n + 1$ (Bedingung C), so müssen nach dem Satz pag. 216 die Ecken M und N des Dreiecks zusammenfallen, sie werden daher beide im Endlichen oder beide im Unendlichen liegen, je nachdem man den einen oder den anderen Schnittpunkt der beiden begrenzenden Kreisperipherieen in's Unendliche transformirt hat. (In diesem Falle ist auch $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$, d. h. die Bedingung A gültig.)

Ist dagegen $\lambda - \mu + \nu = 2n + 1$ für $\mu > \nu$ (Bedingung B), so liegt eine der Ecken M oder N im Unendlichen; es ist wiederum gleich, welche von beiden man ins Unendliche transformiren will.

§ 18.

Grenzfälle der Kreisbogendreiecke für unendlich grosse Exponenten.

Interessanter noch als die sphärischen Dreiecke für ganzzahlige Exponenten sind *jene Grenzfälle der Dreiecke, die zu unendlich grossen Exponenten gehören.*

Bekannt ist in diesem Sinne die Abbildung durch den Quotienten zweier linear unabhängiger Particularlösungen der allgemeinen *Bessel'schen Differentialgleichung*, die ja einen Grenzfall der gewöhnlichen Differentialgleichung der Riemann'schen P-Function darstellt. Wir wollen diese specielle s-Function weiterhin mit $B(s)$ bezeichnen; dieselbe lässt sich für unsere Zwecke am besten definiren, indem wir von dem Quotienten zweier zusammengehöriger allgemeiner *Kugelfunctionen* ausgehen, der eine s-Function für reelle λ, μ, ν mit zwei gleichen Exponenten darstellt. Lassen wir diese gleichen Exponenten ins Unendliche wachsen, so erhalten wir die zugehörige Function B. Hiernach ergiebt sich leicht das sphärische Dreieck, welches die Abbildung der Halbebene des Argumentes für die Function B darstellt. Wir gehen von einem sphärischen Dreieck der ersten Art aus, in dem zwei Winkel einander gleich sind (es sei etwa $\mu\pi = \nu\pi$), der dritte Winkel aber einen beliebig grossen Werth besitzt, und lassen die Kreisbogenseite MN sich nach dem Process I immerfort nach aussen um die Eckpunkte M und N drehen. Wir erhalten dann als Grenzfall ein sphärisches Dreieck, wie es beispielsweise für einen Werth von $\lambda < 2$ Fig. 62 darstellt. Die dritte Seite des Dreiecks ist natürlich jetzt verloren gegangen, dementsprechend haben wir uns in den Punkten M und N Windungspunkte beliebig hoher Ordnung zu denken. Die in L zusammenstossenden Kreisbogen können wir gern immer geradlinig wählen. (Uebrigens besitzt das Dreieck Fig. 62 stets eine Symmetrielinie, welche durch die Halbirungslinie des Winkels $\lambda\pi$ gegeben wird.) Aus der Theorie der Bessel'schen Function ist zugleich bekannt, dass in der Ebene des Argumentes die beiden singulären Punkte b und c zusammengefallen sind.*)

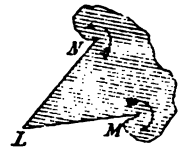


Fig. 62.

Wenn wir nun die in den vorangehenden Paragraphen gegebene geometrische Theorie der sphärischen Dreiecke überblicken, so sehen wir, dass keineswegs das Dreieck Fig. 62 das Einzige ist, zu dem

*) Alle diese Gedanken finden sich näher ausgeführt in Olbricht, Dissertation, Leipzig 1887; abgedruckt in den Acta Leopoldina Bd. 52.

wir für ∞ hohe Exponenten geführt werden. Indem unsere Aufgabe hier nicht darin besteht, die zugehörigen Functionen analytisch im Einzelnen näher zu studiren, begnügen wir uns, die betreffenden geometrischen Figuren zusammenzustellen und die zu ihnen gehörenden Abbildungsaufgaben, soweit es unmittelbar möglich ist, auf bekannte Fälle zurückzuführen. Wir theilen die Figuren ein, je nachdem in allen drei, in zwei oder in einer Ecke ein Windungspunkt unendlich hoher Ordnung liegt. Indem wir noch weiter singuläre Fälle, dass z. B. zwei Ecken des Dreiecks zusammenfallen oder zwei Kreisperipherieen der Begrenzung sich berühren oder sich decken, der Einfachheit halber bei Seite lassen, zumal sie keine geometrische Schwierigkeit weiter bieten, stellen wir die folgenden charakteristischen Figuren zusammen, in

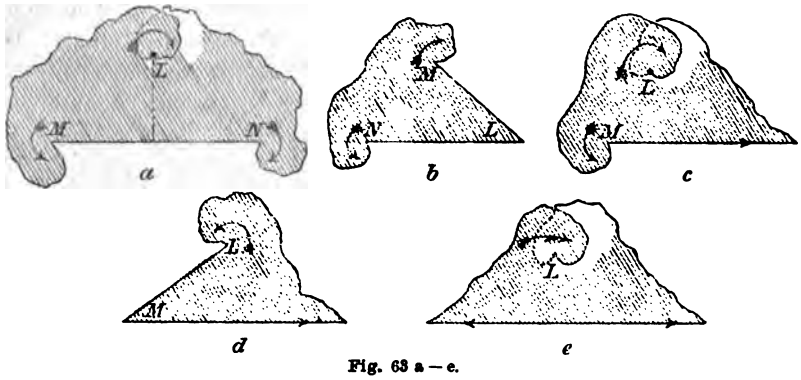


Fig. 63 a—e.

denen wir die Begrenzung sogleich geradlinig gewählt haben. Diese Figuren sind wohl an und für sich verständlich, ein unendlich hoher Windungspunkt oder eine unendliche Ueberschlagung einer Seite sind durch Pfeilspitzen angedeutet. In Fig. 63a sind alle drei Exponenten unendlich, in Fig. 63b, c sind nur zwei Exponenten, in Fig. 63d, e ist nur ein Exponent unendlich geworden. Insbesondere haben wir z. B. die Fig. 63a entstehen zu denken, indem wir in einem beliebigen Dreieck mit den Winkeln $\lambda_0\pi$, $\mu_0\pi$, $\nu_0\pi$ längs LM und LN ∞ viele Kugelkalotten lateral anhängen, sodass sich die Winkel der Dreiecke als limes $\lambda_0\pi + m\pi + n\pi$, $\mu_0\pi + m\pi$, $\nu_0\pi + n\pi$ für $m = \infty$ und $n = \infty$ ergeben; das Analoge gilt für die übrigen Figuren. *Das ist überhaupt das allgemeine Princip, welches den Figuren zu Grunde liegt, dass die geometrischen Processe der lateralen und polaren Anhängung von Kugelkalotten bei jedem vorliegenden sphärischen Dreieck sich auch in unendlicher Wiederholung anwenden lassen;* hierbei ist nur zu beachten, dass wenigstens eine der Dreiecksseiten erhalten bleiben muss, da andernfalls von einer Abbildung des Dreiecks auf die *Halbebene* nicht weiter die Rede sein kann.

In den Figuren 63a—e sind die nicht ∞ grossen Winkel kleiner

als π, die sich nicht unendlich oft überschlagenden Seiten kleiner als eine volle Peripherie gewählt worden; diese Figuren stellen demnach „zum Theil reducirte Dreiecke" vor. Es ist dementsprechend natürlich sehr wohl noch möglich, in Fig. 63a beliebige Kugelkalotten an MN lateral oder in L polar, ebenso in Fig. 63b (wie entspr. in Fig. 62) Kugelkalotten in M (oder in N) polar und an NL (resp. ML) lateral oder statt dessen gleichzeitig an ML und NL solche lateral, endlich in Fig. 63d Kugelkalotten an ML lateral anzuhängen.

Die Fälle der Figuren 63*c, d, e lassen sich nun sehr einfach analytisch erledigen.* Indem wir *das sphärische Dreieck Fig.* 63*e* an der sich ∞ oft überschlagenden Seite durch Spiegelung symmetrisch wiederholt denken, wobei die Ecke L die neue Ecke L' ergeben möge, führt uns dasselbe zu dem pag. 181 behandelten elementaren Bereiche und findet solcherweise von selbst seine Erledigung. Die Punkte a, b, c der Ebene des Argumentes s fallen für die Fig. 63e zusammen. *Das Dreieck Fig.* 63*d* liefert ferner mit seinem symmetrischen Dreiecke an der sich ∞ oft überschlagenden Seite zusammen den Bereich des Bessel'schen Quotienten B, wie wir ihn bereits in Fig. 62 uns nahe geführt haben; dementsprechend wird, wie die nähere Ueberlegung leicht zeigt, die Abbildung des sphärischen Dreiecks auf die Halbebene (abgesehen von bestimmten Constanten, die wir auch in den folgenden Fällen fortlassen wollen) durch die Function $B_{2\mu}$ geliefert, — mit dem unteren Index sei die Grösse des nicht ∞ gewordenen Exponenten angegeben, — wenn man in ihr das Argument s durch $s' = s^{\frac{1}{2}}$ ersetzt. Die Punkte a und c der Ebene des Argumentes fallen für die Fig. 63*d* zusammen. Analog werden wir auch die *zu dem sphärischen Dreieck der* Fig. 63c gehörige s-Function auf den Bessel'schen Quotienten B zurückführen können, indem wir gleichfalls jenes Dreieck symmetrisch wiederholt denken, wodurch die neue Ecke L' entsteht. Man übersieht dann zunächst, dass man die drei Punkte L, M, L' durch lineare Substitution stets in die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks transformiren kann. Demzufolge erhält man durch Hinzufügung des symmetrischen Dreiecks die Fig. 64, die als ein gleichseitiges Dreieck zu charakterisiren ist, in dem längs seiner drei Seiten je ∞ viele Kugelkalotten lateral angehängt sind. Verbindet man nun in Figur 64 den Mittelpunkt O des gleichseitigen Dreiecks mit den Ecken L, M, L', so zerfällt der ganze Bereich in drei congruente Bereiche, die wieder mit der Figur 62 sich gleichwerthig zeigen. Hieraus folgt, dass die Abbildung des sphärischen Dreiecks Fig. 63c auf die

Fig. 64.

Halbebene s durch die Function $s = B_{\frac{3}{2}}(z')$ (abgesehen von den Constanten) geliefert wird, woselbst $z^{\frac{3}{2}}$ für das Argument z' einzusetzen ist. *Durch letztere Function wird dann der Bereich der Fig. 64 auf die Vollebene s abgebildet*, ein gewiss interessantes Resultat. Die Punkte a, b, c der Ebene des Argumentes s fallen für Fig. 63c wieder zusammen.

Die Bereiche der Figuren 63a, b lassen sich allgemein nicht auf die Abbildung durch den Bessel'schen Quotienten zurückführen. Fig. 63b stellt nur dann den Bereich Fig. 62 einer Bessel'schen Function selbst dar, wenn die geradlinigen Seiten ML und NL gleich sind; Fig. 63a lässt sich in zwei Dreiecke der Fig. 62 zerlegen, wenn bei der speciellen stets zu erreichenden Lage der Fig. 63a, in der neben der geradlinigen Begrenzung die Ecken LMN ein gleichschenkliges Dreieck bestimmen, die gerade Verbindungslinie von L mit der Mitte von MN gleich $\frac{MN}{2}$ ist. In letzterem Falle wird, wieder von den Constanten abgesehen, die das Dreieck Fig. 63a auf die Halbebene s abbildende Function durch $s = B_{\frac{1}{2}}(s')$, wo $s' = s^2$ zu setzen ist, gegeben. Doch dürfte es besonders interessant sein, die abbildende Function im allgemeinen Falle der Figuren 63a, b zu studiren. Jedenfalls werden, wie in den betrachteten Specialfällen, für Fig. 63a die den drei Eckpunkten entsprechenden Punkte, für Fig. 63b die den Eckpunkten M und N entsprechenden Punkte in der Ebene des Argumentes s zusammenfallen.

§ 19.

Die Dreiecke für theils imaginäre, theils reelle Exponenten.

Gehen wir nun dazu über, die Fundamentaldreiecke für den Fall zu construiren, *dass einer, zwei oder alle drei Grössen λ, μ, ν imaginär (d. h. rein imaginär) sind, während die übrigen reelle Werthe haben.* In allen diesen Fällen werden wir gleichfalls mit Dreiecken, d. h. mit der Abbildung der positiven oder der negativen Hälfte der Ebene des Argumentes, ausreichen; jedoch geben die den imaginären Exponenten entsprechenden Ecken, wie wir von früher wissen, verloren.*)

Wie wir auf pag. 189ff. erkannten, ist *der Kern für drei imaginäre Grössen λ, μ, ν* dadurch ausgezeichnet, dass die inneren Axen der Substitutionen in einer Ebene liegen und ihre Schnittpunkte sämmtlich innerhalb oder sämmtlich ausserhalb der Kugel gelegen sind. Es ergiebt

*) Schwarz, 1873, Ges. Abh. II, pag. 233.

sich unmittelbar, dass, rein morphologisch betrachtet, drei Lagen dieser Axen in ihrer Ebene möglich sind, wie sie die nachfolgenden Figuren

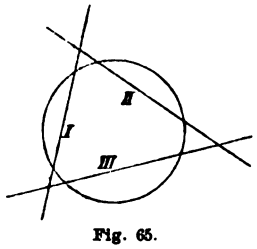
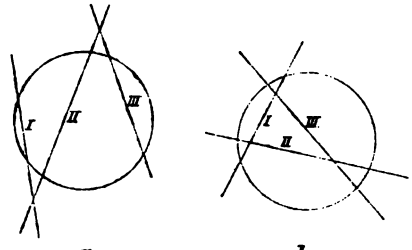


Fig. 65.



a *b*

Fig. 66 a, b.

wiedergeben. In der ersten wird durch die Verbindungsebenen je zweier der äusseren Axen die Kugel in drei Kalotten und einen dreifach zusammenhängenden Bereich zerlegt, im zweiten Falle dagegen in zwei Ringgebiete und zwei Kalotten, im dritten endlich schneiden die genannten Ebenen die reelle Kugel überhaupt nicht. Es stellt sich heraus, dass unter den beiden Lösungen der Construction des Kernes für gegebene imaginäre Exponenten λ, μ, ν allemal eine den Typus der Fig. 65 besitzt, die andere dagegen den Typus der Fig. 66a oder 66b. (Die letzten beiden Figuren unterscheiden sich algebraisch darin, dass für $L < M < N < 1$*) im Falle Fig. 66a $MN > L$, im Falle Fig. 66b $MN < L$ ist.) Für uns kommt hier nur der Kern der Fig. 65 in Betracht, indem die Kerne der Fig. 66a, b zu Fundamentalbereichen gehören, für welche die Summe der reellen (ganzzahligen) Theile der zugehörigen Grössen λ, μ, ν eine ungerade Zahl darstellt, daher niemals gleich 0 sein kann.

Denken wir uns die conjugirten Polaren der Geraden *I, II, III* für Fig. 65 construirt, so werden ihre Verbindungsebenen wie gesagt einen dreifach zusammenhängenden Bereich auf der Kugel ausschneiden. Aus demselben werden wir sehr leicht uns ein einfach zusammenhängendes Flächenstück bilden, indem wir das schraffirte Gebiet zwischen den drei Kreisen nicht auf der anderen Seite der Kugel wieder zusammenhängen, sondern zwischen je zweien der drei Kreise in ein unendliches Band auslaufen lassen, das sich immerfort um die Kugel herumwindet. *Dieses Flächenstück, das von drei sich unendlich oft überschlagenden Kreisbogen begrenzt wird, ist unser gesuchtes Dreieck* (Fig. 67). Wir können dasselbe ansehen als ein Dreieck (oder als ein Dreiseit, wenn wir lieber wollen) mit drei rein imaginären (nicht-Euklidischen) Winkeln $i\lambda''\pi$, $i\mu''\pi$,

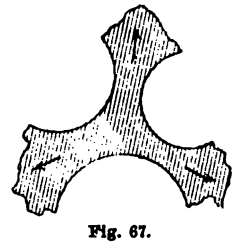


Fig. 67.

*) Vgl. pag. 203 dieser Arbeit.

$i\nu''\varkappa$, indem die Ebenen der Kreise gerade unter den genannten Winkeln gegen einander geneigt sind. Die Figur 68 giebt unser Dreieck um einen Umlauf in der Richtung des einen Kreisbandes vermehrt: es sei ausdrücklich bemerkt, dass jedes Kreisinnere der Figur 67 durch das gegenüberliegende Kreisband unendlich oft überdeckt wird. Wir sehen die Analogie dieses Falles mit den Betrachtungen der Zweiecke auf pag. 178 ff., an denen wir die Eigenschaft der Fundamentalbereiche, in ein unendliches Kreisband auszulaufen, genau studirt haben. Gemäss unserer Construction des Kernes pag. 202 ff. sind wir sicher: *Wir erhalten für ein beliebiges Werthetripel $i\lambda''$, $i\mu''$, $i\nu''$ stets einen und nur einen hierher gehörenden Kern und also auch nur ein zugehöriges Dreieck mit drei imaginären Winkeln.* Dem letzteren liegt jedoch, wie leicht zu sehen, allemal ein „symmetrisches" Dreieck gegenüber. Zugleich ist ersichtlich, dass wir dem pag. 168 über das gewöhnliche sphärische Dreieck ausgesprochenen Satze, der sich auf die bezüglich der drei Seiten symmetrischen Dreiecke bezieht und die geometrische Veranschaulichung der Formel $ABΓ = 1$ darstellt, auch auf Dreiecke mit rein imaginären Winkeln übertragen können. Wir fügen noch den Satz hinzu: *Die mit unserem Dreieck mit drei rein imaginären Winkeln verwandten Fundamentalbereiche, deren Exponenten in ihren reellen Theilen nothwendig ganze Zahlen mit einer geraden Summe darstellen, gehören zu loxodromischen Fundamentalsubstitutionen;* dieselben sind daher an dieser Stelle zu übergehen.

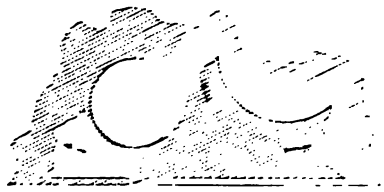


Fig. 68.

Ebenso einfach, wie der vorige Fall, erledigen sich *die Fälle, in denen einer der Exponenten λ, μ, ν reell, die beiden anderen imaginär oder aber zwei reell und der dritte imaginär sind.* Die Fälle, dass überdies die reellen Exponenten ganzzahlige Werthe haben, werden wir am Schlusse dieses Paragraphen besonders behandeln; sie bleiben also hier vorläufig ausgeschlossen. Die Construction des Kernes führt uns zu den Geradengebilden *I*, *II*, *III*, die wir auf pag. 192 betrachtet haben, und zwar sind beide Lösungen der Construction für jeden Fall von derselben Art, unterscheiden sich jedoch wieder in oft erwähnter Weise darin, dass für die zugehörigen Fundamentalbereiche die Exponenten um ganze Zahlen differiren, deren Summe ungerade ist. Die Polarkerne wurden in diesen Fällen durch die ebenen Figuren 24, 25 gegeben.

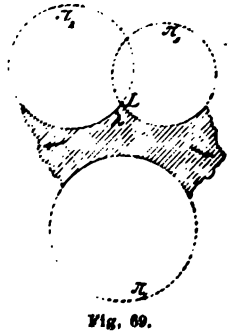


Fig. 69.

I. *Ist z. B. λ reell (und positiv), aber μ und ν rein imaginär*, so kommt die Figur 69 in Anwendung. Wir denken uns wieder λ auf den kleinsten positiven Rest λ_0 modulo 2 reducirt und suchen zunächst das sphärische Dreieck für die reducirten Exponenten λ_0, $i\mu''$, $i\nu''$ zu construiren. Dieses wird sofort durch die Ebenen, die man durch die Gerade I und die conjugirten Polaren von II und III legen kann, auf der Kugel ausgeschnitten. Wir erhalten, wie leicht zu übersehen ist, *einen Bereich, der von zwei sich schneidenden Kreisen und einem ausserhalb beider verlaufenden Kreise begrenzt wird*, d. h. ein Dreieck mit den Winkeln $\lambda_0\pi$, $\mu''\pi i$, $\nu''\pi i$, welches an Stelle der Ecken B und C in zwei unendliche Kreisbänder auslaufend zu denken ist. In diesem Dreieck haben wir dann nur noch $\frac{\lambda - \lambda_0}{2}$ Kalotten, deren Begrenzung die Kreisperipherie π_1 bildet, längs eines Verzweigungsschnittes vom Punkte L nach einem beliebigen Punkte der Gegenseite polar anzuhängen, um zum allgemeinen Bereiche mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu''\pi i$, $\nu''\pi i$ aufzusteigen, wie wir nicht weiter auszuführen brauchen.

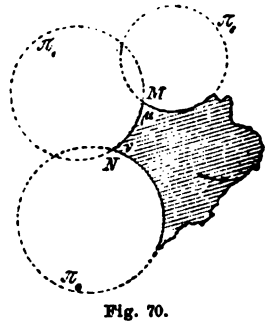


Fig. 70.

II. In derselben Weise tritt Fig. 70 für *den Fall eines imaginären λ, aber reeller (und positiver) μ und ν* in ihr Recht. Es sei $\mu' \geq \nu'$ vorausgesetzt; wir führen dann die folgende arithmetische Reduction aus: Zunächst subtrahiren wir von beiden Grössen μ' und ν' die grösste ganze in ν' enthaltene Zahl und darauf von dem Rest des μ' noch so oft als möglich die Zahl 2. Es mögen die reducirten Werthe $i\lambda''$, μ_0', ν_0' bleiben. Das zu ihnen gehörige Dreieck wird von den Ebenen durch die Geraden II, III und die conjugirte Polare von I auf der Kugel ausgeschnitten, wie Fig. 70 zeigt; dasselbe stellt ein von zwei auseinander liegenden und einem beide schneidenden Kreise begrenztes Dreieck mit den Winkeln $i\lambda''\pi$, $\mu_0'\pi$, $\nu_0'\pi$ dar, dessen eine Ecke L verloren gegangen und dementsprechend durch ein unendliches Kreisband ersetzt ist. Von dem reducirten Dreieck steigen wir durch polare Anhängung von Kugelkalotten längs eines Verzweigungsschnittes von M nach einem beliebigen Punkte der Gegenseite, sowie durch laterale Anhängung von Kugelkalotten längs der Seite MN in bekannter Weise zum allgemeinen Dreieck mit den Winkeln $i\lambda''\pi$, $\mu'\pi$, $\nu'\pi$ auf.

In wie weit in den beiden Fällen I und II von Ueberschlagungen der Seiten die Rede sein kann, ist dem Gesagten gemäss von selbst einleuchtend. Die Zahl der angehängten Kreisscheiben (Kugelkalotten) kann man an dem fertigen Bereiche sofort aus der Zahl der Ueberdeckungen des Zweiecks mit dem Winkel $\lambda_0'\pi$ der Fig. 69 oder der

beiden Zweiecke mit den Winkeln $\mu_0'\pi$ und $\nu_0'\pi$ der Fig. 70 ablesen. Zugleich ist klar, wie die Theorie der „verwandten" Bereiche in diesen Fällen sich gestaltet. Auch hier werden allemal, wenn man sämmtliche Verwandte aufzählen will, Fundamentalbereiche für complexe Exponenten hinzukommen, wenn nämlich im ersten Falle die Exponenten μ und ν, im zweiten Falle der Exponent λ um ganze Zahlen vermehrt sind; wir lassen solche Bereiche natürlich hier wieder bei Seite. *Soweit in der Schaar der verwandten Bereiche letztere nicht zu complexen Exponenten gehören, ergeben sich dieselben ohne Schwierigkeit aus dem Vorstehenden.* Ein Blick auf die Tabelle pag. 219, die ganz allgemein auch für complexe Werthe der Exponenten λ, μ, ν gilt, belehrt uns, dass im Falle I zwei reducirte Dreiecke, dagegen im Falle II sechs reducirte Dreiecke möglich sind, die nicht zu complexen Exponenten gehören. Auf jedem derselben baut sich in der angegebenen Weise direct die Gesammtheit der zugehörigen verwandten Dreiecke auf. Die nebenstehenden Figuren, die wir statt

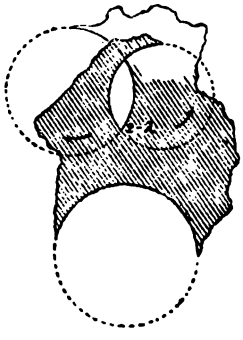
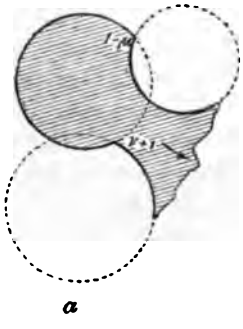
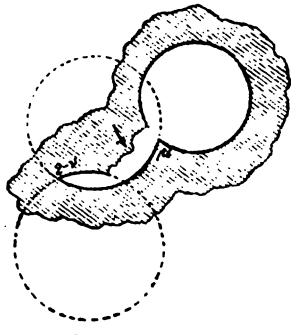


Fig. 71.



a



b

Fig. 72 a, b.

weiterer, die Anschauung doch nicht ersetzender Sätze geben, mögen die charakteristischen Formen dieser reducirten Dreiecke darstellen, die wieder in zwei resp. ein unendliches Kreisband auslaufend zu denken sind. Denselben liegt entsprechend derselbe Kern zu Grunde, wie den Figuren 69 und 70; die Winkelbezeichnungen in den Ecken (ohne den Factor π) geben ihre Beziehung zu diesen Figuren näher an.

§ 20.

Die Dreiecke für theils imaginäre, theils aber ganzzahlige oder unendlich grosse Exponenten.

Es bleibt noch die Bemerkung hinzuzufügen, welche sich *auf das Auftreten ganzzahliger Exponenten* beziehen sollte. Wir haben hier wieder die beiden auf pag. 232 ff. angegebenen Fälle neben einander zu betrachten.

I. *Es seien zwei Exponenten rein imaginär, der dritte Exponent aber ganzzahlig.* Dann treten die auf pag. 204 angegebenen Kerne $c, 1$ und $c, 2$ in ihr Recht, und wir haben demgemäss die nebenstehenden Figuren 73 und 74 für einen Kern $c, 1$ und Fig. 75 für einen Kern $c, 2$

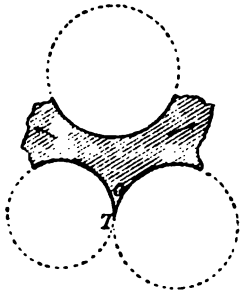


Fig. 73.

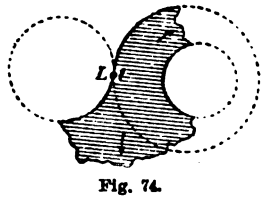


Fig. 74.

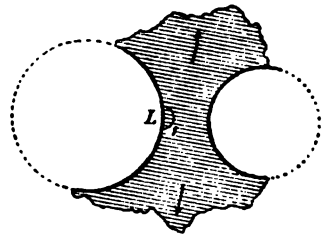


Fig. 75.

zu unterscheiden, woselbst allemal eines der reducirten Dreiecke durch Schraffirung hervorgehoben ist. Der charakteristische Unterschied derselben ist, dass die beiden Kreise der Ecke L in den Figuren 73 u. 74 sich berühren, in der Figur 75 dagegen zusammengefallen sind.

Nehmen wir sogleich Rücksicht auf die Gesammtheit aller verwandten Dreiecke, soweit sie nicht zu complexen Exponenten gehören, dann gilt für die Figuren 73—75 der einfache Satz:

1) *Ist λ eine ungerade ganze Zahl, und sind die imaginären Exponenten μ und ν einander entgegengesetzt gleich*, dann tritt stets die Kreisbegrenzung der Fig. 75 ein, d. h. die Kreisperipherieen der Ecke L fallen zusammen.

2) *Ist dagegen λ eine ungerade ganze Zahl, und sind die Exponenten μ und ν nicht entgegengesetzt gleich*, dann tritt die Kreisbegrenzung der Fig. 74 ein.

3) *Ist endlich λ eine gerade ganze Zahl*, so tritt allemal die Kreisbegrenzung der Fig. 73 ein.

Die letzten beiden Fälle haben das Gemeinsame, dass die Ecke L parabolischen Charakter besitzt.

II. *Wenn ein Exponent rein imaginär, die beiden anderen aber reell sind*, können ganzzahlige Exponenten insofern auftreten, als entweder die reellen Exponenten beide oder nur einer von ihnen ganzzahlig sind.

Im ersten Falle tritt der Kern b pag. 203 ein; die zugehörigen sphärischen Dreiecke zeigen nur in dem Sinne einen von den allgemeinen Figuren 70 und 72a, b verschiedenen Charakter, als die Kreisperipherieen in den beiden Ecken L und M sich berühren, d. h. *es werden stets zwei parabolische Ecken auftreten.*

Ist dagegen nur einer der beiden reellen Exponenten z. B. μ ganzzahlig, so kann der Kern $c, 1$ natürlich nicht in Frage kommen. Es ist daher allein eine zu dem Kern $c, 2$ gehörige Kreisbegrenzung möglich, wie sie aus Fig. 70 entsteht, wenn die Kreise der Ecke M sich berühren (Fig. 76). Die Theorie der verwandten Bereiche bietet dann weiter keine Besonderheit dar; es gilt allgemein, *dass die dem ganzzahligen Exponenten entsprechende Ecke parabolischen Charakter trägt.* —

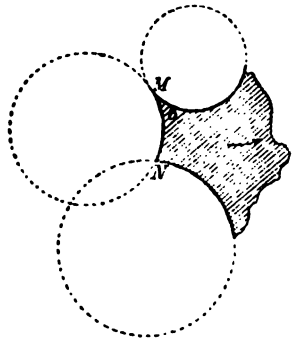


Fig. 76.

Endlich können auch hier bei den Dreiecken mit unendlichen Kreisbändern bestimmte *Grenzfälle für ∞ grosse Werthe der Exponenten* auftreten. Wir können uns dieselben in der zweifachen Weise entstehen denken, einmal, indem wir in bekannter Weise die Processe der lateralen oder polaren Anhängung der Kugelkalotten in unendlicher Wiederholung anwenden, dann jedoch auch, indem wir z. B. in Fig. 67 die hyperbolischen Kreise sich auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Wir begnügen uns wieder damit, die bezüglichen Figuren hinzustellen, die, soweit es geht, geradlinig begrenzt bezeichnet sind. Die Figuren 77 a, b sind aus Fig. 67, die Figuren 77 c, d aus Fig. 69, die Fig. 77 e aus Fig. 70 in leicht ersichtlicher Weise entstanden zu

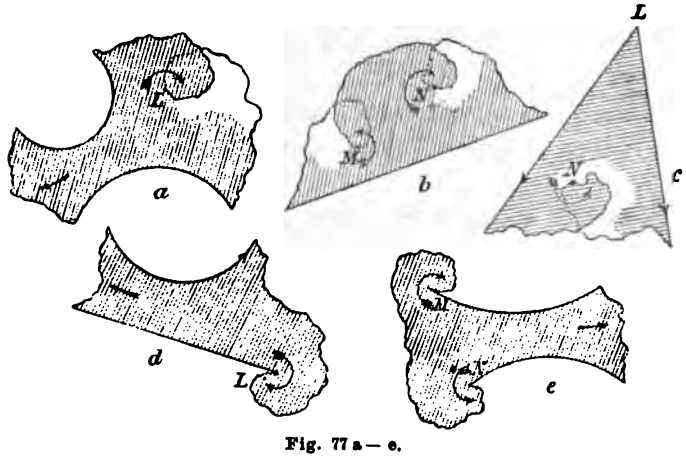


Fig. 77 a — e.

denken. Es sei bemerkt, dass das Dreieck 77 d an seiner geradlinigen Seite gespiegelt, einen speciellen Fall der Fig. 77 a liefert, an der Kreisperipherie dagegen gespiegelt, einen speciellen Fall der Fig. 77 e darstellt, u. s. w. Auch ist leicht zu übersehen, in welchen speciellen Fällen sich die Figuren 77 a — e auf die Abbildung durch Bessel'sche

Quotienten B zurückführen lassen. (Für die Figur 77b fallen nothwendig alle drei singulären Punkte a, b, c in der Ebene des Argumentes, für die übrigen Figuren nur zwei derselben zusammen.)

V. Theil.

Discussion der Fundamentalbereiche für complexe Exponenten.

§ 21.

Allgemeine Betrachtung dieser Bereiche.

Wir sind nunmehr vor die Frage gestellt, wie sich der Fundamentalbereich in dem allgemeinen Falle gestaltet, *in welchem einer oder mehrere der Exponenten λ, μ, ν complex sind.* Indem ich mir für eine spätere Arbeit vorbehalte, im einzelnen auf diese allgemeine Theorie einzugehen, insbesondere, was den Nachweis auf Grund rein geometrischer Betrachtungen betrifft, dass zu jedem beliebigen Werthetripel λ, μ, ν sich der zugehörige Fundamentalbereich in einfacher Gestalt construiren lässt, werde ich mich im folgenden darauf beschränken einige Gesichtspunkte hervorzuheben, die uns bei dem weiteren Eindringen in die Theorie zu leiten haben, und die sich aufdrängenden Fragen, die der näheren Untersuchung bedürfen, zu formuliren. Im letzten Theile dieser Arbeit wollen wir jedoch, um ein Beispiel der Untersuchung zu geben, die Construction der Fundamentalbereiche für den Fall vollständig durchführen, *dass die Geraden I, II, III des Kernes sich auf der Kugel schneiden.*

Wir werden uns vorerst zweckmässig auf die Darstellung der Fundamentalbereiche als von vier Kreisbogen begrenzter Flächenstücke beschränken (Fundamentalvierseite). Die Frage, ob überhaupt eine solche Darstellung für beliebige Werthe λ, μ, ν allemal möglich ist, lassen wir hier bei Seite. Der Beweis hierfür wird eben erst aus der speciellen geometrischen Theorie erwachsen können. Ein solches Kreisbogenviereck sei in einem einfachen Falle durch Fig. 78 gegeben. Je zwei der Seiten sind durch die loxodromischen Fundamentalsubstitutionen in bekannter Weise einander zuzuordnen; die Winkel des Vierecks in den Ecken a_1 und b_1 betragen dementsprechend $2\lambda'\pi$, $2\mu'\pi$, während die Summe der Winkel in den Ecken c_1 und c_2' in Uebereinstimmung mit der Beziehung $ABΓ = 1$ gleich $2\nu'\pi$ sein muss. Wir haben schon früher die Bedeutung dieser Bereiche, ein Abbild der zweckmässig eingeschnittenen Vollebene des Argumentes der s-Function zu geben, kennen gelernt und auch gesehen, wie dieselben als Verallgemeinerung

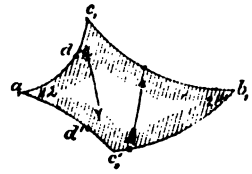


Fig. 78.

der Dreiecksflächen im Falle reeller λ, μ, ν zu gelten haben. Auch hatten wir die *Normalvierecke* als zur Untersuchung besonders geeignet hingestellt, d. h. diejenigen Vierecke, deren einander zugeordnete Kreisbogen sich (ev. in ihrer Verlängerung) im zweiten Fixpunkt der Fundamentalsubstitution schneiden.

Wir wollen nun zunächst einen bemerkenswerthen Satz aufstellen, dessen Uebertragung auf die zu einer grösseren Zahl singulärer Punkte gehörenden Fundamentalbereiche von selbst hervorleuchtet. Die Zuordnung je zweier Seiten unseres Vierecks, z. B. von a_1c_1 und a_1c_2' wird ausser durch die aufeinander bezogenen Eckpunkte erst durch ein drittes sich entsprechendes Punktepaar, etwa die Punkte d und d' festgelegt sein. Nun können wir offenbar die Punkte d und d' ganz beliebig auf den Seiten a_1c_1 und a_1c_2' wählen; das Gleiche gilt für die Zuordnung der Seiten b_1c_1 und b_1c_2'. Dies führt uns zu dem Satze: *Jedes uns* (als Flächenstück) *gegebene Kreisbogenviereck* — selbst ein solches, das als Normalviereck unbrauchbar sein kann, wie die nebenstehende Figur im Beispiel zeigen möge, — *stellt uns eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit verschiedener brauchbarer Fundamentalbereiche vor, die durch die verschieden mögliche Zuordnung jedes Seitenpaares sich unterscheiden.* Zugleich erkennen wir sofort, die zugehörigen Exponenten λ, μ, ν werden in allen Fällen in ihren reellen Theilen übereinstimmen. In Rücksicht auf unsere Sätze pag. 207 schliessen wir, dass die dort definirten Punkte a_2' und b_2' sich für diese Gesammtheit auf den betr. Kreisbogen der durch die Punkte b_1c_1 bezw. c_1a_2 gehenden elliptischen Schaar bewegen werden, während der Punkt c_2' festliegt, d. h. dass $DV(a_1b_1c_1c_2') = \text{const.}$ ist.

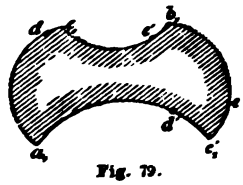


Fig. 79.

Eine wichtige Frage in der Theorie unserer Fundamentalbereiche für complexe λ, μ, ν ist vor allem wieder die, wie viel Continua dieselben bei fesgehaltenen Eckpunkten $a_1b_1c_1$, überhaupt bilden. Werden insbesondere vielleicht die verschiedenen Continua im Falle reeller λ, μ, ν durch das Gebiet der complexen λ, μ, ν hindurch mit einander zusammenhängen?

Die Methode, die einzuschlagen ist, um die Gesammtheit aller Fundamentalbereiche zu beherrschen, kann eine sehr verschiedene sein, sei es dass man durch continuirliche Processe, Variation der Begrenzung u. dgl., von den Vierecken für reelle $\lambda\mu\nu$ zu den allgemeineren Bereichen aufsteigt, sei es dass man direct für den einzelnen beliebig ausgewählten Kern die zugehörigen Fundamentalbereiche studirt, sei es schliesslich, dass man rein morphologisch vorgeht und zu den verschiedensten Lagen von 4 Kreisen die zugehörigen Vierecke aufsucht, die von Bogen derselben begrenzt werden. Da es eben wesentlich

darauf ankommt, die 6-fach unendliche Mannigfaltigkeit der überhaupt möglichen Fälle in ihrer Gesammtheit übersichtlich zu beherrschen, so scheint der letzte Weg besondere Vortheile zu bieten. Natürlich werden schliesslich auch die Fundamentalbereiche für den Fall, dass einer oder zwei der Exponenten ganzzahlig sind, während die übrigen Exponenten complexe Werthe haben, eine specielle Betrachtung erfordern, wie denn andererseits sich auch Grenzfälle der Fundamentalbereiche für ∞ hohe Exponenten ergeben werden.

§ 22.

Ueber die allgemeine Theorie der verwandten Bereiche.

Wir wollen nun noch einige Worte der *Theorie der verwandten Bereiche* widmen. Dieser Begriff sollte, wie wir bereits pag. 172 angaben, *alle diejenigen Bereiche umfassen, die allgemein gesprochen zu demselben Kern gehören.* Zunächst erkennen wir, dass wir die Definition der reducirten Bereiche, die wir pag. 217 im Dreiecksfalle gaben, auch auf complexe λ, μ, ν übertragen können, sofern wir nur alles das, was dort von den reellen Exponenten gesagt ist, jetzt auf die reellen Theile der Exponenten λ, μ, ν beziehen. Wir wollen übrigens der Einfachheit halber stets annehmen, dass die reellen Theile der Grössen λ, μ, ν positiv seien, was die Allgemeinheit nicht beschränkt. *Unter einem reducirten Viereck haben wir dementsprechend allgemein einen solchen Bereich zu verstehen, dessen zugehörige Exponenten λ_0, μ_0, ν_0 in ihren reellen Theilen einzeln nicht grösser als 2, noch zu zweien grösser als 1 sind.* In diesen Vierecken werden daher die Winkel an den einfachen Ecken, wie die Summen der Winkel an den verdoppelten Ecken nicht grösser als 4π und zu zweien nicht grösser als 2π sein. (Der Umstand, dass nur die reellen Theile der Exponenten λ, μ, ν reducirt werden, entspricht durchaus der einfachen Beziehung, dass man bei einer elliptischen Substitution, die ja eine Drehung der Kugel durch einen bestimmten Winkel darstellt, ohne Aenderung des Resultates der Transformation beliebig viele volle Umdrehungen hinzunehmen kann, die hyperbolischen Substitutionen dagegen stets in sich eindeutig bestimmt sind.) Der zu einer beliebigen Auswahl λ, μ, ν gehörende *reducirte Fundamentalbereich* λ_0, μ_0, ν_0 wird insbesondere wiederum *eindeutig oder dreideutig* sein, je nachdem die Summe der ganzen in den reellen Theilen enthaltenen Zahlen gerade oder ungerade ist.

Die folgenden Figuren (s. pag. 240), die einige besonders interessante Formen reducirter Normalvierecke darstellen, mögen dazu dienen, einen ersten Einblick in die überaus grosse Mannigfaltigkeit der möglichen Gestaltungen zu geben. In diesen Figuren sind jedesmal die Kreisbogen $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$, sowie $b_1 c_2'$ und $b_1 c_1$ einander punktweise zugeordnet zu denken.

Wir werden ferner auch die weiteren Beziehungen des Dreiecksfalles auf unsere Vierecke übertragen können. Insbesondere werden wir von einem *Aussenviereck* zu einem *Grundviereck* gelangen können, und zwar

Fig. 50 a, b, c.

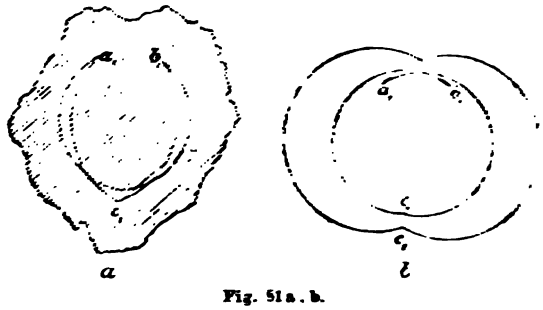


Fig. 51 a, b.

werden wir oft gleichsam in einer Figur eines der Aussenvierecke mit seinem Grundviereck zusammen erhalten, indem das eine von dem Inneren, das andere von dem Aeusseren des Linienzuges der 4 Kreisbogen dargestellt wird, wie in Fig. 78. Wir erkennen zugleich, von den 3 zu einem Grundviereck gehörenden Aussenvierecken wird gerade dasjenige zu bevorzugen sein, dessen Winkelsumme an den verdoppelten Ecken grösser, als jeder der Winkel an den beiden anderen Ecken ist. Wir wollen aber bedenken, dass man ja auch eine andere Verdoppelung der Ecken auswählen kann, d. h. dass man vielleicht statt c_2' auch den Punkt a_2' oder b_2' als vierte Ecke des Fundamentalbereiches hinzunehmen kann.*) Solcherweise erhält man, allgemein gesprochen, 3 verschiedene äquivalente Formen des Grundvierecks, zu deren jeder eines der 3 Aussenvierecke in der angegebenen Weise gehört. Doch müssen wir ausdrücklich betonen, dass diese Beziehungen nur im Allgemeinen gelten; einfache Beispiele zeigen, dass einmal nicht immer alle drei Formen des Grundvierecks (wenigstens als Normalvierecke) möglich sind**) und

*) Vgl. pag. 208.

**) indem negative Flächenstücke des Bereiches hier einstweilen von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben, vgl. pag. 182 dieser Arbeit.

andererseits auch die Aussenvierecke keineswegs stets die angegebene einfache Lage zum Grundviereck zu haben brauchen. So stehen z. B. die Figuren 81b und 81a zu einander in dem Verhältniss des Aussenvierecks zu seinem Grundviereck, den Exponenten $1-\lambda$, $1-\mu$, $2-\nu$ und λ, μ, ν entsprechend.

Doch gehen wir noch einen kleinen Schritt weiter; wir können unmittelbar auch die Tabelle pag. 219 auf den Fall complexer λ, μ, ν übertragen, indem wir unter den genannten Werthetripeln allemal die complexen Exponenten verstehen, die zu der bestimmten Auswahl der 3 Ecken $a_1 b_1 c_1$ unter den Fixpunkten der Substitution gehören. Nun ist es leicht, die Theorie der verwandten Bereiche näher zu charakterisiren. *Unsere Aufgabe, die Fundamentalbereiche für complexe λ, μ, ν zu zeichnen, wird sich nämlich in die 2 Schritte zerlegen lassen, dass wir zunächst es unternehmen, die Gesammtheit der reducirten Bereiche zu überblicken, und dann von ihnen aus zu den allgemeinen Bereichen aufsteigen.* Auf jedem einzelnen reducirten Bereiche wird sich, genau wie im Dreiecksfalle, eine unendliche (abzählbare) Mannigfaltigkeit „verwandter Bereiche" aufbauen lassen. Die Gesammtheit aller mit dem vorliegenden reducirten Bereiche verwandten Bereiche wird indess erst erschöpft, wenn man noch die übrigen reducirten Bereiche, die zu jeder sonst noch möglichen Auswahl der drei Eckpunkte unter den Fixpunkten des Kernes gehören, sammt den auf ihnen sich aufbauenden allgemeinen Bereichen hinzufügt.

Wir wollen doch anknüpfend an die einfache Figur 78 *die geometrischen Processe in ihren Grundgedanken uns klar machen, die bei der Bildung der verwandten Bereiche aus dem reducirten Bereich anzuwenden sind.* Dieselben werden in der Anhängung von Kugelkalotten, resp. Vollkugeln bestehen, in genau entsprechender Weise, wie wir es im Falle der Dreiecke kennen lernten. Im Einzelnen kommen folgende Schritte in Anwendung:

1) Die (polare) Anhängung einer Vollkugel längs eines durchaus auf der Fläche verlaufenden Verzweigungsschnittes von c_1 nach c_2'.

2) Die (polare) Anhängung je einer Kugelkalotte längs eines Verzweigungsschnittes von a_1 nach einem Punkte der Seite $b_1 c_1$ resp. $b_1 c_2'$; die Kalotten werden begrenzt von den Peripherieen der zu den letztgenannten Seiten gehörenden Kreise. Analog haben wir die (polare) Anhängung im Punkte b_1.

3) Die (laterale) Anhängung je einer Kugelkalotte an die Seiten $a_1 c_2'$ und $a_1 c_1$ (oder an die Seiten $b_1 c_2'$ und $b_1 c_1$). Dieser Process lässt sich in jedem Falle ersetzen durch Anhängung einer Vollkugel nur an einer der genannten Seiten und ist im Uebrigen mit dem Hinausdrehen der Seiten um den Winkel π resp. 2π in dem früher gegebenen Sinne identisch.

4) Die (laterale) Anhängung einer Vollkugel längs eines Verzweigungsschnittes von a_1 nach b_1.

Wir haben hier die Bezeichnungen „lateral" und „polar" in derselben Bedeutung gebraucht, wie sie in dem analogen Process bei den Dreiecken angewandt sind; sie unterscheiden sich wesentlich darin, dass im ersten Falle *zwei* Exponenten um je 1, im zweiten *ein* Exponent um 2 vermehrt wird. In dem Beispiel unserer Figur 78 begegnet keiner der genannten geometrischen Processe einer Schwierigkeit. Im Uebrigen sind für die Möglichkeit der Anwendung der einzelnen Processe folgende Bedingungen hinreichend und nothwendig: Der Process 1 und 4 ist stets dann und nur dann anwendbar, wenn der genannte Verzweigungsschnitt so gezogen werden kann, dass er auf die einfache Kugel übertragen sich nicht selbst überkreuzt; der Process 2 dagegen, wenn die betr. Verzweigungsschnitte ebenfalls die soeben genannte Bedingung erfüllen und überdies die Kreisperipherieen der Seiten b_1c_1 und b_1c_2' (resp. a_1c_1 und a_1c_2') nicht durchkreuzen. Wie insbesondere die Processe 1—4 zusammen vorkommen werden, wollen wir hier nicht weiter erörtern; jedoch sei auf das durchgeführte Beispiel der geradlinig begrenzten Vierecke pag. 245 ff. hingewiesen.

Schon aus dem Process 3 folgt, dass keineswegs die Kreisbogenvierecke für ein complexes Werthetripel λ, μ, ν immer eindeutig bestimmt sind, vielmehr werden mehrere äquivalente Bereiche auftreten können, die indessen durch sogenannte erlaubte Abänderung in einander überzuführen sind. (Besonders interessant und für Fälle einer höheren Zahl singulärer Punkte von Wichtigkeit ist ferner die Bemerkung, dass in manchen Fällen eines Dreiecks man in einem der Eckpunkte keine Kalotte polar anhängen kann, die von dem Kreis der Gegenseite begrenzt wird, wohl aber bei der Spiegelung des Dreiecks an dieser Seite eine Vollkugel längs eines Verzweigungsschnittes, der

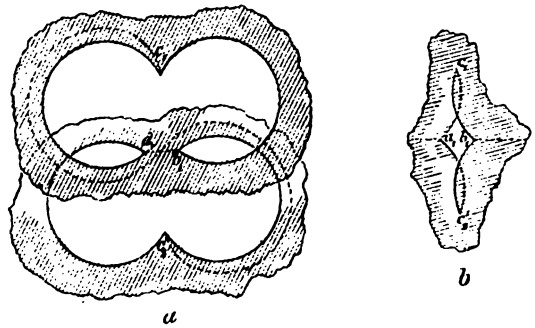


Fig. 82 a, b.

die beiden entsprechenden Ecken verbindet, wie das Beispiel der symmetrischen Figur 82a zeigt, in der dieser Verzweigungsschnitt

von der Ecke c_1 zur Ecke c_2' laufend angedeutet ist. Jedoch können wir für diesen Fall, wie aus der Dreieckstheorie folgt, in anderer Weise zu einem äquivalenten erweiterten Bereiche aufsteigen, ohne vorherige Spiegelung des Dreiecks. Derselbe wird durch Fig. 82 b gegeben.)

§ 23.

Ueber die Fundamentalvierecke mit unendlichen Kreisbändern.

Sei es nunmehr gestattet, noch einmal auf diejenige Darstellung der Fundamentalbereiche zurückzugreifen, die gleichfalls von 4 Kreisbogen begrenzt werden, jedoch in ein oder mehrere unendliche Kreisbänder mit verloren gegangenen Ecken auslaufen, wie wir es auf pag. 182 angedeutet haben. Wir wollen uns auch hier auf kurze Angaben beschränken, die immerhin einen Einblick nach dieser Richtung hin geben. Ganz allgemein kommen typische Formen der Fundamentalbereiche in Betracht, wie sie in den nachfolgenden Figuren ausgeführt sind; in

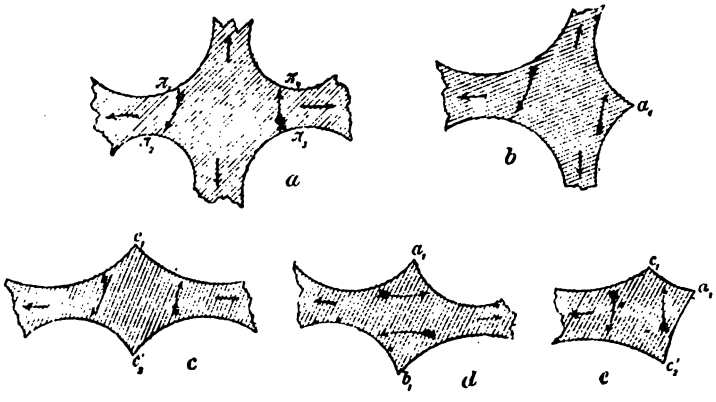


Fig. 83 a, b, c, d, e.

denselben ist die Zuordnung der Seiten durch befiederte Pfeile in bekannter Weise angedeutet. Specielle Beispiele zu ihnen allen können wir den auf pag. 230 ff. behandelten Fällen für einen oder mehrere imaginäre, sonst aber reelle Exponenten entnehmen, wenn wir die dort gegebenen Figuren an einem der begrenzenden Kreisbogen gespiegelt denken. Wir werden auch hier, wie leicht ersichtlich, *„Normalvierecke"* unter den allgemeineren Formen auszeichnen; dieselben sind dadurch zu definiren, dass die einander zugeordneten, sich nicht schneidenden Kreisbogen dem hyperbolischen Kreisbüschel, die sich schneidenden dem elliptischen Kreisbüschel der betr. Substitutionsfixpunkte angehören. Auch auf die Fundamentalbereiche Fig. 83 a — e wenden wir nun unser Princip an, die Zuordnung jedes Seitenpaares auf mannigfach verschiedene Weise zu treffen. So werden wir beispiels-

weise in Fig. 83a 3 willkürlich ausgewählte Punkte der Peripherie π_1 3 beliebigen Punkten der Peripherie π_2 zuordnen können; analog in allen übrigen Fällen. Nur die Beschränkung müssen wir uns dabei vor Augen halten, dass je 2 ausgewählte Punkte der einen Seite stets dieselbe Zahl voller Peripherieen von einander entfernt sein müssen, wie die ihnen entsprechenden Punkte der zugeordneten Seite. Ueberdies müssen die 3 Punkte der Peripherie π_1 (Fig. 83a) gerade im umgekehrten Sinne aufeinander folgen, wie die entsprechenden Punkte der Peripherie π_2. Denn anderenfalls werden die Fixpunkte der die Zuordnung vermittelnden Substitution ausserhalb des Kreisinneren von π_1 und π_2 fallen*) und, wenn man den Bereich nach den Anschauungen der Analysis situs zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit zusammenbiegen würde, würde dieselbe eine Doppelfläche darstellen, was hier auszuschliessen ist. Alle diese Verhältnisse finden ganz analog auch im einfachen Falle *zweier* singulären Punkte statt; an Fig. 14 (pag. 178) anknüpfend kann man sich dieselben leicht klar machen. Wir würden bei der „Doppelflächenzuordnung" der Begrenzungen dieser Figur den Bereich gewissermassen als ein ∞ breites Möbius'sches Blatt ansehen können.**)

Werden insbesondere die durch verschiedene Zuordnung der begrenzenden Kreisbogen sich ergebenden Fundamentalbereiche functionentheoretisch sämmtlich von einander verschieden sein? Wir wollen diese Frage hier nicht weiter untersuchen; jedenfalls erschöpft die 6-fach unendliche Mannigfaltigkeit aller Figuren von demselben morphologischen Charakter, die sich bei beliebiger zulässiger Zuordnung der Kanten ergeben, keineswegs die Gesammtheit der überhaupt möglichen Fundamentalbereiche für beliebige λ, μ, ν, da gewiss schon reelle λ, μ, ν ausgeschlossen sind. Jedoch scheinen die Darstellungen des Fundamentalbereichs in den neuen Formen in mancher Hinsicht besonders zweckmässig zu sein. Es sei übrigens bemerkt, dass wir im Falle loxodromischer Zusammenordnung zweier Kanten nach dem Princip der erlaubten Abänderung stets mit leichter Mühe durch Anwendung des umgekehrten Processes der pag. 182 das unendliche Kreisband in eine loxodromische Ecke der gewöhnlichen Form verwandeln können.

Wir wollen nur noch ein Wort über die Methode, wie die Theorie der verwandten Bereiche sich in den neuen Formen darstellt, hinzufügen. Einmal können wir, beispielsweise in Fig. 83a, bei einer bestimmt angenommenen Zuordnung der Seitenpaare jetzt die 3 zur Zuordnung benutzten Punkte der einen Begrenzung, z. B. der Seite π_1, durch 3 andere Punkte derselben Seite ersetzen, die um eine

*) während sie im anderen Falle sich auf die letzteren vertheilen.

**) Zur leichteren Anschauung denke man sich die ebene Figur 14 stereographisch auf die Kugel übertragen.

volle jeweils in demselben Sinne gerechnete Peripherie von den bisherigen abstehen. Durch diesen Process werden wir, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, 2 der Exponenten λ, μ, ν gerade um die Einheit vermehren. (Insbesondere erhalten wir auf diese Weise verwandte Bereiche zu den Fundamentalbereichen für imaginäre λ, μ, ν.) Ferner sei auf die folgenden Figuren hingewiesen, welche mit der Fig. 83 d

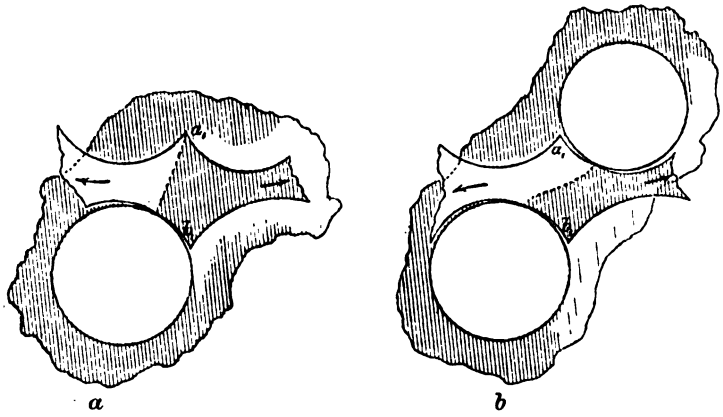


Fig. 84 a, b.

verwandte Bereiche darstellen; das angewandte geometrische Verfahren ist von selbst aus den Figuren einleuchtend.

Wir sehen, eine ungeahnte Fülle der mannigfaltigsten Gestalten unserer Fundamentalbereiche tritt uns entgegen. Es gilt das sich bietende Material zu sichten, die einzelnen Formen exact und übersichtlich zu behandeln, um so schliesslich das Ziel der ganzen Untersuchung zu erreichen, die Fundamentalbereiche im allgemeinen Falle complexer λ, μ, ν völlig zu beherrschen.

VI. Theil.

Die Fundamentalbereiche für complexe Exponenten unter der Bedingung $\pm\lambda \pm\mu \pm\nu = 2n + 1$.

§ 24.

Construction der reducirten Bereiche.

Um ein bestimmtes Beispiel der Construction der Fundamentalbereiche für complexe Exponenten jedenfalls bis zu Ende durchzuführen und an ihm eine gewiss allgemein nützliche Methode zu zeigen, wollen wir den Fall auswählen, *dass die* 3 *Axen I, II, III des Kernes sich auf der Kugel in einem Punkte schneiden.* Wir wissen bereits, derselbe umfasst diejenigen Fundamentalbereiche, deren zugehörige Exponenten die Bedingung $\pm\lambda \pm\mu \pm\nu = 2n + 1$ erfüllen. Wie uns ferner aus dem ersten Theile bekannt, beruht die ausgezeichnete Stellung dieses

Falles für die Theorie der s-Function darin, dass eine zweckmässig ausgewählte Particularlösung ihrer Differentialgleichung 3. Ordnung sich durch ein einfaches unbestimmtes Integral darstellen lässt. Aus unserer geometrischen Untersuchung wird insbesondere hervorgehen, dass wir die zugehörigen Fundamentalbereiche stets als *Normalvierecke* wählen können, die wir dann durch Verlegung des Schnittpunktes der Axen *I*, *II*, *III* in's Unendliche gern *geradlinig begrenzen* können. Dem Falle, dass *einer* der Exponenten reell ganzzahlig ist, werden wir am Schlusse eine Specialbetrachtung widmen. (Zwei Exponenten können nicht ganzzahlig sein, ohne dass gemäss der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ auch der dritte Exponent ganzzahlig ist, wodurch wir auf die früheren Dreiecksconstructionen zurückkommen.)

Unsere Aufgabe werden wir uns in die zwei Schritte zerlegen, zunächst alle reducirten Bereiche zu construiren und dann von ihnen aus durch die geometrischen Processe der Anhängung von Kugelkalotten und Vollkugeln zu der Gesammtheit der verwandten Bereiche aufzusteigen. Die Methode, deren wir uns bedienen, wird darin bestehen, alle morphologisch möglichen Gestaltungsformen aufzusuchen und direct durch Figuren anschaulich darzustellen. Wir legen den allgemeinen Satz zu Grunde: *Wenn in einem bestimmten Beispiel unserer Figuren geometrische Operationen möglich sind, so sind sie auch in allen den Figuren möglich, die morphologisch von diesem Beispiel nicht verschieden sind.* Hierbei betrachten wir solche Fundamentalbereiche als morphologisch gleichwerthig, die sich in einfacher Weise durch continuirliche Veränderung der Begrenzung in einander überführen lassen, ohne dass man nöthig hat durch irgendwie singuläre Bereiche hindurchzugehen. Die begrenzenden Kreisperipherieen solcher gleichwerthigen Figuren sollen insbesondere die einfache Gesammtkugel in derselben Weise und in derselben Anordnung in einzelne Gebiete zerlegen. — Aus der so durchgeführten Betrachtung wird dann hervorgehen, *dass dieselbe von selbst alle Fälle eines beliebigen, nur an die obige Bedingung gebundenen Werthetripels λ, μ, ν erschöpft.*

Wir wissen, zu jedem Kern gehören 16 verschiedene reducirte Bereiche, die sich zu 4 Grundvierecken und je 3 Aussenvierecken zu einem jeden derselben gruppiren. Insbesondere wollen wir, wie wir bereits pag. 240 sagten, jedesmal gerade dasjenige Aussenviereck zu seinem Grundviereck hinzunehmen, welches der Verdoppelung der betr. Ecke entsprechend ist. Indem ganz allgemein gesprochen bei dieser Verabredung jedes Grundviereck (oder wenigstens die ihm entsprechenden Kreisbogen) der verschiedenen Verdoppelung der Ecke gemäss dreimal auftritt, erhalten wir solcherweise auch alle 12 verschiedenen Aussenvierecke. Zugleich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die reellen Theile der Grössen λ, μ, ν stets positiv annehmen.

Wir denken uns der Einfachheit der Zeichnungen wegen den gemeinsamen Schnittpunkt der Axen zumeist sogleich ins Unendliche transformirt. Wählen wir dann als Eckpunkte der Fundamentalbereiche zunächst die drei im Endlichen gelegenen Fixpunkte $a_1 b_1 c_1$ der Fundamentalsubstitutionen aus. Der vierte Eckpunkt, z B. c_2', wird noch ganz beliebig in der Ebene liegen können, der Thatsache entsprechend, dass durch Angabe der inneren Axen in unserem Falle noch keineswegs (auch nicht bis auf Vielfache voller Umdrehungen) die drei Fundamentalsubstitutionen eindeutig bestimmt sind, sondern noch eine zweifach unendliche Möglichkeit offen bleibt. Durch die Punkte $a_1 b_1 c_1 c_2'$ wird jedoch eine bestimmte Auswahl der Fundamentalsubstitutionen festgelegt sein. Wir verbinden nun die Punkte a_1 und b_1 mit c_1 und c_2' geradlinig und bekommen so einen vierseitigen geschlossenen Linienzug. Wie werden wir an ihm den zugehörigen Fundamentalbereich erkennen? Wir überlegen uns zunächst, welche verschiedenen Formen dieses Linienviereck überhaupt darstellen kann. Es ist leicht zu erkennen, indem wir den Punkt c_2' beliebig in der Ebene wandern lassen, dass es morphologisch, mit Rücksicht auf die Bezeichnung der Eckpunkte, nur die *vier verschiedenen Typen* geben kann, wie sie Fig. 85 a—d darstellen, deren

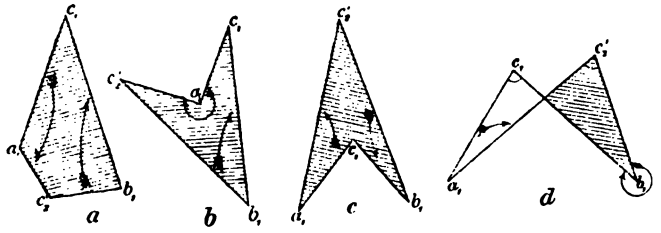


Fig. 85 a, b, c, d.

charakteristische Unterschiede von selbst einleuchten. (Giebt es doch morphologisch überhaupt nur eine Lage von vier Geraden der Ebene.) Allerdings könnte man, wenn man will, die Fig. 85 d noch in zwei zerlegen, je nachdem die sich nicht kreuzenden Linien $a_1 c_1$ und $b_1 c_2'$ über die Punkte c_1, c_2' hinaus oder über die Punkte a_1, b_1 hinaus verlängert sich in einem Punkte schneiden. Doch führen dieselben im Folgenden zu keinen wesentlich verschiedenen Formen, sodass wir dieselben zusammen behandeln wollen. In den Figuren 85 a, b, c umgrenzen die Linienzüge sogleich brauchbare Fundamentalbereiche. Wir wollen ferner bemerken, dass die Typen Fig. 85 a, b auch Beispiele für reelle Werthe der λ, μ, ν d. h. symmetrische Normalvierecke zulassen. Wir können die Figuren daher auch für complexe λ, μ, ν als erledigt ansehen, indem alle geometrischen Processe, die an ihnen zur Construction der übrigen zu dem Kern gehörenden reducirten Bereiche, sowie aller

verwandten Bereiche vorzunehmen sind, genau in derselben Weise auszuführen möglich sind, wie in den entsprechenden Beispielen reeller λ, μ, ν. Ueber den Fall 85 d werden wir sogleich noch Näheres bemerken. *Es zeigt sich, dass hier alle reducirten Fälle aufgezählt sind, für welche* $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$ *ist.**)

Wir werden jetzt wünschen ein *algebraisches Kriterium* zu besitzen, vermöge dessen wir sofort bei gegebenen Exponenten λ_0, μ_0, ν_0 mit der Bedingung $\lambda_0+\mu_0+\nu_0=1$ zu entscheiden vermögen, ob zu ihm der Typus der Figuren 85 a, b oder der Typus der Figuren 85 c, d gehört. Nun ergiebt sich sofort als unterscheidendes Merkmal, dass die Punkte $c_1 c_2'$ im ersten Falle auf verschiedenen Seiten der geraden Verbindungslinie $a_1 b_1$, im letzten Falle dagegen auf derselben Seite liegen. Hieraus gewinnen wir leicht die gesuchte algebraische Relation. Es seien $a_1 a_2$ und b_1 als die Punkte $0, \infty, 1$ der complexen s-Ebene gewählt. Dann ist gemäss der Formeln auf pag. 194

$$c_1 = D\,V(a_1 a_2 c_1 b_1) = \frac{e^{-i\pi\lambda} + e^{i\pi(\nu-\mu)}}{e^{i\pi\lambda} + e^{i\pi(\nu-\mu)}}$$

und

$$c_2' = c_1 e^{2i\pi\lambda} = \frac{e^{i\pi\lambda} + e^{i\pi(\mu-\nu)}}{e^{-i\pi\lambda} + e^{i\pi(\mu-\nu)}},$$

oder unter Benutzung der Bedingung, dass hier $\lambda_0+\mu_0+\nu_0=1$ ist,

$$c_1 = \frac{1 - e^{2i\pi\mu}}{1 - e^{-2i\pi\nu}},$$

$$c_2' = \frac{1 - e^{-2i\pi\mu}}{1 - e^{2i\pi\nu}}.$$

Der Abstand der Punkte c_1 und c_2' von der Verbindungslinie $a_1 b_1$ wird nun mit Rücksicht auf die Vorzeichen durch den imaginären Theil der obigen Ausdrücke gegeben. Wenden wir die Weierstrass'sche Bezeichnung des reellen Theiles einer complexen Function mit dem Buchstaben $\Re$ an, so erhalten wir hiernach das einfache Resultat, welches von der speciellen Werthevertheilung in der s-Ebene völlig unabhängig ist:

Je nachdem der Quotient $\frac{\Re(ic_1)}{\Re(ic_2')}$, *wenn wir für* c_1 *und* c_2' *die gefundenen Ausdrücke eingesetzt haben, negativ oder positiv ist, liegt entsprechend der symmetrische Fall der Figuren* 85 a, b *oder der unsymmetrische Fall der Figuren* 85 c, d *vor.* Wir haben hier die Bezeichnung „Symmetrie" in morphologischem Sinne gebraucht. Der Uebergangsfall, dass jener Quotient gleich 0 oder ∞ ist, kann beliebig dem symmetrischen oder unsymmetrischen Falle zugerechnet werden, und ist geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass c_2' auf der Verbindungslinie $a_1 b_1$ selbst liegt.

---

*) v. pag. 256 dieser Arbeit.

Gehen wir nun zu den übrigen Formen der reducirten Fundamentalbereiche über. Der nicht schraffirte Theil der Ebene in Fig. 85c stellt uns direct das gewünschte Aussenviereck zu dem Grundviereck dar. Doch wie steht es mit dem Typus der Figur 85d? Auch hier können wir sofort das entsprechende Aussenviereck angeben. In der Figur ist der bezeichnete Winkel c_1 grösser als der Winkel c_2', das Aussenviereck wird daher durch die nebenstehende Figur 86 gegeben. Wie aber verhält es sich mit dem zugehörigen Grundviereck?

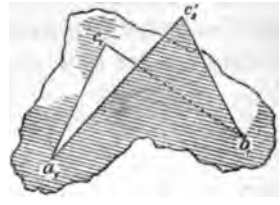


Fig. 86.

Wir wollen kurz anführen, in welchem Sinne auch dieses direct durch den Linienzug der Figur 85d gegeben wird. *Wir haben einfach das schraffirte Dreieck der Figur* 85*d als negativ, das nicht schraffirte Dreieck als positiv aufzufassen.* Wir haben hier ein Beispiel einer Erweiterung des Begriffes eines Fundamentalbereiches, der in mancher Beziehung von Nutzen sein kann.*) (Es ist insbesondere interessant, die zugehörige Zerschneidung der Ebene des Argumentes sich klar zu machen. Dort werden die Schnitte sich überkreuzen, und es ist ein bestimmter Theil der Ebene als dreifach überdeckt anzusehen, gleichsam als wäre eine Falte oder eine Tasche in der Ebene vorhanden.) Den Beweis der Brauchbarkeit dieses Bereiches führen wir, indem wir einfach den negativen Theil durch einmalige oder mehrmalige Anwendung der Substitution A^{-1} nach dem Princip der erlaubten Abänderung auf den

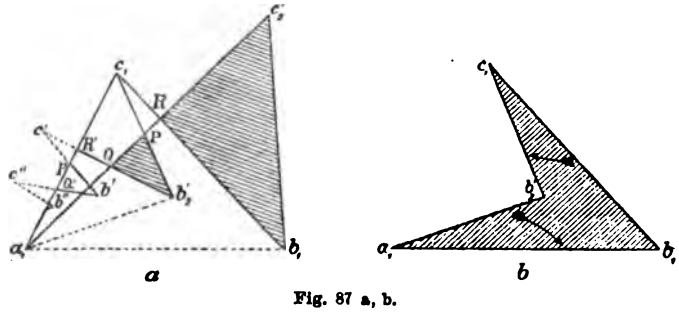


Fig. 87 a, b.

positiven Theil abtragen, wie die Figur 87a es angiebt.**) Man kommt dann schliesslich zu einem aus drei getrennten Stücken bestehenden,

*) Vgl. pag. 240 dieser Arbeit, sowie Poincaré, Acta Mathematica Bd. I, 1882, pag. 18.

**) Durch die erste Anwendung der Substitution A^{-1} geht das Dreieck $c_2' b_1 R$ in das Dreieck $c_1 b_2' R'$ über, es wird also noch ein Theil des negativen Bereiches in Gestalt des Dreiecks PQb_2' über den positiven Theil hinausragen. Durch die zweite Anwendung derselben Substitution wird dieses Dreieck PQb_2' dann in das Dreieck $P'Q'b'$ transformirt und so fort.

völlig positiven äquivalenten Bereich, den man leicht mit Hülfe der Substitution A selbst in den zusammenhängenden Bereich der Figur 87 b überführt. Doch wollen wir den Uebergang zu der Figur 87 b noch in einer einfacheren, übersichtlicheren Weise vornehmen.

Wir stellen, anknüpfend an die Figur 85 d, eine einfache elementargeometrische Betrachtung an, um die Punkte b_2' und a_2' zu finden. Durch die Punkte $a_1 b_1 c_1$ denken wir uns den Kreis beschrieben und dann diejenige Substitution ausgeführt, welche als Fixpunkte die Punkte a_1 und ∞ hat und den Punkt c_0 in den Punkt c_1 überführt. Durch dieselbe geht der Punkt b_1 in einen neuen Punkt b_0 über, der auf der Strecke $b_1 c_1$ gelegen sein muss, da Winkel $a_1 c b_1$ gleich Winkel $a_1 c_0 b_1$ ist. Indem nun durch die Substitution A^{-1} der Punkt c_2' in den Punkt c_1 übergehen soll, so wird der Punkt b_2' hierbei auf $a_1 b_0$ liegen. Das Viereck $a_1 b_2' c_1 b_1$ ist dann dem aus einem positiven und einem negativen Stücke bestehenden ursprünglichen Bereiche $a_1 c_1 b_1 c_2'$ äquivalent; dasselbe wird für sich gezeichnet durch die Figur 87 b gegeben.

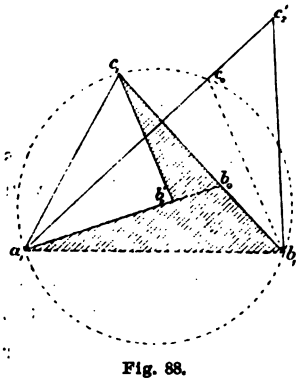


Fig. 88.

Führt man die analoge Betrachtung für die Verdoppelung des Punktes a_1 mit der Substitution B aus, so erkennt man, die dritte Form des Grundvierecks wird stets wieder den Typus der Figur 85 d aufweisen. Auch gilt dieses Verhältniss umgekehrt. Wir haben daher den Satz: *Jedes Grundviereck der Form Figur* 85 d *kann durch ein äquivalentes Viereck der Form Figur* 85 c *ersetzt werden. Jedes Grundviereck der Form Figur* 85 c *hat als äquivalente Vierecke bei der Verdoppelung der anderen Ecken zwei Vierecke der Form Figur* 85 d.

Nun sind wir am Ziele, insofern wir überblicken, dass man in jedem Falle ein brauchbares Normalviereck, sowohl für das Grundviereck, wie für die Aussenvierecke erhält, und somit sind wir mit der Construction aller reducirten Bereiche, deren Ecken sämmtlich im Endlichen gelegen sind, zu Ende gekommen. *Es sind dies die sämmtlichen Fälle* $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$ *bezw.* 3.

Wir wenden uns nun weiter zu den Bereichen, für die eine oder zwei der Ecken in dem unendlich fernen Punkte der Ebene liegen (werden uns aber durchaus auf rein positive Bereiche beschränken, so interessant es ist, gerade Bereiche mit theilweise negativem Gebiete zu betrachten). Die neuen Bereiche werden uns für den einzelnen Kern noch die übrigen drei Grundvierecke und ihre Aussenvierecke liefern müssen. Und zwar wollen wir die Fälle der Figuren 85 c, d einfach durch die bezüglichen Figuren erledigen; es stellt sich heraus, dass (bei

der gewählten Verdoppelung der Ecken) genau wie im Falle reeller λ, μ, ν entweder die Ecken c_1 und c_2' oder aber die Ecken a_1 und b_1 im Unendlichen liegen. Bezeichnen wir die Exponenten des Grundvierecks, dessen Ecken sämmtlich im Endlichen liegen, mit λ_0, μ_0, ν_0, so werden die übrigen drei Grundvierecke nach der Tabelle pag. 219 durch die Exponenten:

$$\begin{aligned} &1) \quad \lambda_0, \quad 1-\mu_0, \quad 1-\nu_0, \\ &2) \quad 1-\lambda_0, \quad \mu_0, \quad 1-\nu_0, \\ &3) \quad 1-\lambda_0, \quad 1-\mu_0, \quad \nu_0 \end{aligned}$$

gegeben sein, zu denen dann die entsprechenden Aussenvierecke hinzukommen.

Für den Fall der Figur 85c stellt Figur 89 a, b das Grundviereck 3 mit seinem Aussenviereck, Figur 89c und eine ihr entsprechende Figur

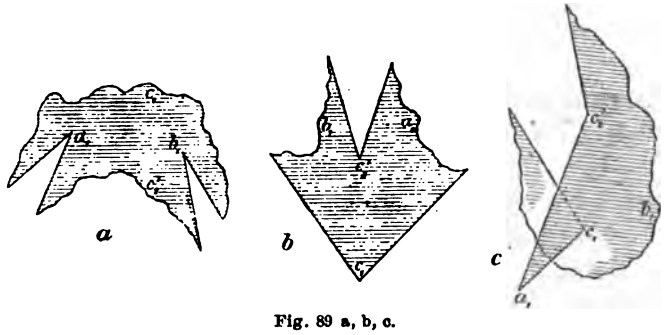


Fig. 89 a, b, c.

das Aussenviereck zu dem Grundviereck 2 resp. 1 dar. Die Grundvierecke 1 und 2 selbst werden bei der angenommenen Verdoppelung der Ecken nicht durch positive Bereiche darstellbar sein.

Für den Fall der Figur 85d stellen Figur 90 a, b in den schraffirten Theilen der Ebene die Grundvierecke 1 und 2 und in den

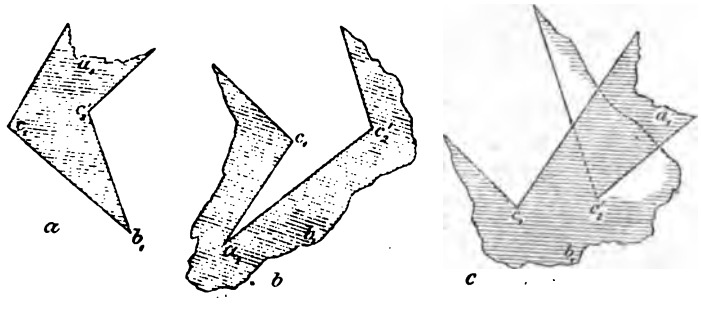


Fig. 90 a, b, c.

nicht schraffirten Theilen die zugehörigen Aussenvierecke dar; Figur 90c dagegen das Aussenviereck zu dem Grundviereck 3, während letzteres

selbst wiederum bei der angenommenen Verdoppelung der Ecken nicht positiv darstellbar ist.

Das erste Resultat dieser Betrachtung ist daher: *Das Aussenviereck ist stets als brauchbarer Normalbereich darstellbar.* Nun aber wissen wir, dass z. B. der Fall der Figur 85d bei Verdoppelung der Ecke b_1 zum Typus Figur 85c und bei Verdoppelung der Ecke a_1 wieder zum Typus Figur 85d führt. Diese neue Auswahl der Verdoppelungen liefert aber entsprechend die Grundvierecke 2 resp. 3 und 2. (Analoges gilt, wenn man vom Falle der Figur 85d ausgeht.) Demnach ist unser zweites Resultat: *Bei geeigneter Wahl der Verdoppelung der Ecken ist auch das Grundviereck stets als brauchbarer Normalbereich darstellbar.*

Beide Sätze fassen wir zusammen in den Satz:

Zu jedem Kern können wir die 16 *reducirten Bereiche stets durch Normalvierecke darstellen, und zwar durch ausschliesslich positive Normalvierecke.*

§ 25.

Die Fundamentalbereiche für die Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$; Construction der Gesammtheit aller verwandten Bereiche.

Nun gehen wir *an die Ausführung des zweiten Schrittes*, von diesen reducirten Vierecken aus zu den sich auf ihnen aufbauenden *verwandten Bereichen* aufzusteigen. Wir erinnern uns hierbei der allgemeinen Angaben, die wir auf pag. 241 gegeben haben. Die zu einem reducirten Vierecke mit den Exponenten λ_0, μ_0, ν_0 zugehörigen Bereiche der Verwandtschaft werden durch die Exponenten $\lambda_0 + P$, $\mu_0 + Q$, $\nu_0 + R$ dargestellt, woselbst P, Q, R ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summe $P + Q + R = 2S$ gerade ist. Wir flechten zunächst eine arithmetische Betrachtung ein, die ganz den Ansätzen auf pag. 210 entsprechend ist. Wir setzen

$$P = B + C,$$
$$Q = C + A,$$
$$R = A + B.$$

Dann ist:

$$A = \frac{Q + R - P}{2} = S - P,$$
$$B = \frac{R + P - Q}{2} = S - Q,$$
$$C = \frac{P + Q - R}{2} = S - R,$$

d. h. A, B, C sind selbst wieder ganze Zahlen. Es sei wieder $P > Q > R$ angenommen. Dann unterscheiden wir die Fälle:

1) $P \leqq Q + R,$
2) $P > Q + R.$

1) *Im ersten Falle* sind die Grössen A, B, C positiv oder gleich 0; wir werden daher zu dem allgemeinen Bereiche von dem Viereck λ_0, μ_0, ν_0 aus aufsteigen, indem wir einmal an je 2 entsprechenden Seiten eine bestimmte Anzahl von Kalotten (oder Halbebenen) in bekannter Weise lateral anhängen, — dieser Process begegnet aber niemals einer Schwierigkeit, da ja keine der Seiten im reducirten Bereiche sich überschlägt — und indem wir zweitens an einen Verzweigungsschnitt, der die beiden einfachen Ecken verbindet, gleichfalls eine bestimmte Anzahl Vollebenen anhängen. Ob dies letztere stets möglich ist, bleibt zu prüfen; die zu erfüllende Bedingung verlangt ja, dass der genannte Verzweigungsschnitt völlig auf der Fläche des Vierecks verläuft und sich nicht selbst überkreuzt, wenn man ihn auf die einfache Kugel überträgt (mit anderen Worten, dass derselbe die Fläche in nicht mehr als zwei Stücke zerlegt und die Vollkugel, die anzuhängen ist, nur einschneidet). Sehen wir nun daraufhin unsere Figuren einmal durch. Für die *Grundvierecke* ist es unmittelbar klar, dass der Ausführung des geometrischen Processes nichts im Wege steht, da es ja genügt, für einen der äquivalenten Bereiche es nachzuweisen. Was jedoch die *Aussenvierecke* anbetrifft, so verlangen die Fälle der Figuren 89b und 90c eine besondere Behandlung.*) Im ersten Beispiele gehen wir von den beiden Zweiecken aus, die den nicht schraffirten Theil der Ebene der Fig. 89a bilden; in diesem hängen wir längs eines ganz auf ihm verlaufenden Schnittes von a_1 über den Unendlichkeitspunkt nach b_1 eine Vollebene an und erhalten so dasjenige Viereck, welches der Vermehrung der Exponenten λ_0 und μ_0 je um die Einheit entspricht. Dasselbe wird durch Figur 91 dargestellt.

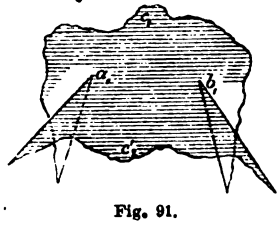


Fig. 91.

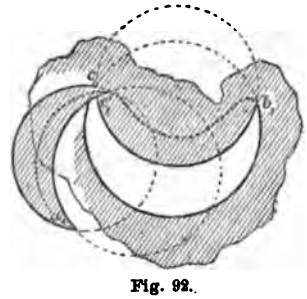


Fig. 92.

Würden wir dagegen in Figur 89b längs eines Verzweigungsschnittes von a_1 nach b_1 eine Vollebene angehängt haben, so würde unser Bereich in 2 Zweiecke zerfallen sein. Diese geometrischen Verhältnisse ent-

*) Wenn man will, kann man dieselben am einfachsten erledigen, indem man sich überzeugt, dass die entsprechenden Aussenvierecke, die zu jedem der beiden Figuren bei anderer Verdoppelung der Ecken gehören, die genannten Processe gestatten, was dann genügt.

sprechen durchaus den analogen Vorgängen in den symmetrischen Fällen der Figuren 85 a, b.*) In dem zweiten Beispiel Fig. 90c endlich findet ganz das Analoge statt; wir gehen wieder von 2 Zweiecken (Fig. 92) aus und hängen längs eines Schnittes von a_1 nach b_1 eine Vollebene an. Um den Bereich der beiden Zweiecke möglichst klar hervortreten zu lassen, ist derselbe in einer Grenzlage gezeichnet, in der die Punkte c_1 und c_2' noch nicht völlig zusammengefallen sind. Das schliessliche Viereck stellt Figur 93 dar.

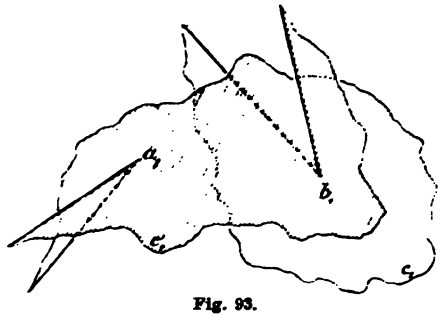


Fig. 93.

2) *Ist P dagegen zweitens $> Q + R$*, so setzen wir dasselbe gleich $Q + R + 2m$ und erhalten als Exponenten des erweiterten Bereiches:

$$\lambda_0 + Q + R + 2m,$$
$$\mu_0 + Q,$$
$$\nu_0 + R.$$

Was zunächst wieder die *Grundvierecke* anbetrifft, so werden wir von den drei möglichen Gestalten eines jeden derselben gerade diejenige Verdoppelung der Fixpunkte bevorzugen, die dem Exponenten λ_0 entspricht. Dann haben wir nur zu zeigen, dass wir ein Viereck für die Exponenten $\lambda_0 + 2m$, μ_0, ν_0 zeichnen können. Denn dem weiteren Schritte, der Vermehrung je zweier Exponenten um Q resp. R, entspricht geometrisch wieder die laterale Anhängung von Kugelkalotten an entsprechende Seitenpaare, die keine Schwierigkeit bietet. Blicken wir nun wieder auf unsere Figuren zurück. Die Ausführbarkeit des ersten Schrittes werden wir jedenfalls nachgewiesen haben, sobald wir zeigen, dass wir stets längs eines Verzweigungsschnittes, der die verdoppelten Ecken verbindet, eine Vollebene anhängen können ev., falls kein (positives) Viereck für die betreffende Verdoppelung existirt, immer doch das Viereck $\lambda_0 + 2$, μ_0, ν_0 construiren können. Figur 85d führt uns so zu Figur 94. In Figur 89a ersetzen wir den in der Anhängung der Vollebene längs eines Schnittes $c_1\, c_2'$ bestehenden geometrischen Process wieder durch die Anhängung einer Vollebene längs eines Schnittes $c_1\, c_2'$ in dem durch die beiden Zweiecke ausserhalb des

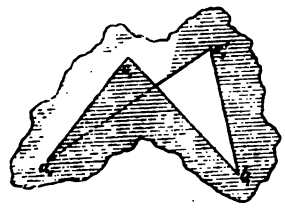


Fig. 94.

*) v. pag. 247, sowie pag. 220 dieser Arbeit.

schraffirten Theiles der Figur 89b gebildeten Bereiche. Es bleibt noch das entsprechende erweiterte Grundviereck für die Figuren der Aussenvierecke 89c und 90c zu zeichnen. Dieselben sind durch die folgenden Figuren 95 und 96 gegeben.

Fig. 95.

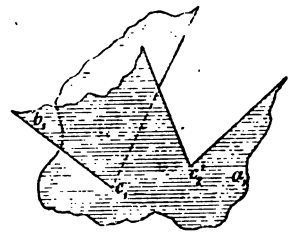


Fig. 96.

Was nun die *Aussenvierecke* anbetrifft, so wollen wir daran denken, dass wir zu jedem Grundviereck, mag dieses selbst für jede Verdoppelung gezeichnet werden können oder nicht, stets drei verschiedene Aussenvierecke construirt haben, die sich darin unterscheiden, dass allemal einer von den drei Exponenten λ, μ, ν in seinem reellen Theile grösser als 1 ist. Sollen wir nun ein Viereck für die Exponenten $\lambda_0 + 2m$, μ_0, ν_0 zeichnen, so können wir offenbar den reellen Theil von λ_0 grösser als 1 annehmen, ohne die Allgemeinheit zu beschränken. Denn angenommen nicht λ_0, sondern etwa μ_0 wäre in dem reellen Theile >1, so stellen wir uns zunächst das Viereck λ_0+1, μ_0-1, ν_0 her, indem dann sicher der reelle Theil des ersten Exponenten >1 ist, gehen von ihm aus zum Viereck $\lambda_0+1+2(m-1)$, μ_0-1, ν_0 über, und hängen dann nur noch längs der Seiten $a_1 b_1$ und $a_2' b_1$ je eine Kalotte (lateral) an, und erhalten so das Viereck λ_0+2m, μ_0, ν_0. Dieser Bemerkung gemäss haben wir also nur für alle von uns bezeichneten Formen der Aussenvierecke zu zeigen, dass wir stets längs eines Verzweigungsschnittes $c_1 c_2'$ Vollebenen anhängen können. Dies aber lassen alle unsere Figuren unmittelbar erkennen.

Wir sind somit zu dem allgemeinen Resultat gelangt, *dessen Richtigkeit in aller Strenge nachgewiesen ist:*

Man *kann für jedes beliebige nicht ganzzahlige Werthetripel* λ, μ, ν, *das an die Bedingung* $\pm\lambda \pm\mu \pm\nu = 2n+1$ *gebunden ist, stets einen zugehörigen Fundamentalbereich in Gestalt eines Normalvierecks construiren; letzteres können wir stets durch geeignete Transformation in ein geradliniges Viereck verwandeln.*

Zugleich haben wir die Mittel gegeben, diesen Bereich in jedem Falle geometrisch wirklich zu zeichnen. Ich brauche wohl kaum hinzu-

zufügen, dass natürlich der einzelne Bereich, wie wir bereits pag. 242 sahen, zwar nicht geometrisch, wohl aber in seiner functionentheoretischen Bedeutung eindeutig bestimmt ist.

Wollen wir schliesslich wieder einfache Kriterien aufstellen, um sogleich zu wissen, welche Ecken bei Einführung geradliniger Begrenzung jedesmal im Unendlichen liegen, so gehen wir die vorstehenden Betrachtungen noch einmal durch und werden dann leicht die Richtigkeit der folgenden Sätze erkennen, die wir als eine Verallgemeinerung der entsprechenden Dreieckssätze anzusehen haben.

Ist $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$ (*Bedingung A*), *so liegen alle Ecken des Bereiches im Endlichen.*

Ist $\lambda + \mu - \nu = 2n + 1$ (*Bedingung B*), *so liegt die Ecke* c_1 *und, wenn* c_1 *die verdoppelte Ecke ist, auch* c_2' *im Unendlichen.*

Ist $\lambda - \mu - \nu = 2n + 1$ (*Bedingung C*), *so liegen die stets nicht verdoppelten Ecken* b_1 *und* c_1 *im Unendlichen.*

Natürlich gestatten die letzten Bedingungen wieder die cyklische Vertauschung der Buchstaben. Wir bemerken endlich, dass zwei der genannten Bedingungen natürlich nicht gleichzeitig gelten können, ohne dass in den reellen Theilen ganzzahlige Exponenten auftreten, ein Vorkommniss, welches wir jetzt noch näher untersuchen wollen.

§ 26.

Die Fundamentalbereiche unter der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ für einen ganzzahligen Werth eines der Exponenten.

Wie finden wir nun schliesslich die Fundamentalbereiche für den Fall, dass *einer der Exponenten, etwa* λ, *bei der Bedingung*

$$\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$$

ganzzahlig ist?

Von vornherein wissen wir wieder, dass entweder der Kern $c, 1$, oder der Kern $c, 2$ auf pag. 204 zur Anwendung kommen muss. Es werden sich dann durchaus die Verhältnisse in allgemeiner Gestalt reproduciren, die wir pag. 225 für die Dreiecke mit einem ganzzahligen Exponenten kennen gelernt haben. Vor allem wird das Wesentliche jener Betrachtung sich hier wiederholen, dass die Gesammtheit der reducirten Fundamentalbereiche, wie sie die Tabelle pag. 219 darstellt, sich *auf zwei verschiedene Gruppen verwandter Bereiche* vertheilen, die sich beziehungsweise auf den eben genannten beiden Kernen aufbauen.

Gehen wir zunächst von *dem Kern* $c, 1$ aus; es seien die Punkte b_1 und c_2 als Fixpunkte der zu einander inversen Fundamentalsubstitutionen B und Γ irgendwie auf der Kugel gegeben. Man wird dann den Punkt a_1 beliebig hinzunehmen und von ihm aus den Punkt a_2' construiren können. Ist dann durch die Punkte $b_1 c_1$ und a_1 resp. a_2'

je ein Kreisbogen gelegt, so erhalten wir die Figur 97. Dieselbe liefert uns stets sogleich zwei reducirte Fundamentalbereiche; von ihnen ist der eine durch Schraffirung hervorgehoben, der andere wird von dem

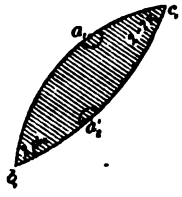


Fig. 97.

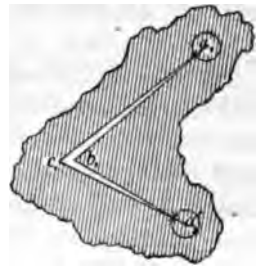


Fig. 98.

ausserhalb gelegenen Theile der Kugel gebildet. Die Exponenten des schraffirten Vierecks seien (in Rücksicht auf den entsprechenden Dreiecksfall pag. 226) mit 1, μ_0, $1 - \nu_0$ bezeichnet, woselbst wieder $0 < \mu_0 < 1$, $0 < \nu_0 < 1$ und $\mu_0 + \nu_0 = 1$ ist. Das zweite reducirte Viereck hat dann die Exponenten 1, $1 - \mu_0$, $1 - \mu_0$. Die Figur 98 möge ferner noch den dritten hierher gehörigen reducirten Bereich darstellen, dessen Exponenten 2, μ_0, $1 - \mu_0$ sind (dieselbe entspricht der Fig. 61a der pag. 226).

Dem entgegen stellen wir nun *die reducirten Bereiche des zweiten Kernes c, 2.* Der Fundamentalbereich für die Exponenten 0, $\mu_0 \pi$, $\nu_0 \pi$ mit der Bedingung $\mu_0 + \nu_0 = 1$ wird durch die Figur 99a gegeben,

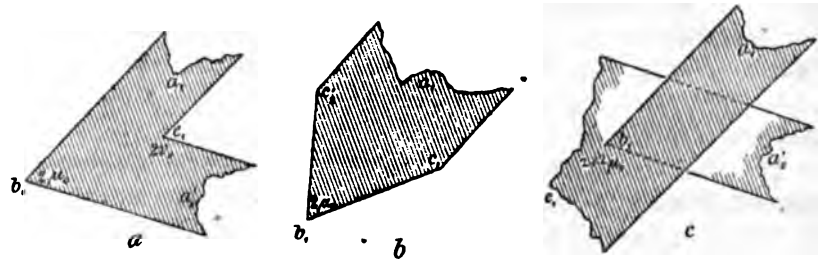


Fig. 99a, b, c.

deren directe Construction, wie man sofort sieht, im einzelnen Falle nicht die geringste Schwierigkeit bietet. (Die Zuordnung der Seiten $b_1 a_1$ und $b_1 a_2'$ und analog der Seiten $c_1 a_2'$ und $c_1 a_1$ in der Figur 99a ist in der Weise bestimmt zu denken, dass ausser den Endpunkten die gegenseitigen Schnittpunkte beider Seitenpaare resp. ihrer Verlängerungen einander entsprechen.)

Es ist nun nichts leichter als die vier reducirten Bereiche dieser Verwandtschaft zu construiren. Einmal kann man dem Bereich der

Figur 99a durch andere Verdoppelung der Ecken noch zwei weitere äquivalente Bereiche gegenüberstellen, deren einer z. B. durch Fig. 99b gegeben wird. Der Aussenbereich der letzten Figur stellt dann (Fig. 59b entsprechend) den unmittelbar brauchbaren Fundamentalbereich für die Exponenten $1,\ 1-\mu_0,\ 1+\mu_0$, vor, während z. B. der Fundamentalbereich für die Exponenten $0,\ 1+\mu_0,\ \mu_0$ (der Figur 59a entsprechend) durch Fig. 99c gegeben wird.

Wie nun auf den reducirten Dreiecken der pag. 225 u. 226 sich die Gesammtheit der jedesmal mit ihnen verwandten Bereiche aufbaut, genau in derselben Weise ist es auch hier der Fall, da ja die Figuren von den durch Spiegelung an der entsprechenden Seite zu Fundamentalbereichen ergänzten Dreiecken morphologisch nicht verschieden sind. Wir werden daher nicht nöthig haben, näher auf die Theorie der Verwandtschaft einzugehen. Eine einfache Ueberlegung zeigt sofort, dass auch die für die sphärischen Dreiecke pag. 226 aufgestellten Sätze sich unmittelbar auf unsere allgemeinen Fundamentalbereiche übertragen lassen. Ist nämlich für die complexen Exponenten λ, μ, ν eines Fundamentalbereiches eine der Bedingungen $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n+1$ erfüllt, so besteht die entsprechende Bedingung auch für die morphologisch gleichen symmetrischen Fundamentalbereiche, deren Exponenten durch die reellen Theile der Grössen λ, μ, ν gegeben sind. Es gilt sonach zunächst der Satz:

Der Kern c, 1 liegt dem zu construirenden Fundamentalbereiche zu Grunde, wenn $\lambda - \mu \pm \nu = 2n+1$ (*für* $\mu > \nu$) *ist, andernfalls kommt der Kern c, 2 zur Anwendung.*

Was endlich die Bedingungen anbetrifft, welche Ecken bei Einführung geradliniger Begrenzung ins Unendliche fallen, so ist hier wieder zu berücksichtigen, dass die verdoppelten Ecken naturgemäss entweder beide im Endlichen oder beide im Unendlichen liegen. Die für alle geradlinigen Bereiche mit einem ganzzahligen Exponenten λ, geltenden Sätze sind dann die folgenden:

Für die geradlinig begrenzten Fundamentalbereiche des Kernes c, 2 gilt:

Die dem Exponenten λ entsprechende Ecke liegt stets im Unendlichen.

Ist $\lambda + \mu + \nu = 2n+1$ (Bedingung A), so liegen die übrigen Ecken sämmtlich im Endlichen. [Es gilt dann stets auch $\mu + \nu - \lambda = 2n+1$ (Bedingung B).]

Ist dagegen $\mu - \nu - \lambda = 2n+1$ resp. $\nu - \mu - \lambda = 2n+1$) (Bedingung C), so liegt auch die dem Exponenten ν (resp. μ) entsprechende Ecke im Unendlichen. [Es gilt dann wieder stets auch $\lambda + \mu - \nu = 2n+1$ für $\mu > \nu$ resp. $\lambda + \nu - \mu = 2n+1$ für $\nu > \mu$ Bedingung B).]

Für die geradlinig begrenzten Fundamentalbereiche des Kernes c, 1 gilt:
Die dem Exponenten λ entsprechende Ecke liegt stets im Endlichen.

Ist nun $\lambda - \mu - \nu = 2n + 1$ (Bedingung C), so werden die den Exponenten μ und ν entsprechenden Ecken entweder alle im Endlichen oder alle im Unendlichen liegen, je nachdem man den einen oder anderen Schnittpunkt der begrenzenden Kreisperipherieen ins Unendliche transformiren will. [In diesem Falle ist auch $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$ (Bedingung A).]

Ist dagegen $\lambda - \mu + \nu = 2n + 1$ für $\mu > \nu$ (Bedingung B), so liegt entweder die dem Exponenten μ oder die dem Exponenten ν entsprechende Ecke im Unendlichen; man hat wiederum in der Hand, welches von beiden man eintreten lassen will.

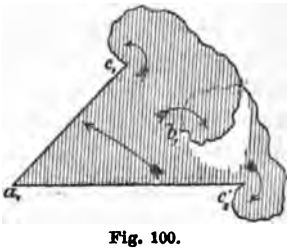


Fig. 100.

Es sei gestattet, in diesem Paragraphen sogleich noch einige Worte den Grenzbereichen zu widmen, die sich bei der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ für ∞ grosse Werthe der Exponenten ergeben. Man wird dieselben ebenso wie im Dreiecksfalle erhalten, indem man die geometrischen Processe der lateralen und der polaren Anhängung von Kugelkalotten oder Vollkugeln vom reducirten Bereich ausgehend in unendlicher Wiederholung anwendet. Wir wollen es unterlassen, die Bereiche, auf welche man solcherweise kommt, im einzelnen näher zu behandeln. Um jedoch wenigstens ein Beispiel anzuführen, sei auf den einfachen Fall des Fundamentalbereiches Fig. 100 verwiesen, woselbst die unendlich hohen Windungspunkte wieder durch Pfeile angedeutet sind.

Schlussbemerkung.

Sei es uns gestattet am Schlusse dieser Betrachtungen doch auch betreffs der *functionentheoretischen Bedeutung und Anwendung derselben* ein Wort hinzuzufügen. Ist erst einmal die Darstellung der Kreisbogenvierecke oder sonstiger allgemeinerer Bereiche, die das Abbild der s-Ebene darstellen, für beliebige complexe λ, μ, ν bis zu Ende durchgeführt, so gilt es natürlich, diese geometrische Theorie analytisch zu verwerthen, indem man dieselbe geradezu als Ausgangspunkt für das Studium der s-Function und damit der hypergeometrischen Function wählt.*) Insbesondere wird man vorerst den Schnitten, welche in der s-Ebene nach den singulären Punkten zu ziehen sind (damit man die in der s-Ebene construirten Bereiche erhält), noch ein Capitel der

*) Klein, Ann. 40, pag. 138 (1892).

weiteren Untersuchung zu widmen haben. Die Vortheile aber, die eine solche geometrische Behandlung unserer transcendenten Function bietet, dürften vor allem in den folgenden Punkten zu suchen sein. Sagen wir zunächst, dass die conforme Abbildung in ihrer concreten Form immer ein erster Schritt zu einer unmittelbaren Einsicht in das Wesen der Function, in ihre organische Natur, ist. Dies gilt schon, wenn wir, wie jetzt im Falle der s-Function, nur die allgemeinen Umrisse der Abbildung kennen. Es gilt in erhöhtem Maasse, wenn wir noch ins Einzelne verfolgen wollen, welche Curven auf den Fundamentalbereichen der s-Ebene irgend welchem Curvennetz der x-Ebene entsprechen, oder umgekehrt. Darüber hinaus aber seien die Fragen, wie oft ein bestimmt isolirter Zweig der Function gewisse Werthe annimmt, wie viel Nullstellen in einem bestimmten Intervall oder in einem bestimmten Gebiete der Ebene des Argumentes liegen,*) sowie die Theorie der höheren (rationalen und algebraischen) Transformation der s-Function genannt. Die Methode der Fundamentalbereiche dürfte endlich besonders in Specialfällen und Grenzfällen der Function einen guten Einblick gewähren, der auf rein analytischem Wege nicht in gleichem Maasse zu erlangen ist. Specielle Fragen dieser Art sind z. B. die, wann sich die Particularlösungen in der Nähe der singulären Punkte wie ein Logarithmus oder wie eine Exponentialfunction verhalten werden. Alle diese Fragen werden sich mit Vortheil von der geometrischen Theorie der s-Function aus behandeln lassen.

Doch auch noch in anderer Richtung hin dürften diese geometrischen Untersuchungen bemerkenswerth sein. Wenn wir dieselben nochmals überschauen, so werden wir den durchaus elementaren Charakter derselben nicht verkennen, der insonderheit insofern hervortritt, als wir mit allgemeinen Ansätzen nicht durchkommen, sondern die verschiedenen Fälle einzeln nach einander construiren müssen. Jedenfalls haben wir in den modernen Bestrebungen, die Differentialgleichungen 2. Ordnung geometrisch zu behandeln, zugleich ein vorzügliches Beispiel zu erblicken, wie die höhere Mathematik insbesondere in der auf Riemann's grundlegenden Arbeiten sich aufbauenden functionentheoretischen Anschauung sehr wohl auf die Entwickelung der Elementarmathematik von Einfluss sein kann.

Göttingen, Februar 1893.

*) Klein, Ann. 37 (1890), pag. 573 ff. Die dort gegebenen Resultate werden sich z. B. leicht auf den Fall der geradlinig begrenzten Dreiecke auf Grund unserer Betrachtungen auf pag. 218 ff. specialisiren lassen.

Die multiplicativen Formen auf algebraischem Gebilde beliebigen Geschlechtes mit Anwendung auf die Theorie der automorphen Formen.

Von

Ernst Ritter in Göttingen.

In einer Reihe von Abhandlungen hat Herr Poincaré die Theorie der automorphen Functionen auf die Betrachtung der „Fuchs'schen und Klein'schen Θ-Functionen" zurückgeführt, für welche er zugleich analytische Bildungsgesetze explicit angegeben hat.

Diese Poincaré'schen Θ-Functionen sind, wie Herr Klein bemerkt, und worauf ich mich in meiner Arbeit in Bd. 41 dieser Annalen stütze, im Wesentlichen *automorphe Formen zweier Variablen* ζ_1, ζ_2, in welche man die ursprüngliche Variable ζ zu spalten hat*).

Die Theorie der *automorphen Functionen* nun, soweit es sich um die Beziehungen der automorphen Functionen eines gegebenen Bereichs untereinander handelt, ist identisch mit der Theorie der *algebraischen Functionen* einer Riemann'schen Fläche.

Die *automorphen Formen* aber, d. h. die Poincaré'schen Θ-Functionen, lassen sich — und das ist der wesentliche Inhalt meiner genannten Arbeit — auf *Formen* auf einer algebraischen Riemann'schen Fläche zurückführen und mit Hülfe der letzteren in ihren Beziehungen zu einander in erschöpfender Weise erforschen. Dies habe ich damals nur für den Fall $p = 0$ ausgeführt, wo die Riemann'sche Fläche die einfach überdeckte Ebene bezw. Kugel, die Functionen und Formen algebraische Functionen und Formen sind. Aber schon da ergab sich aus dieser Beziehung, dass man fast alle bekannten Eigenschaften der automorphen Formen, die man bisher aus der Poincaré'schen Reihendarstellung abzuleiten gewöhnt war, ohne Zuhülfenahme der letzteren unmittelbar aus den Eigenschaften der zugehörigen rationalen Formen ablesen kann.

Der Ausdehnung dieser Theorie auf höheres Geschlecht schienen sich eigenthümliche Schwierigkeiten in den Weg zu stellen. Erstens war es nöthig, *eine solche Beziehung zwischen den homogenen automorphen Variablen* ζ_1, ζ_2 *und den algebraischen Variablen* z_1, z_2 *festzusetzen, dass sich die automorphen Formen als Formen möglichst einfachen Charakters von* z_1, z_2 *darstellen.* Es erweist sich unmöglich, alle automorphen Formen

*) Vergl. auch Klein-Fricke, Modulfunctionen I, S. 762 ff.

auf *algebraische Formen* von z_1, z_2 zurückführen; wohl aber kann man sie als solche Formen auffassen, welche sich bei geschlossenen Umläufen der z_1, z_2 auf der Fläche mit gewissen Constanten multipliciren, als „multiplicative Formen". Ferner war es nun aber nöthig — und auch nur dadurch die erste Aufgabe lösbar — erst eine allgemeine Theorie der *multiplicativen Formen* zu entwerfen, für welche als Vorarbeiten nur einige Untersuchungen über multiplicative Functionen existiren.

Zu all diesem brauchte ich eine übersichtliche Darstellung aller algebraischen und multiplicativen Formen, welche die Lage der Null- und Unendlichkeitspunkte einer solchen und das Verhalten in denselben unmittelbar erkennen lässt, also eine Verallgemeinerung der Zerlegung einer rationalen Form in „Primfactoren" (zx).

Die von Herrn Klein aufgestellte „Primform"*) erwies sich wohl für die Functionen, nicht aber für die algebraischen und multiplicativen Formen als ausreichend. Durch Combination derselben jedoch mit einer Wurzel aus der „Mittelform" stellte ich eine gewisse multiplicative Form mit nur einer Nullstelle, die „multiplicative Primform", her, welche für die gewünschten Darstellungen sich als äusserst brauchbar erweist.

Alle diese Untersuchungen, zunächst über die Klein'sche Primform, dann über die multiplicative Primform und die allgemeinen multiplicativen Formen dienten mir ursprünglich nur als Hülfsmittel zur Untersuchung der automorphen Formen; so erscheinen sie auch noch in meiner Note in den Gött. Nachr. 1893, Nr. 3: „Die automorphen Formen von beliebigem Geschlechte". Da jedoch die Redaction meiner Arbeit für den Druck durch Berufspflichten bis jetzt verzögert worden ist, so hat sich im Laufe der Zeit mein ursprünglicher Plan in dem Sinne verschoben, dass ich mich entschlossen habe, jenen Hülfsbetrachtungen einen selbständigen Charakter zu verleihen, insofern eine Untersuchung der Klein'schen Primform auf ihre Periodicität, sowie eine eingehende Behandlung der multiplicativen Formen auch nach anderen Richtungen hin, als für die Theorie der automorphen Formen, von Werth sein dürfte, zumal ja nur ein Theil der allgemeinen Resultate in letzterer Theorie gebraucht wird.

Ich untersuche daher jetzt im ersten Theile im Wesentlichen die *Klein'sche Primform* genauer als es bisher geschehen, auf ihr Verhalten gegenüber Periodenumläufen der Variablen, und leite aus ihr die im zweiten Theile zur Verwendung kommende *„multiplicative Primform"* sowie die Eigenschaften derselben ab.

Im zweiten Theile gebe ich eine Theorie der *multiplicativen Formen* auf beliebigem algebraischen Gebilde, eine Theorie, die besonders dadurch

*) Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. Bd. 36. 1889.

interessant wird, dass der Begriff der multiplicativen Formen, im Gegensatz zu dem der algebraischen Formen, von der speciellen Darstellung des Gebildes unabhängig ist.

Endlich wird im dritten Theile die *Theorie der automorphen Formen* mit derjenigen der multiplicativen Formen in Verbindung gesetzt. Dabei sehe ich von allen Darstellungen der automorphen Formen durch Poincaré'sche Reihen vorläufig ab, um nur diejenigen Eigenschaften derselben aufzusuchen, welche aus der allgemeinen Theorie der Formen auf dem algebraischen Gebilde fliessen.

Aber schon so ergeben sich fast alle die bekannten bislang immer aus den Reihen abgeleiteten Eigenschaften derselben, und dazu noch eine Reihe neuer in allgemeinster Weise. Dadurch soll jedoch die Untersuchung jener Reihendarstellungen nicht beiseite geschoben, sondern im Gegentheil nach Heraushebung aller ihnen nicht speciell eigenthümlichen Beziehungen der Weg für die Untersuchung derjenigen Eigenthümlichkeiten geebnet werden, welche den durch Poincaré'sche Reihen definirten Formen allein zukommen, und welche noch in sehr geringem Masse erforscht sind. Es handelt sich dabei weniger um die Abhängigkeit der betr. Formen von ihren eigentlichen laufenden Variablen, als vielmehr von den Constanten der für die Reihenbildung benutzten Function.

Doch, wie schon gesagt, sollen alle derartigen specifisch automorphen Fragen in dieser Arbeit unberührt bleiben.

I. Theil.

Die Primformen.

§ 1.

Festsetzungen über die Integrale 1. und 3. Gattung des algebraischen Gebildes.

Jedes algebraische Gebilde kann man in der Weise geometrisch repräsentiren, dass man irgend eine Function z desselben auswählt, und über der z-Ebene diejenige Riemann'sche Fläche von endlicher Zahl der Blätter und der Verzweigungspunkte construirt, auf welcher alle algebraischen Functionen des Gebildes eindeutige Functionen des Ortes sind. Zu ein und demselben algebraischen Gebilde gehören also unendlich viele Riemann'sche Flächen, nämlich ebensoviel, als es algebraische Functionen des Gebildes giebt.

Umgekehrt kann man durch jede Riemann'sche Fläche von endlicher Blätterzahl und endlicher Zahl der Verzweigungspunkte nach dem bekannten Riemann'schen Existenztheorem ein bestimmtes algebraisches Gebilde definiren; dabei führen eine unendliche Mannigfaltig-

keit von Riemann'schen Flächen zu ein und demselben algebraischen Gebilde. Da man aber die Theorie der Functionen auf irgend einer dieser äquivalenten Riemann'schen Flächen durch ein-eindeutige conforme Abbildung auf jede andere derselben übertragen kann, so ist es wenigstens für die Untersuchung von Functionen gleichgültig, welche von den äquivalenten Flächen man der Betrachtung zu Grunde legt.

Es sei daher T vorerst eine ganz beliebige Riemann'sche Fläche des algebraischen Gebildes, dessen Geschlecht p sein soll.

T lässt sich dann durch $2p$ von einem Punkte O auslaufende und sich sonst nicht treffende Rückkehrschnitte $A_\varkappa^\pm$, $B_\varkappa^\pm$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück $\overline{T}$ verwandeln. An jedem dieser Rückkehrschnitte unterscheide ich ein positives Ufer $A_\varkappa^+$ und ein negatives Ufer $A_\varkappa^-$. Anordnung und Benennung der Schnitte um den Punkt O herum sei so gewählt, wie aus Fig. 1 für $p = 2$ zu ersehen ist. In Fig. 2 habe ich, was für viele Zwecke nützlich ist,

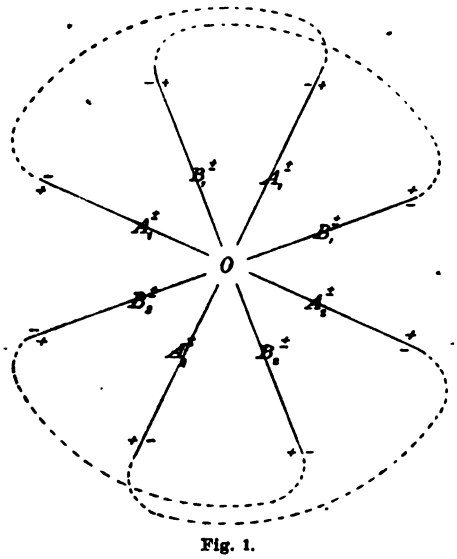


Fig. 1.

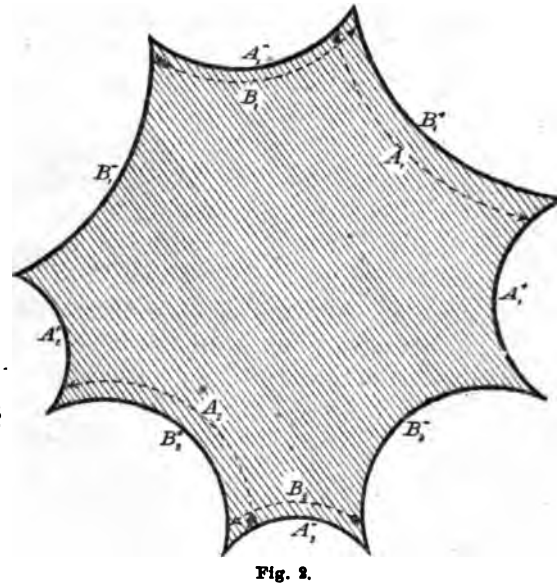


Fig. 2.

die zerschnittene Fläche $\overline{T}$ durch Auseinanderbiegen der Ränder und stetige Deformation mit Erhaltung des Zusammenhangs in ein ebenes schlichtes Flächenstück verwandelt, an dem man die Begrenzungsverhältnisse besser übersehen kann, als an der die Ebene stets mehrfach überdeckenden Riemann'schen Fläche $\overline{T}$ selbst.

Auf der unzerschnittenen Fläche T sind $2p$ unabhängige Periodenwege möglich. Es ist für meine Untersuchungen zweckmässig, dieselben nicht nur ihrem Sinne, sondern auch ihrer Lage nach genau festzulegen,

nämlich so, dass sie auf $\overline{T}$ je von einem negativen Ufer eines der Rückkehrschnitte zu dem entsprechenden positiven Ufer hinlaufen, und dass sie die zerschnittene Fläche $\overline{T}$ ganz zur Rechten haben. Es sollen also p Periodenwege $A_\varkappa$ längs $B_\varkappa^+$ von $A_\varkappa^-$ nach $A_\varkappa^+$, und p Periodenwege $B_\varkappa$ längs $A_\varkappa^-$ von $B_\varkappa^-$ nach $B_\varkappa^+$ verlaufen. Es ist dadurch zugleich der Riemann'schen Festsetzung genügt, dass die positive Richtung $B_\varkappa$ zur positiven Richtung $A_\varkappa$ so liegen soll, wie die Richtung der positiv imaginären Zahlen zur Richtung der positiven reellen Zahlen. (Ges. Werke S. 123).

Auf T existiren nun p linear unabhängige überall endliche Integrale, die in irgend einer Auswahl mit Angabe der unteren Grenze y und der oberen Grenze x als

$$w_1^{xy},\ w_2^{xy},\ \ldots\ w_p^{xy}$$

benannt sein sollen.

Die $2p$ Perioden, um welche sich diese Integrale vermehren, wenn man ihre obere Grenze einen Periodenweg $A_\varkappa$ oder $B_\varkappa$ durchlaufen lässt, seien durch folgendes Schema gegeben:

	A_1	$A_2 \ldots A_p$	B_1	$B_2 \ldots B_p$
w_1	ω_{11}	$\omega_{12} \ldots \omega_{1p}$	ω'_{11}	$\omega'_{12} \ldots \omega'_{1p}$
w_2	ω_{21}	$\omega_{22} \ldots \omega_{2p}$	ω'_{21}	$\omega'_{22} \ldots \omega'_{2p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$
w_p	ω_{p1}	$\omega_{p2} \ldots \omega_{pp}$	ω'_{p1}	$\omega'_{p2} \ldots \omega'_{pp}$

Die Definition der Integrale w_a^{xy} enthält noch insofern eine Unbestimmtheit, als der Integrationsweg von y nach x beliebig viele Periodenumläufe enthalten kann. Es mögen daher p Ausgangszweige

$$\overline{w}_1^{xy},\ \overline{w}_2^{xy},\ \ldots\ \overline{w}_p^{xy}$$

durch die Forderung festgelegt werden, dass der Integrationsweg ganz im Innern der zerschnittenen Fläche $\overline{T}$ verlaufen soll.

Ferner bedeute

$$P_{\xi\eta}^{xy}$$

ein Integral dritter Gattung mit den Grenzen x, y und den Parametern ξ, η, und zwar möge dasselbe so ausgewählt sein, dass es Vertauschung der Grenzen und Parameter zulässt.

Man kann ein solches bekanntlich als ein Doppelintegral ansehen, bei dem die eine Integration von η nach ξ, die andere von y nach x zu erstrecken ist.

Ein Ausgangszweig

$$\overline{P}_{\xi\eta}^{xy}$$

sei so gewählt, dass beide Integrationswege ganz innerhalb von $\overline{T}$ verlaufen. Durch diese Festsetzung ist $\overline{P}$ allerdings erst bis auf ganzzahlige Vielfache von $2i\pi$ definirt, doch hat diese Unbestimmtheit fürs Weitere keine unbequemen Folgen.

Die Perioden von $P_{\xi\eta}^{xy}$ als Function von x längs der Wege $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ lauten

$$-\eta_{1\varkappa}\, w_1^{\xi\eta} - \eta_{2\varkappa} w_2^{\xi\eta} - \cdots - \eta_{p\varkappa} w_p^{\xi\eta}$$

bezw.

$$-\eta'_{1\varkappa}\, w_1^{\xi\eta} - \eta'_{2\varkappa} w_2^{\xi\eta} - \cdots - \eta'_{p\varkappa} w_p^{\xi\eta},$$

unter $-\eta_{\alpha\varkappa}$, $-\eta'_{\alpha\varkappa}$ die Perioden der den w_α^{xy}, $P_{\xi\eta}^{xy}$ entsprechenden Normalcombinationen Y_α von Integralen 2. Gattung längs der Periodenwege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ verstanden*).

Die Perioden von $\overline{P}_{\xi\eta}^{xy}$ sind in gleicher Weise aus den $\overline{w}_\alpha^{\xi\eta}$ zusammengesetzt.

Ausserdem wächst $P_{\xi\eta}^{xy}$ noch um $+2\pi i$, so oft x einen solchen geschlossenen Weg beschreibt, welcher den Weg $(\eta\xi)$ von links nach rechts überschreitet, um $-2\pi i$, wenn von rechts nach links.

Das Verhalten von $P_{\xi\eta}^{xy}$ *bei Umläufen jeder der Grössen* y, ξ, η *allein* ergiebt sich aus dem Verhalten bei Umläufen von x allein vermittelst der Formeln:

$$P_{\xi\eta}^{xy} + P_{\xi\eta}^{yx} = 0,$$

$$P_{\xi\eta}^{xy} = P_{xy}^{\xi\eta}.$$

Schwieriger dagegen ist es, das Verhalten von $P_{\xi\eta}^{xy}$ und $\overline{P}_{\xi\eta}^{xy}$ bei *gleichzeitiger Veränderlichkeit aller vier Variablen* anzugeben. Dasselbe ist von Hrn. Burkhardt**) für den hyperelliptischen Fall genauer untersucht worden, doch hat seine Untersuchung allgemeine Gültigkeit für alle Fälle d. h. für alle Fälle mit der Vertauschbarkeit von Argument und Parameter. Ich kann mich ebenso wie Hr. Burkhardt bei Angabe des fraglichen Verhaltens darauf beschränken, x und ξ allein laufen zu lassen:

Es mache x einen solchen geschlossenen Umlauf $(x\,x)$, dem die Perioden ω_α, $-\eta_\alpha$, ξ einen Umlauf $(\xi\,\xi)$, welchem die Perioden ω'_α, $-\eta'_\alpha$ entsprechen. Es überschreite dabei x den Integrationsweg $(\eta\xi)$ l mal öfter von links nach rechts, als von rechts nach links, und den Weg $(\xi\xi)$ l_1 mal öfter von links nach rechts als von rechts nach links, wobei aber nur Ueberschreitungen an solchen Stellen zu zählen sind, welche ξ früher passirt als x; es seien endlich die entsprechenden Zahlen

*) Man vergleiche hier und im Folgenden überall die Darstellung Herrn Klein's in der bereits citirten Abhandlung in Math. Ann. Bd. 36.

**) Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen. Math. Ann. 32.

für ξ in Bezug auf den Integrationsweg (yx) und den Weg (xx) λ und λ_1. Dann ist die zugehörige Periode von $\overline{P}_{\xi\eta}^{xy}$ durch jeden der beiden folgenden Ausdrücke gegeben:

$$-\sum_\alpha \eta_\alpha \overline{w}_\alpha^{\xi\eta} - \sum_\alpha \eta'_\alpha \overline{w}_\alpha^{xy} - \sum_\alpha \eta'_\alpha \omega_\alpha + (l+\lambda+\lambda_1).2\pi i,$$

oder

$$-\sum_\alpha \eta_\alpha \overline{w}_\alpha^{\xi\eta} - \sum_\alpha \eta'_\alpha \overline{w}_\alpha^{xy} - \sum_\alpha \eta_\alpha \omega'_\alpha + (l+\lambda+l_1).2\pi i.$$

Durch Vergleichung dieser beiden verschiedenen Ausdrücke erhält man die Beziehung:

$$\sum_\alpha (\eta_\alpha \omega'_\alpha - \eta'_\alpha \omega_\alpha) = (l_1 - \lambda_1) 2\pi i,$$

eine Formel, aus der durch Specialisirung der Wege (xx) und $(\xi\xi)$ die bekannten *bilinearen Relationen zwischen den Perioden erster und zweiter Gattung* hervorgehen, die ich hier sowohl in der unmittelbar sich ergebenden *Weierstrass'schen Form*, wie in der *Riemann'schen Form* (Burkhardt § 9, 10) hinschreibe:

$$\sum_\alpha (\omega_{\alpha\varkappa}\eta_{\alpha\varkappa'} - \omega_{\alpha\varkappa'}\eta_{\alpha\varkappa}) = 0, \qquad \sum_\varkappa (\omega_{\alpha\varkappa}\omega'_{\beta\varkappa} - \omega_{\beta\varkappa}\omega'_{\alpha\varkappa}) = 0,$$

$$\sum_\alpha (\omega_{\alpha\varkappa}\eta'_{\alpha\varkappa'} - \omega'_{\alpha\varkappa'}\eta_{\alpha\varkappa}) = 0,\ \varkappa \gtrless \varkappa', \qquad \sum_\varkappa (\omega_{\alpha\varkappa}\eta'_{\beta\varkappa} - \omega'_{\alpha\varkappa}\eta_{\beta\varkappa}) = 0,\ \alpha \gtrless \beta,$$

$$\sum_\alpha (\omega_{\alpha\varkappa}\eta'_{\alpha\varkappa} - \omega'_{\alpha\varkappa}\eta_{\alpha\varkappa}) = -2\pi i, \qquad \sum_\varkappa (\omega_{\alpha\varkappa}\eta'_{\alpha\varkappa} - \omega'_{\alpha\varkappa}\eta_{\alpha\varkappa}) = -2\pi i,$$

$$\sum_\alpha (\omega'_{\alpha\varkappa}\eta'_{\alpha\varkappa'} - \omega'_{\alpha\varkappa'}\eta'_{\alpha\varkappa}) = 0, \qquad \sum_\varkappa (\eta_{\alpha\varkappa}\eta'_{\beta\varkappa} - \eta'_{\alpha\varkappa}\eta_{\beta\varkappa}) = 0.$$

§ 2.

Ganze algebraische Functionen und Formen auf der Riemann'schen Fläche.

Die Gesammtheit der algebraischen Functionen eines algebraischen Gebildes ist, wie schon oben betont, von der Auswahl der Riemann'schen Fläche unabhängig, d. h. unabhängig davon, welche der algebraischen Functionen man als unabhängige Variable ausgewählt hat. Auch die Theorie der Abel'schen Integrale, und damit alle Begriffsbestimmungen des vorigen Paragraphen sind von der speciellen Riemann'schen Fläche unabhängig.

Für die nunmehr folgende Betrachtung der algebraischen Formen und für die Ableitung ihrer Verallgemeinerungen ist es jedoch zweckmässig, eine Fläche ganz bestimmter Art, eine „kanonische Fläche"*)

*) Vergl. Klein Math. Ann. Bd. 36.

zu Grunde zu legen. Denn der Begriff der ganzen Functionen, und der algebraischen Formen in gewöhnlichem Sinne ist durchaus von der zufälligen Wahl der unabhängigen Variablen abhängig, während ich allerdings später zeigen werde, dass die verallgemeinerten Formen, die ich aufstellen werde, eine unabhängige Bedeutung besitzen; aber gerade, weil ich dies nachträglich beweisen kann, bin ich jetzt berechtigt, zur Vereinfachung der Darstellung mich einer kanonischen Fläche zu bedienen.

Eine kanonische Fläche ist eine solche, deren Verzweigungsstellen die 0*-Stellen einer ganzen algebraischen Function der Fläche sind.*

Die Blätterzahl einer kanonischen Fläche ist $m = \frac{2p-2}{d}$, *also ein Theiler von* $2p-2$ *oder* $2p-2$ *selbst, die Anzahl der Verzweigungsstellen* $2m + 2p - 2 = m(d+2)$.

Eine solche Fläche lässt sich sicher zu einem jeden algebraischen Gebilde herstellen. Für diese Sätze, wie überhaupt für die Einführung des Begriffs der Formen auf einer Riemann'schen Fläche vergleiche man ausser der schon mehrfach citirten Abhandlung von Herrn Klein in Math. Ann. Bd. 36 insbesondere die ausführliche Darstellung in Bd. II, S. 484ff. von Klein-Fricke: Theorie der elliptischen Modulfunctionen, woselbst auch ein Abriss der historischen Entwicklung dieses Gedankens gegeben wird.

Die unabhängige Variable der kanonischen Fläche, eine m-werthige algebraische Function, heisse fortan s.

In den niedersten Fällen $p = 0$, $p = 1$ sollen als kanonische Flächen die einfach überdeckte Ebene, bezw. die bekannte zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungspunkten dienen. Es ist also für $p = 0$ $m = 1$, $d = -2$, für $p = 1$ $m = 2$, $d = 0$ zu setzen, für $p > 1$ dagegen $m = \frac{2p-2}{d}$, $d \geqq 1$.

Dabei kann ich unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass alle Verzweigungspunkte der Fläche im Endlichen liegen.

Unter den algebraischen Functionen nehmen nun in Bezug auf die gewählte Fläche eine besondere Stellung die „*ganzen algebraischen Functionen der Fläche*" ein, d. h. diejenigen algebraischen Functionen, deren ∞-Punkte nur in den unendlich fernen Punkten der Fläche liegen.

Die einfachste ganze algebraische Function der Fläche ist die unabhängige Variable s selbst. Dieselbe wird an jeder der m unendlich fernen Stellen der Fläche je einfach unendlich, d. h. sie ist „vom ersten Grad". Allgemein versteht man unter dem *Grad einer ganzen algebraischen Function* die höchste Ordnung, mit der sie an einer der m unendlich fernen Stellen ∞ wird. Zu den ganzen algebraischen Functionen gehören insbesondere auch die ganzen rationalen Functionen von s.

Die ganzen algebraischen Functionen vom Grade d, insbesondere s^d, sind Quotienten je zweier überall endlichen Differentiale der Fläche

$$s^d = \frac{dw_1}{dw_2}.$$

Die ganze algebraische Function, deren Nullstellen die Verzweigungspunkte der kanonischen Fläche sind, hat die Gestalt

$$\frac{ds}{dw_2}.$$

Jede beliebige algebraische Function der Fläche lässt sich als Quotient zweier ganzen algebraischen Functionen darstellen. Man kann z. B. stets eine ganze rationale Function bilden, welche an den sämmtlichen im Endlichen gelegenen ∞-Stellen der darzustellenden Function verschwindet. Dann ist aber das Product dieser ganzen Function und der darzustellenden Function wieder eine ganze Function, die darzustellende Function also in der That der Quotient zweier ganzen Functionen.

Nun spaltet man die Variable s in zwei Variable s_1, s_2, so dass

$$s = \frac{s_1}{s_2}$$

ist, mit der Massgabe, *dass die Variablen s_1, s_2 nur so sich verändern dürfen, dass sie weder simultan verschwinden, noch eine oder beide ∞ werden.* Die hierdurch ausgeschlossenen Werthsysteme von s_1, s_2 heissen *„unerlaubte Werthsysteme"*. Der Werth $s = \infty$ kann dann nur auf die Weise erreicht werden, dass $s_2 = 0$ wird, $s_2 . s$ endlich bleibt. Daraus folgt:

Multiplicirt man eine ganze algebraische Function vom Grade ν mit s_2^{ν}, so entsteht eine homogene Function ν^{ten} Grades von s_1, s_2, welche für erlaubte Werthsysteme von s_1, s_2 nirgends ∞ wird, d. h. *„eine ganze algebraische Form ν^{ten} Grades"*.

Die Variablen s_1, s_2 selbst sind ganze algebraische Formen vom Grade 1.

Jede ganze algebraische Form vom Grade ν besitzt auf der Riemann'schen Fläche $m\nu$ Nullstellen.

Jede algebraische Function lässt sich als Quotient zweier ganzen algebraischen Formen gleichen Grades darstellen.

Es ist nun wichtig, festzusetzen, was man unter dem Verhalten eines Differentialausdruckes an einer Stelle des algebraischen Gebildes zu verstehen hat.

Sei s_0 irgend eine Stelle der Riemann'schen Fläche, ζ eine Function von s, welche die Umgebung der Stelle s_0 der Riemann'schen Fläche auf die einfach überdeckte Umgebung der Nullstelle der ζ-Ebene abbildet. Dann sagt man, ein Differentialausdruck dJ verschwinde an der Stelle s_0 von der μ^{ten} Ordnung, wenn er sich verhält wie $c.\zeta^{\mu}.d\zeta$,

unter c eine an der Stelle z_0 endliche und von 0 verschiedene Grösse verstanden.

Nach dieser Definition verschwindet das Differential dz in jedem μ-fachen Verzweigungspunkt der Fläche (d. h. in welchem $\mu + 1$ Blätter cyklisch zusammenhängen) in der μ^{ten} Ordnung, und wird an jeder der Stellen $z = \infty$ von der 2^{ten} Ordnung ∞.

Die Differentialform zweiten Grades

$$(z, dz) = z_1 dz_2 - z_2 dz_1 = -z_2^2 dz$$

wird daher nirgends ∞ und verschwindet nur in den Verzweigungspunkten der Fläche je mit der Multiplicität des betr. Verzweigungspunktes.

Nun ist eine kanonische Fläche durch die Existenz einer *ganzen algebraischen Form* $(d+2)^{\text{ten}}$ *Grades*

$$G(z_1, z_2)$$

charakterisirt, welche nur an den Verzweigungspunkten der Fläche je mit der Multiplicität des Verzweigungspunktes verschwindet.

Daher ist

$$dw_s = -\frac{(z, dz)}{G(z_1, z_2)}$$

eine überall endliche und von 0 *verschiedene Differentialform vom Grade $-d$.*

Bedeutet nun dw_α^s irgend eines der p auf der Riemann'schen Mannigfaltigkeit existirenden überall endlichen Differentiale, so folgt, dass

$$\varphi_\alpha(z_1, z_2) = \frac{dw_\alpha^s}{dw_s}$$

eine ganze Form vom Grade d ist, welche also $m \cdot d = 2p - 2$ Nullstellen besitzt.

Umgekehrt, wenn $\varphi(z_1, z_2)$ eine ganze Form vom Grade d ist, so ist

$$dw^s = \varphi(z_1, z_2) \cdot dw_s$$

ein überall endliches Differential.

Es giebt also p linear unabhängige ganze algebraische Formen vom Grade d in z_1, z_2:

$$\varphi_\alpha(z_1, z_2) = \frac{dw_\alpha^s}{dw_s};$$

dieselben sind den p linear unabhängigen überall endlichen Differentialen proportional und besitzen mit ihnen dieselben Nullstellen.

Man könnte, — wie dies Hr. Klein in Math. Ann. 36 thut — von den φ_α ausgehen, indem man dieselben, oder auch nur zwei von ihnen geradezu als unabhängige Variable definirt. Man würde auch dadurch zu einer kanonischen Curve bezw. Fläche gelangen, für welche eben $d = 1$ ist. Diese Darstellung durch die φ_α versagt jedoch in den Fällen $p = 0$ und $p = 1$. Ich habe daher, wie auch Herr Klein in

seiner Vorlesung vom W. S. 88/89 es gethan hatte, gleich von vornherein die allgemeinste kanonische Fläche eingeführt, zumal ich dabei die Mögligkeit habe, durch Wahl einer kanonischen Fläche mit möglichst geringer Blätterzahl, also möglichst hohem Werthe von d, zu erreichen, dass nicht allein die ganzen algebraischen Formen der φ_α, sondern noch eine grosse Anzahl anderer Formen, die in den φ_α von gebrochenem Grade, also Wurzelformen sind, als ganze algebraische Formen der z_1, z_2 erscheinen.

Die Differentialform $d\omega$, hat, welche kanonische Darstellung man auch zu Grunde legen mag, doch immer dieselbe absolute Bedeutung, gegeben durch die als Definition anzusehende Formel

$$d\omega = \frac{dw_\alpha^z}{\varphi_\alpha(z_1, z_2)}.$$

$d\omega$, ist in z_1, z_2 vom Grade $-d$, in dem φ_α vom Grade -1. Ebenso unabhängig von der speciellen Darstellung sind die im Folgenden mit Hülfe von $d\omega$, abzuleitenden weiteren Begriffe.

§ 3.

Aufstellung der Klein'schen Primform.

Im Falle $p = 0$ ist $(zx) = z_1x_2 - z_2x_1$ eine algebraische Form, die nur an der einen Stelle x des Gebildes verschwindet; hierauf beruht es, dass man alle algebraischen Formen und Functionen des Falles $p = 0$ als Producte und Quotienten solcher Formen (zx) darstellen kann.

Bei höherem p sind aber algebraische Formen mit nur einer Nullstelle unmöglich. Man muss dann transcendente Functionen oder Formen suchen, die nirgends ∞ werden und nur an einer beliebigen Stelle verschwinden.

Eine solche Form ist die von Hrn. Klein in Math. Ann. 36 zuerst in allgemeiner Weise aufgestellte Primform (vergl. die dort angegebenen Citate).

Die Klein'sche Primform ist durch folgende Formel definirt:

$$\Omega(z, e) = \lim_{\substack{dz=0 \\ de=0}} \sqrt{-d\omega_z \cdot d\omega_e \cdot e^{-P_{z,e}^{z+dz,\, e+de}}},$$

unter $P_{\xi\eta}^{zy}$ das in § 1 besprochene Integral 3. Gattung verstanden.

Dieses $\Omega(z, e)$ ist sowohl in den Variablen z_1, z_2, wie in e_1, e_2 eine Form vom Grade $-\frac{d}{2}$, in den $\varphi_\alpha(z_1, z_2)$ sowie den $\varphi_\alpha(e_1, e_2)$ je vom Grade $-\frac{1}{2}$.

Damit $\Omega(z, e)$ nur eine einzige analytische Function vorstellt, muss

die Bedeutung des Integrals $P_{z,e}^{z+dz,e+de}$ dahin eingeschränkt werden, dass die Integrationen von e nach z und von $e+de$ nach $z+dz$ in der Weise gleichzeitig ausgeführt werden, dass die oberen Grenzen beider Integrationen einander immer sehr nahe bleiben. Ausserdem muss noch eventuell das Vorzeichen der Quadratwurzel festgelegt werden.

Aber auch so noch ist $\Omega(z, e)$ eine auf der Fläche vieldeutige Form. Ich übertrage die in § 1 angegebene Zerschneidung der beliebigen Riemann'schen Fläche, und nenne auch die zerschnittene kanonische Fläche $\overline{T}$. Ich grenze nun von $\Omega(z, e)$ einen auf $\overline{T}$ eindeutigen oder doch höchstens zweideutigen Zweig ab:

$$\overline{\Omega}(z, e) = \lim_{\substack{dz=0 \\ de=0}} \sqrt{-d\omega_z . d\omega_e . e^{-P_{z,e}^{z+dz,e+de}}} .$$

Jeder andere Zweig von $\Omega(z, e)$ unterscheidet sich von diesem Ausgangszweige um einen später noch genauer zu bestimmenden Factor von der Form:

$$\pm e^{\sum_a \eta_a \left(w_a^{ze} + \frac{1}{2}\omega_a\right)} .$$

Leicht ist zu zeigen, *dass* $\overline{\Omega}(z, e)$ *an jeder von* e *verschiedenen Stelle der Riemann'schen Fläche endlich, von* 0 *verschieden und unverzweigt ist*, d. h. dass es in einem $(\nu-1)$-fachen Verzweigungspunkt der Fläche eine Entwicklung folgender Gestalt besitzt:

$$a\left(\frac{(zy)}{(z_0 y)}\right)^{-\frac{d}{2}} \cdot \left\{1 + \mathfrak{P}_1\left(\left(\frac{(zz_0)}{(zy)}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right)\right\} \qquad a = \overline{\Omega}(z_0, e) \gtrless 0$$

worin y irgend einen von z_0 verschiedenen Punkt und $\mathfrak{P}_1$ hier und im Folgenden eine nach ganzen positiven Potenzen des Argumentes fortschreitende Reihe bedeutet, deren Glieder niedrigster Ordnung mindestens von der ersten Ordnung sind. Für einen gewöhnlichen Punkt ist dabei einfach $\nu = 1$ zu setzen.

Ich will mich beim Beweis hierfür nicht aufhalten. Dagegen muss ich das *Verhalten von* $\overline{\Omega}(z, e)$ *in der Umgebung des Punktes* e genauer untersuchen, um zugleich den ersten Coefficienten der daselbst gültigen Reihenentwicklung zu bestimmen.

Es sei e der Allgemeinheit halber ein $(\nu-1)$-facher Verweigungspunkt der Fläche.

Um nun Gestalt und ersten Coefficienten der Entwicklung in der Umgebung von $z = e$ zu bestimmen, nehme ich vorläufig e wie z nur in der Nähe des betr. Verzweigungspunktes a gelegen an, um erst nachträglich e in den Verzweigungspunkt selbst rücken zu lassen. Setzt man also:

$$z = a + \zeta^\nu, \quad z + dz = a + (\zeta + d\zeta)^\nu,$$
$$e = a + \varepsilon^\nu, \quad e + de = a + (\varepsilon + d\varepsilon)^\nu$$

so verhält sich $-\overline{P}_{s,e}^{s+ds,\,e+de}$ wie

$$\log \frac{-(\zeta - \varepsilon + d\zeta)\,.\,(\zeta - \varepsilon - d\varepsilon)}{d\zeta\,.\,d\varepsilon} + \mathfrak{P}_1(\zeta + d\zeta,\ \varepsilon + d\varepsilon;\ \zeta,\ \varepsilon)$$

unter $\mathfrak{P}_1$ eine nach ganzen positiven Potenzen der Argumente fortschreitende Reihe verstanden, deren niedrigste Glieder in jedem Argumentpaare von der ersten Dimension sind.

Infolgedessen verhält sich $\overline{\Omega}(z, e)$ wie:

$$\sqrt{\frac{d\omega_z}{d\zeta}\cdot\overline{\frac{d\omega_z}{d\varepsilon}}}\cdot(\zeta-\varepsilon)\cdot e^{\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1(\zeta,\varepsilon;\zeta,\varepsilon)},$$

oder, wenn ich jetzt $\varepsilon = 0$, $a = e$ setze, wie

$$\sqrt{\frac{d\omega_z}{d\zeta}\cdot\lim_{\substack{z_1=e_1\\ z_2=e_2}}\overline{\left(\frac{d\omega_z}{d\zeta}\right)}}\cdot\zeta\cdot e^{\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1(\zeta,0;\zeta,0)}.$$

Dabei kann das Vorzeichen der Quadratwurzel noch beliebig festgesetzt werden, wodurch erst die Definition von $\overline{\Omega}(z, e)$ ihre volle Bestimmtheit erhält. Dasselbe soll nun so festgelegt werden, dass für $z_1 = e_1$, $z_2 = e_2$ die Quadratwurzel den Werth $+\lim_{\substack{z_1=e_1\\ z_2=e_2}}\left(\frac{d\omega_z}{d\zeta}\right)$ besitzt. Ferner ist

$$d\omega_z = \frac{z_2^{\nu}}{G(z_1, z_2)}\,dz,$$

also

$$\frac{d\omega_z}{d\zeta} = \nu\cdot\frac{z_2^{\nu}\cdot\zeta^{\nu-1}}{G(z_1,z_2)} = \nu\cdot\frac{z_2^{\frac{1+\nu}{\nu}}\cdot e_2^{\frac{1-\nu}{\nu}}}{G(z_1,z_2)}\cdot(ze)^{\frac{\nu-1}{\nu}}.$$

Die Entwicklung von $G(z_1, z_2)$ an der Stelle e laute:

$$G(z_1,z_2) = G'(e_1,e_2)\left(\frac{(zy)}{(ey)}\right)^{d+2-\frac{\nu-1}{\nu}}\cdot(ze)^{\frac{\nu-1}{\nu}}\left\{1+\mathfrak{P}_1\left(\left(\frac{(ze)}{(zy)}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right)\right\}.$$

Dann hat $\frac{d\omega_z}{d\zeta}$ eine Entwicklung:

$$\frac{d\omega_z}{d\zeta} = \frac{\nu\cdot e_2^{\frac{2}{\nu}}}{G'(e_1,e_2)}\cdot\left(\frac{(zy)}{(ey)}\right)^{-d}\left\{1+\mathfrak{P}_1'\left(\left(\frac{(ze)}{(zy)}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right)\right\}.$$

Dazu ist:

$$\lim_{\substack{z_1=e_1\\ z_2=e_2}}\left(\frac{d\omega_z}{d\zeta}\right) = \frac{\nu\cdot e_2^{\frac{2}{\nu}}}{G'(e_1,e_2)},$$

$$\zeta = (z-e)^{\frac{1}{\nu}} = e_2^{-\frac{2}{\nu}}\left(\frac{(zy)}{(ey)}\right)^{-\frac{1}{\nu}}\cdot(ze)^{\frac{1}{\nu}}\left\{1+\mathfrak{P}_1''\left(\frac{(ze)}{(zy)}\right)\right\},$$

$$e^{\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1(\zeta,0;\zeta,0)} = 1+\mathfrak{P}_2\left(\left(\frac{(ze)}{(zy)}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right).$$

Hieraus in Verbindung mit der Festsetzung über das Vorzeichen der Quadratwurzel folgt

$$\overline{\Omega}(z, e) = \frac{\nu}{G'(e_1, e_2)} \cdot \left(\frac{(zy)}{(ey)}\right)^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{\nu}} (ze)^{\frac{1}{\nu}} \left\{1 + \mathfrak{P}_1'''\left(\left(\frac{(ze)}{(zy)}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right)\right\}.$$

Für $\nu = 1$ ist $G'(e_1, e_2) = G(e_1, e_2)$ zu setzen.

An der Stelle e verschwindet also $\overline{\Omega}(z, e)$ immer von der ersten Ordnung auf der Riemann'schen Fläche.

Da alle übrigen Zweige der Form $\Omega(z, e)$ sich nur um einen nirgends 0 oder ∞ werdenden Exponentialfactor von $\overline{\Omega}(z, e)$ unterscheiden, so verschwindet $\Omega(z, e)$ auch bei ganz beliebigen Umläufen von z_1, z_2 immer dann und nur dann, und zwar von der ersten Ordnung, so oft der Punkt z mit dem Punkte e zusammenfällt. Der Coefficient des Verschwindens ist dabei freilich jedesmal ein anderer.

§ 4.

Periodicität der Klein'schen Primform.

Es ist nun der Exponentialfactor, mit dem sich $\overline{\Omega}(z, e)$ multiplicirt, wenn z_1, z_2 solche simultane geschlossene Wege beschreiben, dass z einen geschlossenen Umlauf auf der Riemann'schen Fläche ausführt, genauer zu bestimmen, als auf Seite 272 angegeben ist. Nicht nur ist das dort unbestimmt gebliebene Vorzeichen anzugeben, sondern man muss auch von jeder beliebigen Potenz von $\overline{\Omega}(z, e)$ den Multiplicator anzugeben im Stande sein.

D. h. man muss den Zuwachs von

$$\log \overline{\Omega}(z, e) = -\frac{1}{2}\overline{P}_{z,e}^{z+dz,\, e+de} + \frac{1}{2}\log d\omega_z + \frac{1}{2}\log d\omega_e + \frac{1}{2}\pi i$$

längs irgend eines auf der Riemann'schen Fläche geschlossenen Weges des Werthsystems z_1, z_2 berechnen.

Dabei ist an jeder Stelle z des Weges (zz) — so soll ein in z beginnender und wieder im selben Punkte z endigender Weg bezeichnet werden — das Element dz unendlich klein anzunehmen, der Weg $(z + dz,\ z + dz)$ also unendlich nahe an (zz) hinzuführen.

1) Allgemeine Periodicität.

Der Werth von $\log \overline{\Omega}(z, e)$ ist an jeder Stelle des Weges (zz) von der augenblicklichen Richtung des Elementes dz unabhängig. Denn lässt man $z + dz$ einen positiven Umlauf um z ausführen (Fig, 3), so wächst zwar $P_{z,e}^{z+dz,\, e+de}$,

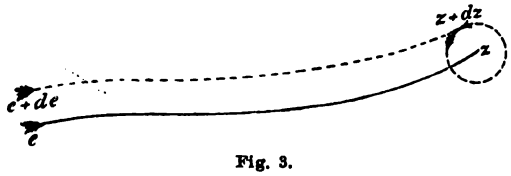


Fig. 3.

zugleich aber auch $\log d\omega_z$ um $2\pi i$, so dass $\log \overline{\Omega}(z, e)$ selbst un-

geändert bleibt. Dasselbe gilt, wenn $z + dz$ nur einen Theil eines Umlaufs um z beschreibt.

Man kann daher unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass der Punkt $z + dz$, und damit der Weg $(z+dz, z+dz)$ immer links von dem von z zu durchlaufenden Wege bleibt. Dasselbe kann man längs des Integrationsweges (ez) voraussetzen.

Dies angenommen, kommen, wenn wir nun auf $-\frac{1}{2}\overline{P}^{z+dz,\,e+de}_{z,\,e}$ die Formel von Seite 267 anwenden wollen, für die Bestimmung der Zahlen l, λ, l_1, λ_1 nur diejenigen Stellen in Betracht, wo der Weg (zz) den Weg (ez) oder den schon durchlaufenen Theil von (zz) trifft oder verlässt oder auch überkreuzt.

Die Stellen, wo z auf (ez) oder den schon durchlaufenen Theil von (zz) auftrifft, nenne ich Begegnungspunkte und unterscheide sie in linke (a) und rechte (b); die Stellen, wo z die Strecke (ez) oder (zz) verlässt, Trennungspunkte, welche ich wieder in linke (c) und rechte (d) unterscheide. Ferner unterscheide ich alle diese Punkte in gleichläufige (1) und gegenläufige (2). Die Kreuzungspunkte endlich unterscheide ich in linke (3) Combination eines linken Begegnungs- und eines rechten Trennungspunktes) und rechte (4) (rechter Begegnungs- und linker Trennungspunkt). Zum Verständniss der Figuren bemerke ich, dass die

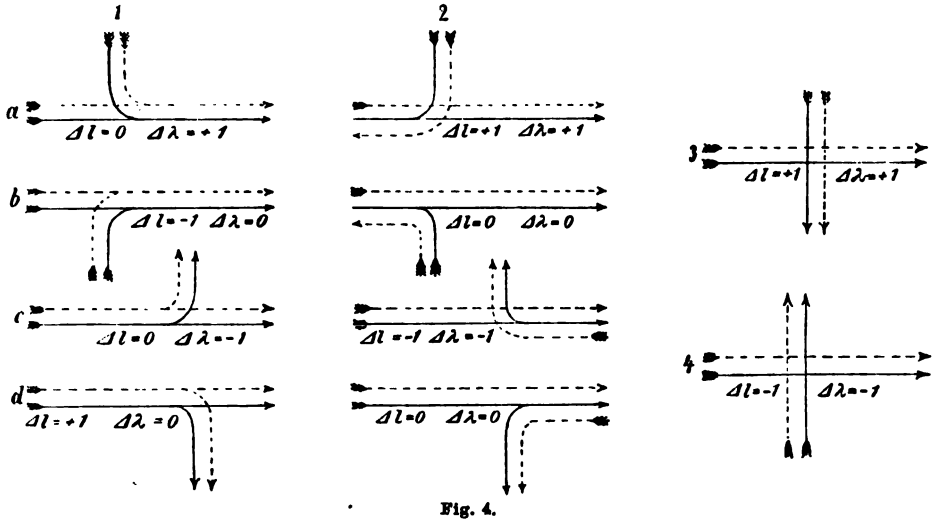


Fig. 4.

ausgezogene Linie immer den Weg von z, die gestrichelte den Weg von $z+dz$ bedeutet; dabei soll der wagrechte Curvenzweig immer der zuerst zu durchlaufende sein.

Nach Seite 267 entspricht nun jedem dieser Punkte je ein Increment Δ der Zahlen l, λ oder l_1, λ_1, je nachdem der betr. Punkt auf (ez)

oder $(\varepsilon\varepsilon)$ liegt, und zwar so, wie unmittelbar unter jeder einzelnen Figur angegeben ist. Dabei rechnen gleichläufige Begegnungen in z selbst zu $(e\varepsilon)$ und den früher daselbst ankommenden Zweigen von $(\varepsilon\varepsilon)$, gleichläufige Trennungen zu den früher daselbst abgehenden Zweigen von $(\varepsilon\varepsilon)$. Gegenläufige Begegnungen und Trennungen, sowie Kreuzungen, hat man als Combinationen von gleichläufigen Begegnungen und Trennungen demgemäss auf $(e\varepsilon)$ und $(\varepsilon\varepsilon)$ zu vertheilen.

Endlich bilde man

$$l = \sum \Delta l, \quad l_1 = \sum \Delta l_1,$$
$$\lambda = \sum \Delta \lambda, \quad \lambda_1 = \sum \Delta \lambda_1.$$

Dann lautet der Zuwachs von $-\frac{1}{2}\overline{P}_{s,e}^{s+ds,e+de}$ längs des Periodenweges $(\varepsilon\varepsilon)$ folgendermassen:

$$\sum_\alpha \eta_\alpha \left(\overline{w}_\alpha^{se} + \tfrac{1}{2}\omega_\alpha\right) - (l + \lambda + \lambda_1)\pi i$$

oder

$$\sum_\alpha \eta_\alpha \left(\overline{w}_\alpha^{se} + \tfrac{1}{2}\omega_\alpha\right) - (l + \lambda + l_1)\pi i,$$

welche Ausdrücke natürlich identisch sein müssen, woraus

$$l_1 = \lambda_1$$

folgt, eine auch geometrisch leicht zu bestätigende Identität.

Hierzu tritt noch der Zuwachs von $\frac{1}{2}\log d\omega_s$, ds immer nach derselben Seite des Weges $(\varepsilon\varepsilon)$ gerichtet gedacht, oder auch, was denselben Zuwachs giebt, ds immer in der Fortschreitungsrichtung angenommen. Dabei sind zugleich ausser dem Wege von $s = \frac{s_1}{s_2}$ die Wege von s_1 und s_2 selbst zu berücksichtigen, da $d\omega_s$ eine Form von s_1, s_2 ist. Jedenfalls ist diese Aufgabe auf rein algebraischem Wege lösbar.

2) Zurückführung auf Elementarperioden.

Damit wäre das Problem für den allgemeinsten Periodenweg principiell gelöst, doch noch in wenig übersichtlicher Form. Zu einer besseren Uebersicht, und insbesondere zu einer formelmässigen Zurückführung auf gewisse Elementarperioden gelangt man, wenn man den allgemeinen Weg in gewisse Wege besonders einfachen Charakters zerlegt.

Zuerst sondere ich, um den Einfluss der in der Werthänderung von s_1, s_2 enthaltenen simultanen Umläufe um 0 bequem berücksichtigen zu können, von $\log \overline{\Omega}(s, e)$ in folgender Weise eine „Function" ab:

$$\log \overline{\Omega}(s,e) = -\frac{d}{2}\log s_2 + \log\left(s_2^{\frac{d}{2}}\overline{\Omega}(s,e)\right);$$

dann untersuche ich zunächst die Periode des zweiten Theils und füge endlich noch die Aenderung des ersten Theils hinzu.

Man muss nun überlegen, in welcher Weise man einen beliebigen Periodenweg stetig deformiren darf, ohne die Periode der Function

$$\log\left(z_2^{\frac{d}{2}}\,\Omega(z,e)\right) = -\frac{1}{2}\,\overline{P}_{z,e}^{z+dz,\,e+de} + \frac{1}{2}\log\left(z_2^d\,d\omega_z\right) + \frac{1}{2}\log d\omega_e + \frac{1}{2}\,\pi i$$

zu ändern.

Indem man geometrisch den Einfluss einer Verschiebung des Weges auf die Zahlen $l, \lambda; l_1, \lambda_1$ feststellt, ergiebt sich, dass für $-\frac{1}{2}\,\overline{P}_{z,e}^{z+dz,\,e+de}$ der einzige singuläre Punkt, über den man den Periodenweg nicht verschieben darf, der Punkt e ist. Für $\frac{1}{2}\log\left(z_2^d\,d\omega_z\right)$ sind aber die Punkte $z_2 = 0$, d. h. $z = \infty$ singulär und für den Periodenweg unüberschreitbar.

Es sind daher alle Deformationen gestattet, bei welchen der Weg (zz) *weder über den Punkt* e, *noch über einen der* m *Punkte* $z = \infty$ *hinwegstreift.* Insbesondere kann man beliebig viele Stellen des Weges (zz) an den Punkt z selbst heranziehen. Durch Einlegung solcher Durchgänge durch z kann man den allgemeinsten Periodenweg in eine Reihenfolge solcher Abschnitte zerlegen, dass jeder einzelne Abschnitt einen besonders elementaren Charakter besitzt. Es ergeben sich dabei folgende 4 Arten solcher Elementarwege:

1) *Gewöhnliche Schleifen*, d. h. Wege, welche ganz in $\overline{T}$ verlaufen und sich ohne Ueberstreichung eines singulären Punktes auf einen gewöhnlichen Punkt zusammenziehen lassen.

2) *Umläufe um* ∞, d. h. Wege die ganz in $\overline{T}$ verlaufen, und sich ohne Ueberstreichung eines singulären Punktes auf einen unendlich kleinen Kreis um einen der Punkte $z = \infty$ zusammenziehen lassen.

3) *Umläufe um* e, d. h. in $\overline{T}$ verlaufende Wege, die sich ohne Ueberstreichung eines singulären Punktes auf einen Umlauf um den Punkt e zusammenziehen lassen.

4) *Elementare Periodenwege*, d. h. solche Wege, die das auf der Riemann'schen Fläche construirte Querschnittsystem nur einmal überschreiten und sich auf $\overline{T}$ ohne Ueberstreichung eines singulären Punktes in einen positiv oder negativ durchlaufenen Weg $A_\varkappa$ oder $B_\varkappa$ deformiren lassen.

Ich untersuche nun den Einfluss jedes einzelnen solchen Elementarwegs:

1) *Gewöhnliche Schleifen.*

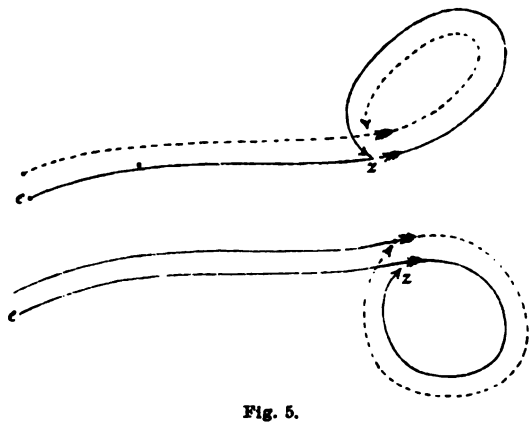


Fig. 5.

Eine gewöhnliche Schleife (Fig. 5) lässt sich, je nachdem sie in positivem oder negativem Sinne durchlaufen wird, entweder auf einen positiven Umlauf von z um $z + dz$, oder auf einen negativen von $z + dz$ um z zusammenziehen. In beiden Fällen ist wegen der Unabhängigkeit des Werthes $\log \Omega(z, e)$ von der Richtung des Elementes dz die Periode $= 0$. *Gewöhnliche Schleifen können also unberücksichtigt bleiben.*

2) *Umläufe um* ∞.

Die m Punkte $z = \infty$, oder $z_2 = 0$ sind nur für $\log\left(z_2^{\frac{1}{2}d}\,\Omega(z, e)\right)$, nicht aber für $\log \Omega(z, e)$ selbst singulär. Ein Umlauf um einen Punkt $z = \infty$ ist daher, unter a einen Werth z verstanden, dessen m zugehörige Punkte sämmtlich ausserhalb der betr. Schleife liegen, für $\log\left((za)^{\frac{1}{2}d}\,\Omega(z, e)\right)$ nur eine gewöhnliche Schleife. Ein Umlauf um einen Punkt $z = \infty$ hat also auf $\log\left(z_2^{\frac{1}{2}d}\,\Omega(z, e)\right)$ denselben Einfluss, wie auf $\log\left(\frac{z_2}{(za)}\right)^{\frac{1}{2}d}$, d. h.

Jedem positiven Umlauf um einen der Punkte $z = \infty$ *entspricht eine Periode* $+\frac{d}{2}\cdot 2\pi i$, *einem negativen Umlauf eine Periode* $-\frac{d}{2}\cdot 2\pi i$ *der Function* $\log\left(z_2^{\frac{1}{2}d}\,\Omega(ze)\right)$.

3) *Umläufe um e.*

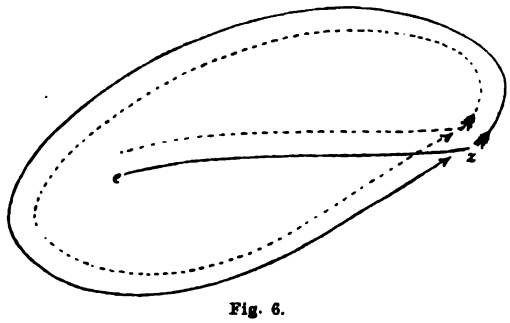


Fig. 6.

Wendet man auf einen positiven Umlauf von z um e (Fig. 6) die oben entwickelten allgemeinen Methoden an, so ergiebt sich

$$l = -1, \quad \lambda = 0$$

$$l_1 = 0, \quad \lambda_1 = 0$$

$$l + \lambda + \lambda_1 = l + \lambda + l_1 = -1.$$

Es wächst also, da $\eta_\alpha = 0$ und $\omega_\alpha = 0$ ist, $-\frac{1}{2}\overline{P}_{z,e}^{z+dz,\,e+de}$ um $+\dot{\pi}\dot{\imath}$. Gleichzeitig aber erfährt $\frac{1}{2}\log z_2^d\, d\omega_z$ einen Zuwachs von $+\pi i$. Also:

Jedem positiven Umlauf um $z = e$ entspricht eine Periode $+2\pi i$; jedem negativen eine Periode $-2\pi i$ von $\log\left(z_2^{\frac{1}{2}d}\,\overline{\Omega}(ze)\right)$.

4) *Elementare Periodenwege.*

Infolge der Festsetzung, dass die Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, positiv durchlaufen, die zerschnittene Fläche $\overline{T}$ zur Rechten haben, kann man für jeden in $A_\varkappa$ oder $B_\varkappa$ deformirbaren Weg annehmen, dass derselbe

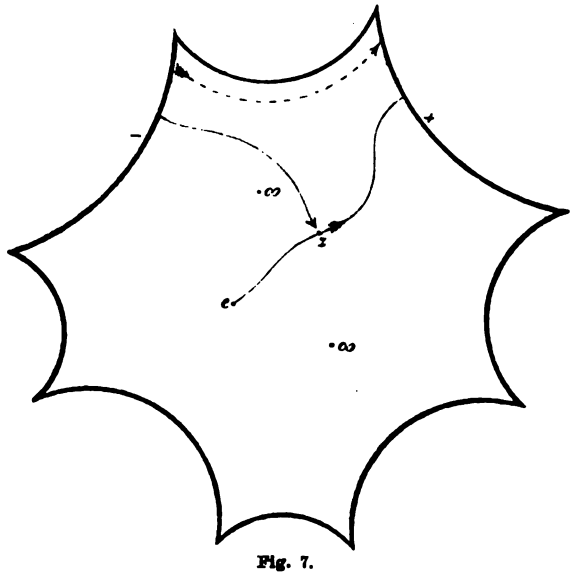


Fig. 7.

weder sich selbst, noch (ez) überschreitet und positiv durchlaufen in z von der linken Seite wieder ankommt (Fig. 7). Es ist also für einen positiven Elementarperiodenweg:

$$\begin{matrix} l = 0, & l_1 = 0, \\ \lambda = +1, & \lambda_1 = 0, \end{matrix} \qquad l + \lambda + \lambda_1 = l + \lambda + l_1 = +\dot{1},$$

für einen negativen Elementarperiodenweg dagegen

$$\begin{matrix} l = -1, & l_1 = 0, \\ \lambda = 0, & \lambda_1 = 0, \end{matrix} \qquad l + \lambda + \lambda_1 = l + \lambda + l_1 = -\dot{1}.$$

Die Function $-\frac{1}{2}\overline{P}_{z,e}^{z+dz,\,e+de}$ vermehrt sich also um

$$\sum_\alpha \pm \eta_{\alpha\varkappa}\left(\overline{w}_\alpha^{ee} \pm \tfrac{1}{2}\omega_{\alpha\varkappa}\right) \mp \pi i,$$

wenn der Weg mit einem positiv bezw. negativ zu durchlaufenden Wege $A_\varkappa$ äquivalent ist, dagegen um

$$\sum \pm \eta'_{a\varkappa}\left(\overline{w}_a^{s\varepsilon} \pm \tfrac{1}{2}\,\omega'_{a\varkappa}\right) \mp \pi i,$$

wenn der Weg mit einem positiven bezw. negativen Wege $B_\varkappa$ äquivalent ist. Hierzu kommt nun noch der Zuwachs, den $\frac{1}{2}\log\left(z_2^d\, d\omega_s\right)$ längs des Weges erhält. Dieser Zuwachs ist derselbe, wie längs $A_\varkappa$ oder $B_\varkappa$ selbst.

Es sei nun $(n_\varkappa + 1)\,2\pi i$ der Zuwachs von

$$\log\left(z_2^d\, d\omega_s\right) = \log\left(z_2^{d+2} \cdot \frac{dz}{G(z_1, z_2)}\right)$$

längs des Weges $A_\varkappa$, $(n_\varkappa' + 1)\,2\pi i$ derselbe längs $B_\varkappa$, beide Wege positiv durchlaufen; der Zuwachs bei negativer Durchlaufung ist also $\mp (n_\varkappa + 1)\,2\pi i$ bezw. $-(n_\varkappa' + 1)\,2\pi i$.

Dann ist die Periode von $\log\left(z_2^{\frac{1}{2}d}\,\Omega(s, \varepsilon)\right)$ *längs des Weges* $A_\varkappa$*:*

$$\sum_a \pm \eta_{a\varkappa}\left(\overline{w}_a^{s\varepsilon} \pm \tfrac{1}{2}\,\omega_{a\varkappa}\right) \pm n_\varkappa \pi i,$$

längs des Weges $B_\varkappa$*:*

$$\sum_a \pm \eta'_{a\varkappa}\left(\overline{w}_a^{s\varepsilon} \pm \tfrac{1}{2}\,\omega'_{a\varkappa}\right) \pm n_\varkappa' \pi i,$$

wo die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, je nachdem der Periodenweg im positiven oder negativen Sinne durchlaufen wird.

3) Zusammensetzung der Elementarperioden.

Der allgemeinste Periodenweg lässt sich durch Einlegung von Durchgängen durch s an geeigneten Stellen in eine Reihenfolge von Elementarwegen 1), 2), 3), 4) zerlegen. Da den Wegen 1), 2), 3) nur constante, von s unabhängige Perioden entsprechen, so ist für die Bestimmung der Gesammtperiode nicht allein ihre gegenseitige Reihenfolge, sondern auch die Reihenfolge, in der sie etwa zwischen die Wege 4) eingeschaltet sind, gleichgültig. Anders ist es dagegen mit der gegenseitigen Aufeinanderfolge der Elementarperiodenwege 4).

Ich untersuche zuerst ganz allgemein, *welche Periode einem aus zwei Wegen von bekannter Periode zusammengesetzten Wege entspricht.*

Es möge der erste Weg, den ich (I) nenne, die Periode besitzen:

$$\sum_a \eta_a^{(1)}\left(w_a^{s\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\,\omega_a^{(1)}\right) + n^{(1)}\pi i,$$

der zweite, (II) benannt, die Periode:

$$\sum_a \eta_a^{(2)} \left(\overline{w}_a^{s\varepsilon} + \tfrac{1}{2} \omega_a^{(2)} \right) + n^{(2)} \pi i.$$

Ferner möge der zweite Weg den ersten $\nu^{(12)}$ mal öfter von rechts nach links, als von links nach rechts überschreiten; diese Zahl $\nu^{(12)}$ ist von Deformationen der beiden Wege unabhängig, da Kreuzungspunkte dabei nur paarweise entstehen oder verschwinden können.

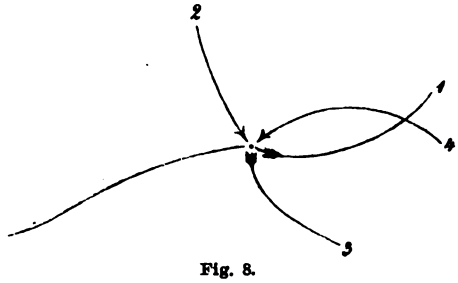


Fig. 8.

Ziehe ich nun beide Wege an den Punkt s heran, so entstehen ausser den schon vorhandenen $\nu^{(12)}$ gegenseitigen Schnittpunkten noch zwei neue, von denen der eine in den Punkt s fällt. Die Umgebung des Punktes s hat dann etwa das durch nebenstehende Fig. 8 vorgestellte Aussehen; dabei werden die einzelnen in s zusammenstossenden Zweige in der durch die beigesetzten Zahlen gekennzeichneten Reihenfolge durchlaufen (also $1 + 2 = \mathrm{I}$, $3 + 4 = \mathrm{II}$).

Die Zahlen $n^{(1)}$ und $n^{(2)}$ setzen sich zusammen einmal aus dem Antheil, welcher von dem Begegnungspunkte in s herrührt:

$$-(l + \lambda + \lambda_1)^{(1)} = -1$$

bezw.

$$-(l + \lambda + \lambda_1)^{(2)} = -1,$$

andererseits aus dem von etwaigen Selbstkreuzungen des Weges (I) bezw. (II) und der Aenderung von $\frac{1}{2} \log s_2^d \, dw_s$ herrührenden Antheil:

$$n^{(1)} + 1$$

bezw.

$$n^{(2)} + 1.$$

Dem aus (I) und (II) zusammengesetzten Wege (I, II) entspricht nun eine Periode folgender Gestalt:

$$\sum (\eta_a^{(1)} + \eta_a^{(2)}) \left(\overline{w}_a^{s\varepsilon} + \tfrac{1}{2} (\omega_a^{(1)} + \omega_a^{(2)}) \right) + n^{(12)} \pi i,$$

wo sich $n^{(12)}$ aus Antheilen zusammensetzt, die herrühren von

1) Selbstüberkreuzungen von (I),
2) Aenderung von $\frac{1}{2} \log_1 (s_2^d \, d\omega_s)$ längs (I),
3) Selbstüberkreuzungen von (II),
4) Aenderung von $\frac{1}{2} \log (s_2^d \, d\omega_s)$ längs (II),

5) Umgebung von s (Fig. 8),

6) gegenseitigen Ueberkreuzungen von (I) und (II).

1) und 2) liefern zusammen den Beitrag $n^{(1)} + 1$,

3) „ 4) „ „ „ „ $n^{(2)} + 1$,

5) liefert „ „ $-(l+\lambda+\lambda_1) = -2$,

6) „ „ „ $\nu^{(12)}$.

Daraus folgt

$$n^{(12)} = n^{(1)} + n^{(2)} + \nu^{(12)}.$$

Also gilt für die Zusammensetzung irgend zweier Periodenwege folgende Regel:

Entspricht einem Periodenwege (I) die Periode

$$\sum_\alpha \eta_\alpha^{(1)} \left(\overline{w}_\alpha^{s\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\,\omega_\alpha^{(1)}\right) + n^{(1)}\,\pi i,$$

dem Periodenwege II die Periode

$$\sum_\alpha \eta_\alpha^{(2)} \left(\overline{w}_\alpha^{s\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\,\omega_\alpha^{(2)}\right) + n^{(2)}\,\pi i,$$

schneidet ferner der Periodenweg II den Weg I $\nu^{(12)}$ mal öfter von rechts nach links als umgekehrt, so gehört zu dem aus beiden zusammengesetzten Periodenwege (I, II) die Periode

$$\sum_\alpha (\eta_\alpha^{(1)} + \eta_\alpha^{(2)}) \left(\overline{w}_\alpha^{s\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\,(\omega_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^{(2)})\right) + (n^{(1)} + n^{(2)} + \nu^{(12)})\,\pi i.$$

Ich hätte dieses selbe Resultat in anderer Form durch blose Rechnung herleiten können. Man bekommt dann als Gesammtperiode:

$$\sum_\alpha \eta_\alpha^{(1)} \left(\overline{w}_\alpha^{s\varepsilon} + \omega_\alpha^{(2)} + \tfrac{1}{2}\,\omega_\alpha^{(1)}\right) + n^{(1)}\,\pi i + \sum_\alpha \eta_\alpha^{(2)} \left(\overline{w}_\alpha^{s\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\,\omega_\alpha^{(2)}\right) + n^{(2)}\,\pi i$$

$$= \sum_\alpha (\eta_\alpha^{(1)} + \eta_\alpha^{(2)}) \left(\overline{w}_\alpha^{s\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\,(\omega_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^{(2)})\right) + \tfrac{1}{2} \sum_\alpha (\eta_\alpha^{(1)}\,\omega_\alpha^{(2)} - \eta_\alpha^{(2)}\,\omega_\alpha^{(1)}) + (n^{(1)} + n^{(2)})\,\pi i.$$

Durch Vergleichung der beiden so gefundenen Ausdrücke ergiebt sich

$$\sum_\alpha (\eta_\alpha^{(1)}\,\omega_\alpha^{(2)} - \eta_\alpha^{(2)}\,\omega_\alpha^{(1)}) = \nu^{(12)} \cdot 2\pi i,$$

d. h. die bilinearen Relationen zwischen den Perioden der Abel'schen Integrale erster und zweiter Gattung. In der That geht die auf S. 267 gegebene allgemeine Form dieser Relationen genau in die hier gefundene über, wenn man den Weg (xx) daselbst mit dem jetzigen Wege (I), den Weg $(\xi\xi)$ mit (II) identificirt und also $l_1 = 0$, $\lambda_1 = -\nu^{(12)}$ setzt.

Kehrt man die Durchlaufungsfolge der Wege (I) und (II) um, d. h. bildet man den Weg (II, I), so verwandelt sich jede rechte Ueberkreuzung von (II) über (I) in eine linke Ueberkreuzung von (I) über (II). D. h.

Bei Umkehrung der Durchlaufungsfolge der Wege wechselt $\nu^{(12)}$ *sein Vorzeichen:*

$$\nu^{(21)} = -\nu^{(12)}.$$

Die Periode ändert sich also um $-\nu^{(12)} \cdot 2\pi i$.

Man darf daher die Durchlaufungsfolge zweier Periodenwege dann und nur dann umkehren, wenn der eine den andern ebenso oft von links nach rechts als von rechts nach links überkreust, d. h. wenn man dieselben so deformiren kann, dass sie keinen Punkt mit einander gemein haben.

Ich wende nun das erhaltene allgemeine Resultat auf die Zusammensetzung der elementaren Periodenwege an:

Zwei Wege $A_\varkappa$ und $A_{\varkappa'}$ oder $B_\varkappa$ und $B_{\varkappa'}$ verlaufen immer getrennt von einander; die Zahl $\nu^{(12)}$, auf zwei solche Wege bezogen, ist also $= 0$. Ebenso für irgend zwei Wege $A_\varkappa$ und $B_{\varkappa'}$, sofern $\varkappa \gtrless \varkappa'$ ist. Alle derartigen Wege sind also mit einander vertauschbar. Folgt dagegen auf einen Weg $A_\varkappa$ der conjugirte Weg $B_\varkappa$, so ist $\nu^{(12)} = +1$, umgekehrt $\nu^{(12)} = -1$, wenn auf den Weg $B_\varkappa$ der Weg $A_\varkappa$ folgt; dabei ist es einerlei, ob zwischen $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ noch andere Periodenwege liegen, oder nicht. Das Vorzeichen von $\nu^{(12)}$ ist umzukehren, wenn einer der beiden Wege, beizubehalten, wenn beide in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen sind.

Die bisher entwickelten Angaben über die Periodicität der Function $\log\left(z_2^{\frac{1}{2}d}\,\bar{\Omega}(z, e)\right)$ auf den einzelnen Elementarwegen im Verein mit dem letzten Satz über die Zusammensetzung der Elementarwege geben mir die Mittel, die Periode von

$$\log \bar{\Omega}(z, e)$$

— indem ich jetzt von der Function zur Form zurückgehe — folgendermassen anzugeben:

Es sei

$$(n_\varkappa + 1)\,2\pi i \quad \text{bezw.} \quad (n'_\varkappa + 1)\,2\pi i$$

der Zuwachs von

$$\log\left(z_2^d\, d\omega_s\right) = \log\left(\frac{z_2^{d+2}}{G(z_1, z_2)} \cdot dz\right)$$

längs des Periodenweges $A_\varkappa$ *bezw.* $B_\varkappa$, *wenn man* dz *immer in der Fortschreitungsrichtung des Weges annimmt.*

Es lasse sich der Weg von $z = \frac{z_1}{z_2}$ *durch Verschiebung auf der zerschnittenen Fläche* $\overline{T}$ *in eine Reihenfolge von je* $\mu_\varkappa$ *Perioden-*

wegen $A_\varkappa$, $\mu_\varkappa'$ Periodenwegen $B_\varkappa$, $\mathfrak{q}$ Umkreisungen der m Punkte $z = \infty$ und r Umkreisungen des Punktes e deformiren. Zugleich sei $\mathfrak{q}_2$ die Anzahl der Umläufe des Werthes von z_2 um $z_2 = 0$.

Es sei ferner ν eine von der Reihenfolge der Periodenwege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ abhängige Zahl, nämlich die Summe aller bei Zusammensetzung derselben nach ihrer Reihenfolge sich ergebenden Zahlen $\nu^{(12)}$. Es ist also so oft $\nu^{(12)} = +1$ zu setzen, als ein Weg $B_\varkappa$ später als der zugehörige Weg $A_\varkappa$ durchlaufen wird, $\nu^{(12)} = -1$, so oft $A_\varkappa$ später als $B_\varkappa$ zu durchlaufen ist, ebenso, wenn beide Wege, umgekehrt, wenn einer derselben in negativem Sinne zu durchlaufen ist, und schliesslich die Summe

$$\nu = \sum \nu^{(12)}$$

zu bilden.

Ich führe noch die Abkürzungen ein:

$$\omega_\alpha = \begin{matrix} \mu_1\,\omega_{\alpha 1} + \mu_2\,\omega_{\alpha 2} + \cdots + \mu_p\,\omega_{\alpha p} \\ + \mu_1'\,\omega_{\alpha 1}' + \mu_2'\,\omega_{\alpha 2}' + \cdots + \mu_p'\,\omega_{\alpha p}' \end{matrix},$$

$$\eta_\alpha = \begin{matrix} \mu_1\,\eta_{\alpha 1} + \mu_2\,\eta_{\alpha 2} + \cdots + \mu_p\,\eta_{\alpha p} \\ + \mu_1'\,\eta_{\alpha 1}' + \mu_2'\,\eta_{\alpha 2}' + \cdots + \mu_p'\,\eta_{\alpha p}' \end{matrix},$$

$$n = \begin{matrix} \mu_1\,n_1 + \mu_2\,n_2 + \cdots + \mu_p\,n_p \\ + \mu_1'\,n_1' + \mu_2'\,n_2' + \cdots + \mu_p'\,n_p' \end{matrix}.$$

Dann lautet der Zuwachs von $\log \bar{\Omega}(z, e)$:

$$r \cdot 2\pi i - \frac{d}{2}(\mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q})\,2\pi i + (n + \nu)\,\pi i + \sum_\alpha \eta_\alpha \left(\bar{w}_\alpha^{ze} + \tfrac{1}{2}\,\omega_\alpha\right).$$

Für manche Zwecke genügt es, den Factor zu kennen, mit welchem sich $\bar{\Omega}(z, e)$ selbst multiplicirt. In dem Falle braucht man die Periode von $\log \bar{\Omega}(z, e)$ nur bis auf Multipla von $2\pi i$ zu bestimmen. Da zeigt sich nun, dass bei Veränderung der Reihenfolge der einzelnen Periodenwege die Zahl ν sich nur um Multipla von 2 ändert. Man kann also alle Wege A_1 zuerst durchlaufen, dann alle Wege B_1, dann alle Wege A_2, dann B_2 u. s. w. bis B_p. Es geht so ν in folgende Zahl über:

$$\mu_1\mu_1' + \mu_2\mu_2' + \cdots + \mu_p\mu_p'.$$

Man erhält also bei geradzahligem d als Multiplicator von $\bar{\Omega}(z, e)$:

$$(-1)^{n+\mu_1\mu_1'+\mu_2\mu_2'+\cdots+\mu_p\mu_p'} \cdot e^{\sum_\alpha \eta_\alpha \left(\bar{w}_\alpha^{ze} + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}$$

bei ungeradzahligem d dagegen:

$$(-1)^{\mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q}} \cdot (-1)^{n+\mu_1\mu_1'+\mu_2\mu_2'+\cdots+\mu_p\mu_p'} \cdot e^{\sum_\alpha \eta_\alpha \left(\bar{w}_\alpha^{ze} + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}.$$

§ 5.

Die Mittelform und ihre Periodicität.

Um von seinen Primformen, welche sich bei Periodenumläufen um transcendente Multiplicatoren ändern, zu den bei Umläufen sich invariant verhaltenden algebraischen Formen zu gelangen, bildet Hr. Klein (Math. Ann. 36, § 5) die von ihm sogenannten *„Mittelformen"*, welche ähnliche Periodicitätseigenschaften besitzen, wie die Primformen, ebenfalls nirgends unendlich werden, aber auch nirgends verschwinden.

Man gelangt zu einer solchen Mittelform, indem man dasjenige Product von Klein'schen Primformen bildet, welches an den Nullstellen einer ganzen algebraischen Form verschwindet, dieses Product durch die betr. algebraische Form dividirt und das Ganze mit der Zahl der Nullstellen der algebraischen Form — ihrer Werthigkeit — als Wurzelexponent radicirt.

Alle so zu erzielenden Mittelformen unterscheiden sich von einer beliebigen unter ihnen nur um einen Exponentialfactor der Gestalt

$$e^{k_0+k_1 w_1^s+k_2 w_2^s+\cdots+k_p w_p^s},$$

(wobei ich in den Integralen w_α die untere Grenze als hier unwesentlich weggelassen habe). Die Zahlen k_α setzen sich dabei rational aus den $\eta_{\alpha x}$, $\eta'_{\alpha x}$ zusammen, während k_0 ganz beliebige Werthe haben kann.

Ich will jedoch die Definition der Mittelform noch ein wenig erweitern, *indem ich jede Form eine Mittelform nenne, die von einer speciellen Mittelform $\bar{\mu}(z_1, z_2)$ sich nur um einen Exponentialfactor der angegebenen Art unterscheidet, in welchem die Constanten k_α aber beliebige Werthe haben dürfen:*

$$\mu(z_1, z_2) = \bar{\mu}(z_1, z_2) \cdot e^{k_0+\sum_\alpha k_\alpha w_\alpha^s}.$$

Uebrigens gilt der Satz:

Sämmtliche Mittelformen sind als Formen von z_1, z_2 vom Grade $-\frac{p}{m}$.

Ich wähle nun eine specielle Mittelform aus, welche mit Rücksicht auf die besondere der Betrachtung zu Grunde gelegte Riemann'sche Fläche besonders einfache Eigenschaften besitzt. Ich setze, unter a irgend einen Werth der Variablen z, unter $a', a'', \ldots a^{|m|}$ die m zugehörigen übereinander liegenden Punkte der Riemann'schen Fläche verstanden:

$$\bar{\mu}(z_1, z_2) = \left[\frac{\bar{\Omega}(z, a')\,\bar{\Omega}(z, a'')\ldots\bar{\Omega}(z a^{|m|})}{(za)}\right]^{\frac{1}{m}},$$

wobei ich mir vorbehalte, dem Punkte a nachträglich noch eine specielle Lage zu ertheilen.

Periodicität von $\log \bar{\mu}(z_1, z_2)$.

Ich muss nun untersuchen, welchen Zuwachs die Form

$$\log\bar{\mu}(z_1,z_2)=\frac{1}{m}[\log\bar{\Omega}(za')+\log\bar{\Omega}(za'')+\cdots+\log\bar{\Omega}(za^{|m|})-\log(za)]$$

längs des im vorigen Paragraphen auf $\log\bar{\Omega}(z,e)$ angewandten Periodenweges (zz) erleidet.

Es seien $r', r'', \ldots r^{|m|}$ die Anzahlen der in (zz) enthaltenen Umläufe um $a', a'', \ldots a^{|m}$. Es sei ferner r die Anzahl der Umkreisungen, welche der Werth von z um den Werth von a ausführt, beide nicht auf der Riemann'schen Fläche, sondern in einer einfach überdeckten z-Ebene gedacht — ich werde das im Folgenden als Projection bezeichnen —. $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}$, n, ν, ω_α, η_α sollen dieselbe Bedeutung, wie auf Seite 284 haben.

Ferner sei

$$\overline{W}_\alpha^z=\frac{\bar{w}_\alpha^{za'}+\bar{w}_\alpha^{za''}+\cdots+\bar{w}^{za^{|m}}}{m}.$$

Wenn ich jetzt für $\frac{d}{2}$ seinen Werth $\frac{p-1}{m}$ einsetze, *so lautet die Periode von* $\log\bar{\mu}(z_1, z_2)$:

$$\frac{r'+r''+\cdots+r^{|m|}-r-\mathfrak{q}_2}{m}\cdot 2\pi i-\frac{p-1}{m}(\mathfrak{q}_2-\mathfrak{q})\,2\pi i+(n+\nu)\,\pi i+\sum_\alpha \eta_\alpha\left(\overline{W}_\alpha^z+\tfrac{1}{2}\omega_\alpha\right),$$

welche sich leicht in folgende zweckmässigere Gestalt setzen lässt:

$$\frac{\varrho}{m}\cdot 2\pi i-\frac{p}{m}(\mathfrak{q}_2-\mathfrak{q})\,2\pi i+(n+\nu)\,\pi i+\sum_\alpha \eta_\alpha\left(\overline{W}_\alpha^z+\tfrac{1}{2}\omega_\alpha\right)$$

worin

$$\varrho=r'+r''+\cdots+r^{|m|}-r-\mathfrak{q}'$$

ist.

Die ganze Zahl ϱ *ist nun von jeder Verschiebung des Periodenweges* (zz) *unabhängig.*

Denn verschiebe ich den Weg (zz) so über einen der Punkte $z=\infty$, dass letzterer von der linken Seite des Weges auf die rechte übertritt, so ändert sich $\mathfrak{q}$ um -1, zugleich aber, da auch die Projection des Weges (zz) eine negative Umkreisung um ∞, also eine positive um a gewinnt, ändert sich r um $+1$, während die Zahlen $r', r'', \ldots r^{|m|}$ ungeändert bleiben.

Verschiebt man ferner (zz) über einen der Punkte $z=a$, etwa über $a^{|\mu|}$, so ändert sich $r^{|\mu|}$, zugleich aber auch r um -1, während alles übrige ungeändert bleibt.

Es ist also in der That die Zahl ϱ von jeder Verschiebung des Weges (zz) unabhängig. Auch von der Reihenfolge der einzelnen in

$(s\,s)$ enthaltenen Elementarperiodenwege ist ϱ unabhängig, da seine einzelnen Bestandtheile unabhängig sind.

Bei gegebener Lage der Punkte a und ∞ ist also ϱ nur von den Zahlen $\begin{matrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_p\\ \mu_1' & \mu_2' & \cdots & \mu_p'\end{matrix}$ abhängig, und setzt sich vermittelst dieser in derselben Weise aus $2p$ Grössen $\varrho_\varkappa$, $\varrho_\varkappa'$ zusammen, wie die Perioden der Integrale 1. Gattung aus den Elementarperioden $\omega_{a\varkappa}$, $\omega_{a\varkappa}'$:

$$\varrho = \begin{matrix}\mu_1\varrho_1 + \mu_2\varrho_2 + \cdots + \mu_p\varrho_p\\ + \mu_1'\varrho_1' + \mu_2'\varrho_2' + \cdots + \mu_p'\varrho_p'.\end{matrix}$$

Die Zahlen $\varrho_\varkappa$ entsprechen den primitiven Periodenwegen $A_\varkappa$, die Zahlen $\varrho_\varkappa'$ den Wegen $B_\varkappa$. Für jeden solchen Weg ist

$$r' = r'' = \cdots = r^{|m|} = 0,$$

$$q = 0,$$

und also

$$\varrho_\varkappa = -r_\varkappa,$$

$$\varrho_\varkappa' = -r_\varkappa',$$

unter $r_\varkappa$, $r_\varkappa'$ die Anzahl der Umläufe der Projection von $A_\varkappa$ bezw. $B_\varkappa$ um den Werth $s = a$ verstanden.

Projicirt man das Querschnittsystem der $A_\varkappa^\pm$, $B_\varkappa^\pm$ (vergl. S. 265) auf die s-Ebene, so zerfällt diese in eine endliche Anzahl einzelner Gebiete.

Jedem dieser Gebiete will ich nun ein ganz bestimmtes System von $2p$ ganzen Zahlen $k_\varkappa$, $k_\varkappa'$

$$\begin{matrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_p,\\ k_1' & k_2' & \cdots & k_p'\end{matrix}$$

zuordnen, welches ich symbolisch durch $\binom{k_\varkappa}{k_\varkappa'}$ bezeichne, und die Charakteristik desselben nenne.

Dem Gebiete, welches den unendlich fernen Punkt enthält, ertheile ich die Charakteristik

$$\binom{0}{0}.$$

Die Charakteristik $\binom{k_\varkappa}{k_\varkappa'}$ irgend eines andern Gebietes soll dann ausdrücken, dass man die Projection jedes Schnittes $A_\varkappa^\pm$ $k_\varkappa$ mal, die Projection jedes Schnittes $B_\varkappa^\pm$ $k_\varkappa'$ mal öfter von $-$ nach $+$, als von $+$ nach $-$ überschreiten muss, um von dem unendlichfernen Punkte zu einem Punkte im Innern des betreffenden Gebietes zu gelangen.

Nun ändert sich aber auch das System der Zahlen $\binom{\varrho_\varkappa}{\varrho_\varkappa'}$ nur,

wenn der Punkt a die Projection eines der Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ überschreitet, und zwar wächst $\varrho_\varkappa$ um $+1$, wenn der Weg $A_\varkappa$, $\varrho_\varkappa'$ um $+1$, wenn der Weg $B_\varkappa$ von links nach rechts überschritten wird. Im ersteren Falle muss man aber die Projection von $B_\varkappa^{\pm}$ von $-$ nach $+$, im zweiten Falle die Projection des Schnittes $A_\varkappa^{\pm}$ von $+$ nach $-$ überschreiten. Liegt a im Gebiete des unendlich fernen Punktes, so ist offenbar

$$\begin{pmatrix}\varrho_\varkappa\\ \varrho_\varkappa'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

In dem Gebiete mit der Charakteristik $\begin{pmatrix}k_\varkappa\\ k_\varkappa'\end{pmatrix}$ ist dann nach dem eben Gesagten

$$\begin{pmatrix}\varrho_\varkappa\\ \varrho_\varkappa'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+k_\varkappa'\\ -k\end{pmatrix}.$$

Liegt also der Punkt a in dem Gebiet mit der Charakteristik $\begin{pmatrix}k_\varkappa\\ k_\varkappa'\end{pmatrix}$, *so ist*

$$\varrho = \begin{matrix}\mu_1 k_1' + \mu_2 k_2' + \cdots + \mu_p k_p',\\ -\mu_1' k_1 - \mu_2' k_2 - \cdots - \mu_p' k_p. -\end{matrix}$$

Ich gehe nun etwas näher auf den Charakter der p Functionen:

$$\overline{W}_a^s = \frac{\bar{w}_a^{sa'} + \bar{w}_a^{sa''} + \cdots + \bar{w}_a^{sa^{|m|}}}{m}$$

ein, besonders auf ihre Abhängigkeit von der Lage des Punktes a.

Die p Functionen $\overline{W}_a^s$ *sind Integrale erster Gattung, jedoch mit ganz bestimmt festgelegten, bei den p Integralen im Allgemeinen verschiedenen unteren Grenzen.*

Wenn man nun a und dementsprechend die Punkte $a', a' \ldots a^{|m|}$ wandern lässt, so folgt aus dem Abel'schen Theorem, dass die $\overline{W}_a^s$ ungeändert bleiben, so lange die $\bar{w}_a^{sa'}$, $w_a^{sa''}, \ldots \bar{w}_a^{sa^{|m|}}$ sich stetig ändern, d. h. so lange nicht einer der Punkte $a', a'' \ldots a^{|m|}$ das Querschnittsystem der $A_\varkappa^{\pm}$, $B_\varkappa^{\pm}$ überschreitet. Also:

Die Functionen $\overline{W}_a^s$ *bleiben ungeändert, so lange sich a in demselben Theilgebiete der z-Ebene bewegt.*

Sobald jedoch a über die Projection von $A_\varkappa^{\pm}$ von $-$ nach $+$ übertritt, ändert sich eins der Integrale $\bar{w}_a^{sa'}$, $\bar{w}_a^{sa''}, \ldots \bar{w}_a^{sa^{|m|}}$ unstetig um $-\omega_{a\varkappa}$, bei Ueberschreitung von $B_\varkappa$ von $-$ nach $+$ um $-\omega_{a\varkappa}'$, $\overline{W}_a^s$ also um $-\frac{\omega_{a\varkappa}}{m}$ bezw. $-\frac{\omega_{a\varkappa}'}{m}$. Es ergiebt sich daraus der Satz:

Lässt man a aus dem Gebiete mit der Charakteristik $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ *in das*

Gebiet mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} k_x \\ k_x' \end{pmatrix}$ *wandern, so erleiden die Functionen* $\overline{W}_x^z$ *je einen Zuwachs von*

$$-\frac{1}{m}\begin{pmatrix} k_1\omega_{x1} - k_2\omega_{x2} - \cdots - k_p\omega_{xp} \\ -k_1'\omega_{x1} - k_2'\omega_{x2} - \cdots - k_p'\omega_{xp} \end{pmatrix}.$$

Die Gesammtänderung der Periode von $\log\bar{\mu}\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ bei Wanderung des Punktes a aus dem Gebiet des unendlich fernen Punktes in das Gebiet mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} k_x \\ k_x' \end{pmatrix}$ beträgt also:

$$\frac{1}{m}2\pi i\begin{pmatrix} \mu_1 k_1 - \mu_2 k_2 - \cdots - \mu_p k_p \\ -\mu_1 k_1' - \mu_2 k_2' - \cdots - \mu_p k_p' \end{pmatrix} - \sum_c \eta_{ic}\begin{pmatrix} k_1\omega_{x1} - k_2\omega_{x2} - \cdots - k_p\omega_{xp} \\ -k_1'\omega_{x1} - k_2'\omega_{x2} - \cdots - k_p'\omega_{xp} \end{pmatrix}.$$

Vermittelst der bilinearen Relationen zwischen den ω und η lässt sich aber dieser Ausdruck in folgenden umformen:

$$-\frac{2}{m}\sum_c\begin{pmatrix} k_1\eta_{c1} - k_2\eta_{c2} - \cdots - k_p\eta_{cp} \\ -k_1'\eta_{c1} - k_2'\eta_{c2} - \cdots - k_p'\eta_{cp} \end{pmatrix}\cdot\omega_x.$$

Man kann dieses Resultat übrigens auch leicht dadurch erhalten, dass man von der Definition des $\mu\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ aus mit Hülfe der bekannten Periodicitätseigenschaften von $\Omega\,x\,c$ untersucht, welchen Exponentialfactor $\bar{\mu}\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ erhält, wenn a aus einem Gebiet in's andere rückt. Man findet so, dass sich das den Gebiete mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} k_x \\ k_x' \end{pmatrix}$ entsprechende $\bar{\mu}\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ von demjenigen des Gebietes mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ um einen Factor folgender Art unterscheidet:

$$e^{-\frac{1}{m}\sum_x\begin{pmatrix} k_1\eta_{x1} - k_2\eta_{x2} - \cdots - k_p\eta_{xp} \\ -k_1'\eta_{x1} + k_2'\eta_{x2} + \cdots + k_p'\eta_{xp} \end{pmatrix}\cdot\overline{W}_x^z},$$

und hieraus folgt in der That die oben angegebene Aenderung der Periode.

Man könnte alle diese Betrachtungen über die Mittelform dadurch verallgemeinern, dass man an Stelle einer Form $f(x)$ eine allgemeinere, z. B. irgend eine ganze Form zur Definition der Mittelform benutzte. Man würde dann immer wieder nur zu Mittelformen gelangen, die sich von den bisherigen um Exponentialfactoren unterscheiden.

Es genügt aber für uns, irgend eine specielle Mittelform zu besitzen. Und von allen ergiebt sich mit Rücksicht auf die gegebenen Entwicklungen als die einfachste Verfügung die folgende:

Ich wähle für den speciellen Zweig $\bar{\mu}(z_1, z_2)$ den unendlich fernen Punkt der z-Ebene selbst als Punkt a, und setze demgemäss:

$$\bar{\mu}(z_1, z_2) = \left[\frac{\bar{\Omega}(z\infty') \bar{\Omega}(z\infty'') \dots \bar{\Omega}(z\infty^{|m|})}{z_2}\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Der Logarithmus dieser Mittelform wächst längs des Seite 284 beschriebenen Periodenweges um die Grösse:

$$-\frac{p}{m}(q_2 - q)\, 2\pi i + (n + \nu)\, \pi i + \sum_\alpha \eta_\alpha \left(\overline{W}_\alpha^z + \tfrac{1}{2}\omega_\alpha\right),$$

wobei die p Functionen $\overline{W}_\alpha^z$ folgende Bedeutung haben:

$$\overline{W}_\alpha^z = \frac{\bar{w}_\alpha^{z\infty'} + \bar{w}_\alpha^{z\infty''} + \dots + w_\alpha^{z\infty^{|m|}}}{m}.$$

Die allgemeinste Mittelform entsteht aus der speciellen durch Hinzufügung irgend eines Exponentialfactors der genannten Form:

$$\mu(z_1, z_2) = \bar{\mu}(z_1, z_2) \cdot e^{k_0 + \sum_\alpha k_\alpha \overline{W}_\alpha^z}.$$

§ 6.

Einführung der multiplicativen Primform.

Der Umstand, dass die Klein'sche Primform und die Mittelform gegenüber geschlossenen Umläufen auf der Riemann'schen Fläche ein sehr ähnliches Verhalten zeigen, legt es nahe, beide derart mit einander zu verbinden, dass sich die Multiplicatoren beider zu einem Multiplicator besonders einfacher Natur zusammensetzen.

Dies erreicht man, wenn man die Klein'sche Primform durch die Mittelform dividirt. Indem ich die so entstehende Form noch mit einer solchen Constanten behafte, dass der erste Entwicklungscoefficient an der Stelle e rein algebraisch bestimmbar ist, nämlich gleich dem entsprechenden Coefficienten von $\Omega(z, e)$, *setze ich*

$$P(z, e) = \Omega(z, e) \cdot \frac{\mu(e_1, e_2)}{\mu(z_1, z_2)}$$

*und nenne eine solche Form von z_1, z_2 eine „multiplicative Primform".**)

*) In meiner Note in Nr. 3 der Gött. Nachr. v. 1893 habe ich diese Form „algebraische Primform" genannt. Da dies aber leicht zu dem Missverständniss Anlass geben könnte, als ob sie eine algebraische Form sein könnte, will ich sie, als die einfachste multiplicative Form, eine „multiplicative Primform" nennen.

Dieselbe ist in z_1, z_2 vom Grade $\frac{1}{m}$, ist auf der Riemann'schen Fläche überall endlich und unverzweigt, und verschwindet von der ersten Ordnung immer dann und nur dann, wenn der Punkt z mit dem Punkte e zusammenrückt.

Die so gegebene Definition der multiplicativen Primform enthält noch dieselbe Unbestimmtheit, wie die der Mittelform. *Eine bestimmte der in der Definition enthaltenen verschiedenen analytischen Functionen, und von dieser einen bestimmten Ausgangszweig lege ich fest durch die Formel:*

$$\overline{P}(z, e) = \overline{\Omega}(z, e) \cdot \frac{\overline{\mu}(e_1, e_2)}{\overline{\mu}(z_1, z_2)},$$

wo $\overline{\mu}$ den am Schluss des vorigen Paragraphen eingeführten Anfangszweig bedeutet.

An der Stelle $z = e$ besitzt diese Form eine Entwicklung der Gestalt (vergl. S. 274)

$$\overline{P}(z, e) = \frac{\nu}{G'(e_1, e_2)} \cdot \left(\frac{(zy)}{(ey)}\right)^{\frac{1}{m} - \frac{1}{\nu}} (ze)^{\frac{1}{\nu}} \left\{1 + \mathfrak{P}_1\left(\left(\frac{ze}{zy}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right)\right\},$$

also mit demselben Anfangscoefficienten wie $\overline{\Omega}(z, e)$.

Während aber die Klein'sche Primform $\Omega(z, e)$ von ihren beiden Argumenten z, e in symmetrischer Weise abhängt, so dass

$$\Omega(e, z) = -\Omega(z, e)$$

ist, ist dies bei der multiplicativen Primform in Folge meiner in anderer Hinsicht zweckmässigen Bestimmung der multiplicativen Constanten durchaus nicht der Fall. Aber gerade dieser Mangel an Symmetrie bezüglich z und e ermöglicht es, *von der multiplicativen Primform auf einfache Weise sowohl zur Klein'schen Primform, als auch zur Mittelform zurück zu gelangen, nämlich durch folgende Formeln:*

$$\Omega(z, e) = \sqrt{-\overline{P}(e, z) \cdot \overline{P}(z, e)},$$

$$\frac{\mu(z_1, z_2)}{\mu(e_1, e_2)} = \sqrt{-\frac{\overline{P}(e, z)}{\overline{P}(z, e)}}.$$

Ein entschieden einfacheres Verhalten als die Klein'sche Primform zeigt die multiplicative Primform gegenüber den *geschlossenen Umläufen* auf der Fläche. Aus dem bekannten Verhalten von $\overline{\Omega}(z, e)$ und $\overline{\mu}(z_1, z_2)$, und mit Rücksicht auf die Identität

$$\overline{w}_\alpha^{ze} = \overline{W}_\alpha^z - \overline{W}_\alpha^e$$

ergiebt sich der Satz:

Längs des auf Seite 284 gekennzeichneten Periodenweges vermehrt sich $\log \overline{P}(z, e)$ um die Grösse:

$$r \cdot 2\pi i + \frac{1}{m}(q_2 - q)\, 2\pi i - \sum_\alpha \eta_\alpha \overline{W}_\alpha^e.$$

Die Periode von $\log P(z, e)$, bezw. der Multiplicator von $P(z, e)$ ist also eine von z unabhängige Constante, und zugleich von der Reihenfolge der einzelnen Periodenwege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ unabhängig.

Aber nicht allein, dass die Periode selbst einen einfacheren Charakter hat, dass man z. B. die Zahlen n und ν nicht zu bestimmen braucht; auch die Bestimmung der Zahlen r und $\mathfrak{q}$ gestattet eine bedeutende Erleichterung.

Man beachte nämlich, dass, wenn man einen Umlauf um den Punkt e und die m Punkte ∞ zusammen macht, r um 1 und $\mathfrak{q}'$ um m wächst, dass also die Zahl

$$r - \frac{\mathfrak{q}}{m} = - \frac{\mathfrak{q}'}{m}$$

ungeändert bleibt.

In Folge dessen kann man die Zahl $\mathfrak{q}'$ auf folgende Weise bestimmen.

Man verbinde den Punkt e mit jedem der m Punkte $z = \infty$ durch je einen das Querschnittsystem der Fläche nicht überschreitenden Einschnitt (*Fig.* 9), *und bezeichne dessen linkes* (*von e aus gesehen*) *Ufer*

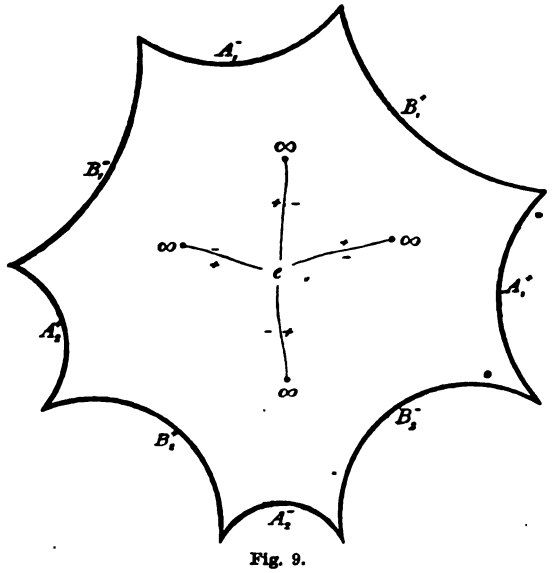


Fig. 9.

mit $+$, *das rechte mit* $-$. *Dann giebt* $\mathfrak{q}'$ *einfach an, wie vielmal öfter der Weg* ($\varkappa z$) *dieses Einschnittsystem von* $+$ *nach* $-$, *als von* $-$ *nach* $+$ *überschreitet.*

Die Periode von $\log \overline{P}(z, e)$ *heisst nunmehr:*

$$\frac{1}{m}(\mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q}')\, 2\pi i - \sum_\alpha \eta_\alpha \overline{W}_\alpha^\varkappa.$$

In denjenigen Fällen jedoch, wo mehrere Primformen mit verschiedenen Nullpunkten e gleichzeitig zu untersuchen sind, ist es zweckmässiger *die Umläufe um e und diejenigen um die Punkte $z=\infty$ gesondert zu bestimmen;* dies erreicht man durch ein System von Einschnitten, die man von einem solchen Punkte des Randes aus zieht, welchen der Weg (zz) bei Verschiebung auf $\overline{T}$ nicht zu überstreichen hat, und von dem aus man jeden Punkt innerhalb $\overline{T}$ ohne Ueberkreuzung eines Periodenweges $A_\varkappa$ bezw. $B_\varkappa$ erreichen kann. Solche Punkte sind die p Ecken von $\overline{T}$, welche zwischen den Ufern $A_\varkappa^+$ und $B_{\varkappa+1}^-$ eingeschlossen sind. So kann man z. B. wie in Fig. 10 *von der Ecke zwischen A_p^+ und B_1^- nach allen Punkten $z=\infty$ sowie nach $z=e$ Einschnitte ziehen. Man bezeichne deren linke Ufer mit $+$, die rechten mit $-$.*

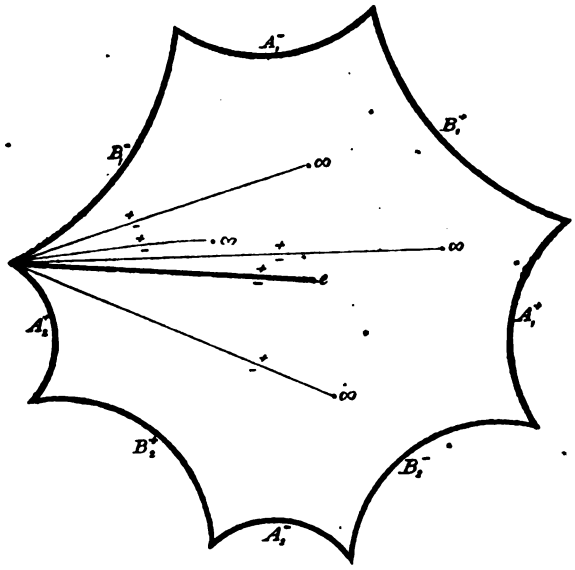


Fig. 10.

Dann giebt $\mathfrak{q}$ an, wie vielmal öfter die nach den Punkten $z=\infty$ gezogenen Einschnitte von $+$ nach $-$, als von $-$ nach $+$ überschritten werden, r, wie vielmal öfter der nach e gelegte Einschnitt, von $+$ nach $-$, als von $-$ nach $+$ gekreuzt wird.

Von der Lage des Punktes e ist nur die Zahl r, nicht aber $\mathfrak{q}$ abhängig.

II. Theil.

Die multiplicativen Formen.

§ 7.

Definition und allgemeiner Ausdruck der multiplicativen Formen.

Die im vorigen Paragraphen definirten „multiplicativen Primformen"

$$P(z, e)$$

sind der einfachste Fall einer allgemeineren Classe von Formen auf dem algebraischen Gebilde, zu denen als andere specielle Fälle die algebraischen Formen gehören, nämlich der „multiplicativen Formen."

Unter einer multiplicativen Form verstehe ich eine solche homogene analytische Function von z_1, z_2, welche bei irgend welchen auf dem algebraischen Gebilde geschlossenen Umläufen der Variablen sich mit constanten Grössen multiplicirt.

Zugleich unterwerfe ich diese Formen, wenigstens im Bereich meiner gegenwärtigen Untersuchung, der Bedingung, *auf dem algebraischen Gebilde keine wesentlich singulären Stellen zu besitzen.*

Die in Betracht kommenden geschlossenen Umläufe setzen sich aus den $2p$ Periodenwegen und ev. aus Umläufen um einzelne Verzweigungspunkte zusammen

Die multiplicativen Functionen, d. h. die multiplicativen Formen vom Grade 0, sind bereits von mehreren Autoren behandelt worden, die unverzweigten wohl zuerst von Riemann*), während über die verzweigten multiplicativen Functionen neuerdings Herr Hurwitz**) eine Reihe allgemeiner Sätze gegeben hat. Für eine allgemeinere Functionsclasse — auf welche ich jedoch in meiner Arbeit nicht eingehe — für Functionen, welche bei Umläufen der Variablen Substitutionen der Gestalt $\zeta' = \alpha\zeta + \beta$ erleiden, hat Herr Prym***) gewisse Existenztheoreme gegeben. Die Arbeiten von Appell†) beziehen sich zuerst auf den Riemann'schen Fall der multiplicativen Functionen, und führen schliesslich zu einer eingehenden Discussion der von Prym gefundenen allgemeineren Functionen, der Integrale der multiplicativen Functionen.

Meine Arbeit unterscheidet sich von allen diesen Untersuchungen principiell durch die Betrachtung von multiplicativen Formen statt der Functionen, wodurch sich eine Reihe neuer Gesichtspunkte und neuer Sätze ergeben.

Das multiplicative Verhalten einer Form ist charakterisirt durch Angabe ihrer *Verzweigungspunkte* e_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, der Multiplicatoren, die sie bei Umlauf von z um die einzelnen Verzweigungspunkte annimmt, der „*Verzweigungsmultiplicatoren*“:

$$\ldots \cdot k_i = e^{\varkappa_i \cdot 2\pi i}, \quad 0 \leqq \Re(\varkappa_i) < 1$$

*) Theorie der Abel'schen Functionen Nr. 26, 27. 1857.

**) Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Gött. Nachr. Febr. 1892. — Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. Math. Ann. 41. 1892.

***) Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Journ. f. Math. 70. 1869. — Beweis zweier Sätze der Functionentheorie. Journ. f. Math., 71. 1870.

†) Noten in Comptes rendus. Bd. 91, 92, 95. 1880—82. Ferner: Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Journ. de math. III. 9. 1883. — Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques. Acta math. 13, 1890.

und der Multiplicatoren, welche sie längs der Periodenwege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) erhält, der *„Periodenmultiplicatoren"*:

$$s_\varkappa = e^{\sigma_\varkappa \cdot 2\pi i}, \quad 0 \leqq \Re(\sigma_\varkappa) < 1,$$

$$s_\varkappa' = e^{\sigma_\varkappa' \cdot 2\pi i}, \quad 0 \leqq \Re(\sigma_\varkappa') < 1.$$

Durch den *Grad* ν als Form von z_1, z_2 endlich wird das Verhalten gegenüber simultanen Umläufen von z_1 um $z_1 = 0$ und z_2 um $z_2 = 0$ bestimmt. Ist nämlich

$$\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q}$$

die Zahl derjenigen Umläufe von z_2 um $z_2 = 0$, denen keine Umläufe von $z = \frac{z_1}{z_2}$ um $z = \infty$ entsprechen, so erhält die Form ausser ihren sonstigen Multiplicatoren den Factor

$$e^{\mathfrak{q}' \cdot \nu \cdot 2\pi i}.$$

Die Verzweigungs- und Periodenmultiplicatoren sind natürlich so zu verstehen, dass sie Wegen entsprechen, für welche $\mathfrak{q}' = 0$ ist.

Für die multiplicative Primform

$$\overline{P}(z, e)$$

ist der Grad

$$\nu = \frac{1}{m}.$$

Verzweigungspunkte und Verzweigungsmultiplicatoren existiren nicht, die Periodenmultiplicatoren sind

$$s_\varkappa = e^{-\sum_\alpha \eta_{\alpha\varkappa} \overline{w}_\alpha^e}, \qquad s_\varkappa' = e^{-\sum_\alpha \eta'_{\alpha\varkappa} \overline{w}_\alpha^e}.$$

Es lässt sich nun mit Hülfe der multiplicativen Primform jede beliebige verzweigte oder unverzweigte multiplicative Form darstellen.

Die Form $\left(\overline{P}(z e_i)\right)^{\varkappa_i}$, wofür ich kürzer $\overline{P}(z e_i)^{\varkappa_i}$ schreibe, erleidet bei einem Umlauf um $z = e_i$ gerade eine Multiplication mit k_i, bleibt dagegen bei irgendwelchen anderen Umläufen um einzelne Punkte ungeändert.

In Folge dessen lässt sich eine multiplicative Form $F(z_1, z_2)$ mit den Verzweigungspunkten e_i und den Verzweigungsmultiplicatoren

$$k_i = e^{\varkappa_i \cdot 2\pi i}$$

folgendermassen zerlegen:

$$F(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{\varkappa_i} \cdot \Psi(z_1, z_2),$$

unter Ψ eine unverzweigte multiplicative Form verstanden, die also nur noch längs der Periodenwege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ sich um constante Factoren ändert.

Durch Abtrennung des Factors

$$\prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{\varkappa_i}$$

ist die verzweigte multiplicative Form $F(z_1, z_2)$ auf eine unverzweigte Form $\Psi(z_1, z_2)$ der gleichen Art zurückgeführt. *Ich nenne daher den Factor*

$$\prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{\varkappa_i}$$

den Verzweigungsfactor der multiplicativen Form.

Es gilt dann der Satz:

Alle multiplicativen Formen mit denselben Verzweigungspunkten und denselben Verzweigungsmultiplicatoren haben denselben Verzweigungsfactor.

$\Psi(z_1, z_2)$ kann nun, weil unverzweigt, auf dem algebraischen Gebilde nur noch Null- und Unendlichkeitsstellen von endlicher ganzzahliger Ordnung besitzen. Es verschwinde also $\Psi(z_1, z_2)$ an den Stellen $a_1, a_2, \ldots a_{\delta+\varepsilon}$ und werde unendlich an den Stellen $b_1, b_2, \ldots b_\varepsilon$, wobei Null- und Unendlichkeitsstellen höherer Ordnung so oft zu zählen sind, als ihre Ordnung angiebt. Setzt man dann

$$F(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{\varkappa_i} \cdot \frac{\overline{P}(z a_1)\, \overline{P}(z a_2) \ldots \overline{P}(z a_{\delta+\varepsilon})}{\overline{P}(z b_1)\, \overline{P}(z b_2) \cdot \ldots \overline{P}(z b_\varepsilon)} \cdot \psi(z_1, z_2),$$

so muss $\psi(z_1, z_2)$ eine auf dem algebraischen Gebilde unverzweigte multiplicative Form von z_1, z_2 sein, welche nirgends verschwindet und nirgends unendlich wird.

Nun lautet aber der Fundamentalsatz der Theorie der multiplicativen Formen:

Eine multiplicative Form ohne Nullstellen und ohne Unendlichkeitsstellen ist nothwendig vom Grade 0 *und die Exponentialfunction eines überall endlichen Integrals:*

$$\psi(z_1, z_2) = e^{c_0 + \sum_\alpha c_\alpha \overline{w}_\alpha^z}.$$

Denn wäre der Grad ν der Form ψ von 0 verschieden, so wäre

$$\overline{P}(z, e) \cdot \psi^{-\frac{1}{m \cdot \nu}}$$

eine unverzweigte multiplicative Function mit einer einzigen Nullstelle bei $z = e$ und ohne Unendlichkeitsstellen. Dann wäre aber

$$\log\left(\overline{P}(z, e) \cdot \psi^{-\frac{1}{m \cdot \nu}}\right)$$

ein Integral, welches nur an einer Stelle logarithmisch unstetig würde, was bekanntlich unmöglich ist.

ψ kann also nur vom Grade 0 in z_1, z_2, d. h. eine Function von z sein.

Dann muss aber $\log \psi$ ein Integral sein, und zwar, da ψ weder 0 noch ∞ wird, ein überall endliches Integral, woraus meine obige Behauptung folgt.

Das Endresultat lautet also:

Die allgemeinste multiplicative Form mit den Verzweigungspunkten $e_i (i = 1, 2, \ldots n)$ *und den Verzweigungsmultiplicatoren*

$$k_i = e^{\varkappa_i \cdot 2\pi i} \qquad 0 \leqq \Re(\varkappa_i) < 1$$

hat die Gestalt

$$F(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{\varkappa_i} \cdot \frac{\overline{P}(z a_1)\, \overline{P}(z a_2) \ldots \overline{P}(z a_{\delta+s})}{\overline{P}(z b_1)\, \overline{P}(z b_2) \ldots \overline{P}(z b_s)} \cdot e^{c_0 + \sum_a c_a \overline{W}_a^s},$$

und ist in den Primformen vom Grade $\delta + \sum_{i=1}^{i=n} \varkappa_i$, *in* z_1, z_2 *vom Grade* $\frac{\delta + \sum_{i=1}^{i=n} \varkappa_i}{m}$, *unter* δ *irgend eine positive oder negative ganze Zahl verstanden.*

Die dargestellte Form hat in der That die verlangten Verzweigungspunkte und Verzweigungsmultiplicatoren. Es fragt sich, ob man die noch zur Verfügung stehenden Constanten, nämlich die Nullpunkte a, die Unendlichkeitspunkte b und die Coefficienten c_α so bestimmen kann, dass die Form vorgegebene Periodenmultiplicatoren

$$s_\varkappa = e^{\sigma_\varkappa \cdot 2\pi i}, \qquad 0 \leqq \Re(\sigma_\varkappa) < 1$$

$$s'_\varkappa = e^{\sigma'_\varkappa \cdot 2\pi i}, \qquad 0 \leqq \Re(\sigma'_\varkappa) < 1$$

besitzt.

Der oben aufgestellte Ausdruck multiplicirt sich längs des Weges $A_\varkappa$ mit

$$e^{\sum_\alpha \left\{ c_\alpha \omega_{\alpha\varkappa} - \eta_{\alpha\varkappa} \left[\left(\sum_a \overline{W}_\alpha^a - \sum_b \overline{W}_\alpha^b \right) + \sum_i \varkappa_i \overline{W}_\alpha^{e_i} \right] \right\}},$$

längs des Weges $B_\varkappa$ mit

$$e^{\sum_\alpha \left\{ c_\alpha \omega'_{\alpha\varkappa} - \eta'_{\alpha\varkappa} \left[\left(\sum_a \overline{W}_\alpha^a - \sum_b \overline{W}_\alpha^b \right) + \sum_i \varkappa_i \overline{W}_\alpha^{e_i} \right] \right\}}.$$

Indem ich nun zu den $\sigma_\varkappa$ und $\sigma'_\varkappa$ noch gewisse unbestimmte ganze Zahlen $N_\varkappa$ und $N'_\varkappa$ hinzufüge, hat man dann folgende $2p$ Gleichungen aufzulösen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \sum_\alpha \left\{ c_\alpha \omega_{\alpha\varkappa} - \eta_{\alpha\varkappa} \left[\left(\sum_a \overline{W}_\alpha^a - \sum_b \overline{W}_\alpha^b \right) + \sum_i \varkappa_i \overline{W}_\alpha^{e_i} \right] \right\} &= (N_\varkappa + \sigma_\varkappa) \cdot 2\pi i, \\ \sum_\alpha \left\{ c_\alpha \omega'_{\alpha\varkappa} - \eta'_{\alpha\varkappa} \left[\left(\sum_a \overline{W}_\alpha^a - \sum_b \overline{W}_\alpha^b \right) + \sum_i \varkappa_i \overline{W}_\alpha^{e_i} \right] \right\} &= (N'_\varkappa + \sigma'_\varkappa) \cdot 2\pi i. \end{aligned}$$

Ich multiplicire die ersten p dieser Gleichungen beziehungsweise mit $-\omega'_{\beta\varkappa}$, die letzten p mit $+\omega_{\beta\varkappa}$, und addire. Es ergiebt sich dann mit Hülfe der bilinearen Relationen zwischen den ω und den η:

$$2\pi i\left[\left(\sum_a \overline{W}_\beta^a - \sum_b \overline{W}_\beta^b\right) + \sum_i \varkappa_i \overline{W}_\beta^{c_i}\right]$$

$$= 2\pi i \begin{bmatrix} \sum_\varkappa (\sigma_\varkappa' \omega_{\beta\varkappa} - \sigma_\varkappa \omega_{\beta\varkappa}') \\ + N_1' \omega_{\beta 1} + N_2' \omega_{\beta 2} + \cdots + N_p' \omega_{\beta p} \\ - N_1 \omega_{\beta 1}' - N_2 \omega_{\beta 2}' - \cdots - N_p \omega_{\beta p}' \end{bmatrix}.$$

Multiplicire ich dagegen die ersten p Gleichungen mit $-\eta_{\beta\varkappa}'$, die letzten mit $+\eta_{\beta\varkappa}$, so erhalte ich:

$$2\pi i \,.\, c_\beta = 2\pi i \begin{bmatrix} \sum_\varkappa (\sigma_\varkappa' \eta_{\beta\varkappa} - \sigma_\varkappa \eta_{\beta\varkappa}') \\ + N_1' \eta_{\beta 1} + N_2' \eta_{\beta 2} + \cdots + N_p' \eta_{\beta p} \\ - N_1 \eta_{\beta 1}' + N_2 \eta_{\beta 2}' - \cdots - N_p \eta_{\beta p}' \end{bmatrix}.$$

Man erhält also folgende Gleichungen für die Constanten:

$$\sum_a \overline{W}_\alpha^a - \sum_b \overline{W}_\alpha^b = \sum_\varkappa (\sigma_\varkappa' \omega_{\alpha\varkappa} - \sigma_\varkappa \omega_{\alpha\varkappa}') - \sum_i \varkappa_i \overline{W}_\alpha^{c_i}$$
$$+ N_1' \omega_{\alpha 1} + N_2' \omega_{\alpha 2} + \cdots + N_p' \omega_{\alpha p}$$
$$- N_1 \omega_{\alpha 1}' - N_2 \omega_{\alpha 2}' - \cdots - N_p \omega_{\alpha p}'$$
$$= K_\alpha,$$

(2)
$$c_\alpha = \sum_\varkappa (\sigma_\varkappa' \eta_{\alpha\varkappa} - \sigma_\varkappa \eta_{\alpha\varkappa}')$$
$$+ N_1' \eta_{\alpha 1} + N_2' \eta_{\alpha 2} + \cdots + N_p' \eta_{\alpha p}$$
$$- N_1 \eta_{\alpha 1}' - N_2 \eta_{\alpha 2}' - \cdots - N_p \eta_{\alpha p}'.$$

Giebt man Grad, Verzweigungsstellen und Multiplicatorsystem einer multiplicativen Form vor — den Grad ν natürlich so, dass $\nu \,.\, m$ sich von $\sum_i \varkappa_i$ nur um eine ganze Zahl unterscheidet — so lassen sich, falls man nur die Zahl ε der Unendlichkeitsstellen hinreichend gross wählt, die Nullstellen und Unendlichkeitsstellen immer obigen Gleichungen gemäss bestimmen, und zwar im allgemeinen noch auf unendlich viele Weisen; die Constanten c_α sind hierdurch in jedem einzelnen Falle eindeutig bestimmt.

Es giebt also auf jedem algebraischen Gebilde mit vorgegebenen Verzweigungsstellen zu jedem Multiplicatorsysteme multiplicative Formen von jedem mit den Verzweigungsmultiplicatoren verträglichen Grade.

Die Frage nach der Zahl der hierbei noch willkürlich bleibenden Constanten kommt augenscheinlich auf die gleiche Frage für die vom Verzweigungsfactor befreite Form, d. h. auf die Frage nach der Zahl der Constanten in einer unverzweigten multiplicativen Form hinaus.

Ich werde sie daher bei Gelegenheit der besondern Betrachtung der unverzweigten Formen beantworten.

Die Lage der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen hängt bei vorgegebenen Verzweigungsstellen und Verzweigungsmultiplicatoren nur noch von den p Summen

$$\sum_{\varkappa} (\sigma'_\varkappa \omega_{\alpha\varkappa} - \sigma_\varkappa \omega'_{\alpha\varkappa})$$

ab.

Solche in den Verzweigungsmultiplicatoren übereinstimmende Multiplicatorsysteme, für welche diese Summen gleiche Werthe haben, will ich „verwandte Multiplicatorsysteme" nennen.

Man sieht nun leicht die Richtigkeit folgenden Satzes ein:

Sind zwei Multiplicatorsysteme verwandt, so ist jede Form des einen Systems von je einer Form gleichen Grades des andern Systemes nur um einen Exponentialfactor:

$$e^{c_0 + \sum_\alpha c_\alpha \overline{W}^\alpha_\alpha}$$

verschieden.

Multiplicative Formen, die sich nur um einen solchen Exponentialfactor unterscheiden, welche also dieselben Null- und Unendlichkeitsstellen besitzen, will ich „verwandte Formen" nennen.

Es gilt dann auch die Umkehrung des eben ausgesprochenen Satzes:

Zu verwandten Formen gehören verwandte Multiplicatorsysteme.

Denn vermehrt man die Zahlen c_α des allgemeinen Ausdrucks bezüglich um Δc_α, so vermehren sich die Zahlen $\sigma_\varkappa$, $\sigma'_\varkappa$ bezüglich um

$$\Delta \sigma_\varkappa = \sum_\alpha \Delta c_\alpha \,.\, \omega_{\alpha\varkappa},$$

$$\Delta \sigma'_\varkappa = \sum_\alpha \Delta c_\alpha \,.\, \omega'_{\alpha\varkappa}.$$

Entsprechend vermehrt sich

$$\sum_{\varkappa} (\sigma'_\varkappa \omega_{\beta\varkappa} - \sigma_\varkappa \omega'_{\beta\varkappa})$$

um

$$\Delta \sum_{\varkappa} (\sigma'_\varkappa \omega_{\beta\varkappa} - \sigma_\varkappa \omega'_{\beta\varkappa}) = \sum_\alpha \Delta c_\alpha \cdot \sum_{\varkappa} (\omega'_{\alpha\varkappa} \omega_{\beta\varkappa} - \omega_{\alpha\varkappa} \omega'_{\beta\varkappa}),$$

wo nun die Glieder von $\sum_\alpha$ rechts in Folge der bilinearen Relationen einzeln verschwinden.

Die Grössen $\sum_{\varkappa} (\sigma'_\varkappa \omega_{\beta\varkappa} - \sigma_\varkappa \omega'_{\beta\varkappa})$ bleiben also bei Hinzufügung eines

Exponentialfactors thatsächlich ungeändert. Das Gleiche gilt von den Verzweigungsmultiplicatoren; also ist das Multiplicatorsystem der veränderten Form in der That mit dem der ursprünglichen Form verwandt.

§ 8.

Algebraische Formen und Wurzelformen.

Die wichtigsten aller multiplicativen Formen sind die unverzweigten Formen; unterscheiden sich ja die verzweigten Formen von den unverzweigten nur durch das Hinzutreten des durch die Verzweigungsart wohlbestimmten Verzweigungsfactors, so dass die Theorie der allgemeinsten multiplicativen Formen, so lange man die Verzweigungsart als gegeben ansieht, in der Theorie der unverzweigten Formen mit enthalten ist; ich darf mich daher im folgenden auf besondere Behandlung der unverzweigten Formen beschränken.

Unter einer ganzen multiplicativen Form verstehe ich eine solche, welche nur 0*-Stellen, aber keine* ∞*-Stellen auf dem algebraischen Gebilde besitzt.*

Ihre allgemeine Gestalt ist

$$\overline{P}(z a_1)\,\overline{P}(z a_2)\ldots\overline{P}(z a_\delta)\,.\,e^{c_0+\sum_\alpha c_\alpha \overline{W}_\alpha^s}.$$

Die Zahl δ ihrer 0-Stellen nennt man die „*Werthigkeit*" der Form. Der Grad in z_1, z_2 ist dann

$$\nu = \frac{\delta}{m}.$$

Wir haben nun den Satz:

Irgend eine beliebige multiplicative Form lässt sich immer als Quotient zweier ganzen Formen ansehen, von denen die eine die 0*-Stellen, die andere die* ∞*-Stellen der gegebenen Form als einzige* 0*-Stellen besitzt.*

Dieser Satz entspricht dem Satze von der Zerlegung einer gebrochenen algebraischen Form oder einer algebraischen Function in zwei ganze algebraische Formen; man sieht aber, dass der Satz im Gebiet der allgemeinen multiplicativen Formen eine weit einfachere Fassung zulässt, indem man nicht, wie im allgemeinen bei den algebraischen Formen, noch gemeinsame 0-Stellen der beiden ganzen Formen zu adjungiren braucht.

Die Spaltung in ganze Formen ist immer noch, auch wenn man gemeinsame 0-Stellen nicht zulässt, auf unendlich viele Arten möglich, indem man die bei irgend einer Spaltung entstehenden Formen noch beide mit demselben übrigens willkürlichen Exponentialfactor multipliciren darf; doch sind alle möglichen Zählerformen einerseits und alle möglichen Nennerformen andererseits untereinander verwandt.

Vergleichen wir nun alle Formen von gleichem Grade ν und demselben (oder verwandten) Multiplicatorsystem untereinander hinsichtlich ihrer 0-Stellen!

Die 0-Stellen sind durch die Gleichungen gegeben

$$\sum_a \overline{W}_a^a = \sum_\varkappa (\sigma_\varkappa' \omega_{a\varkappa} - \sigma_\varkappa \omega_{a\varkappa}') \quad \begin{matrix} + N_1' \omega_{a1} + N_2' \omega_{a2} + \cdots + N_p' \omega_{ap} \\ - N_1 \omega_{a1}' - N_2 \omega_{a2}' - \cdots - N_p \omega_{ap}', \end{matrix}$$

unter $N_\varkappa$, $N_\varkappa'$ irgend welche positive oder negative ganze Zahlen verstanden, die für die verschiedenen Lösungssysteme $a_1, a_2, \ldots a_\delta$ verschieden, doch in jedem einzelnen Falle wohlbestimmt sind.

Es folgt hieraus:

Die 0-Stellen irgend zweier ganzen Formen gleichen Grades mit gleichen oder verwandten Multiplicatorsystemen genügen dem Abel'schen Theorem, d. h. die Summe der Integrale erster Gattung gebildet für die 0-Stellen stimmt für beide Formen bis auf ganzzahlige Vielfache der Perioden der Integrale erster Gattung überein.

Sind die Nullstellen einer Form mit dem Multiplicatorsystem $\binom{s_\varkappa}{s_\varkappa'}$ erst festgelegt, so sind es dadurch auch die ganzen Zahlen $N_\varkappa$, $N_\varkappa'$. Die Perioden des Logarithmus der Form längs der Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ lauten dann

$$(N_\varkappa + \sigma_\varkappa) 2\pi i$$

bezw.

$$(N_\varkappa' + \sigma_\varkappa') 2\pi i.$$

Bei Umlauf von z um einen der 0-Punkte der Form reproducirt sich die Form, während ihr Logarithmus sich um $2\pi i$ vermehrt.

Macht ausserdem noch z_2 $\mathfrak{q}'$ Umläufe um $z_2 = 0$, denen keine Umläufe von z um $z = \infty$ entsprechen, so multiplicirt sich die Form noch mit $e^{\mathfrak{q}' \cdot \nu \cdot 2\pi i}$, ihr Logarithmus wächst um $\mathfrak{q}' \cdot \nu \cdot 2\pi i$.

Eine Sonderstellung unter den multiplicativen Formen scheinen die algebraischen Formen einzunehmen.

Algebraische Formen sind solche unverzweigte multiplicative Formen, welche bei irgend welchen auf dem algebraischen Gebilde geschlossenen Wegen der Variablen z_1, z_2 sich reproduciren.

Dazu ist nothwendig, dass der Grad ν eine ganze Zahl, die Werthigkeit δ also ein Multiplum von m ist, und dass alle Zahlen $\sigma_\varkappa$, $\sigma_\varkappa' = 0$ sind. Ihre allgemeine Gestalt ist also

$$\overline{P}(za_1)\, \overline{P}(za_2) \ldots \overline{P}(za_{\nu m}) \cdot e^{c_0 + \sum_a c_a \overline{W}_a^z},$$

wo

$$\sum_a \overline{W}_a^a = \begin{matrix} + N_1' \omega_{a1} + N_2' \omega_{a2} + \cdots + N_p' \omega_{ap} \\ - N_1 \omega_{a1}' - N_2 \omega_{a2}' - \cdots - N_p \omega_{ap}', \end{matrix}$$

$$c_a = \begin{matrix} + N_1' \eta_{a1} + N_2' \eta_{a2} + \cdots + N_p' \eta_{ap} \\ - N_1 \eta_{a1}' - N_2 \eta_{a2}' - \cdots - N_p \eta_{ap}' \end{matrix}$$

ist.

Die p Gleichungen für die 0-Stellen sagen aus, dass die 0-Stellen einer algebraischen Form mit den 0-Stellen der algebraischen Form z_2^{ν} äquivalent (d. h. ihre Integralsummen congruent) sind.

Die algebraischen Formen z_1 und z_2 haben selber folgende Darstellung:

$$z_1 = \overline{P}(z0') \ \overline{P}(z0'') \ \ldots \ \overline{P}(z0^{|m|}) . e^{c_0 + \sum_{\alpha}' c_\alpha \overline{w}_\alpha^z},$$

$$z_2 = \overline{P}(z\infty') \ \overline{P}(z\infty'') \ldots \overline{P}(z\infty^{|m|}) . e^{c_0'}.$$

Dabei haben die Constanten c_α, wenn man unter $\binom{k_x}{k_x'}$ die Charakteristik (vergl. S. 287) desjenigen Gebietes der z-Ebene versteht, welches den Punkt $z = 0$ enthält, folgende Werthe

$$c_\alpha = \begin{matrix} k_1 \eta_{\alpha 1} + k_2 \eta_{\alpha 2} + \cdots + k_p \eta_{\alpha p} \\ + k_1' \eta_{\alpha 1}' + k_2' \eta_{\alpha 2}' + \cdots + k_p' \eta_{\alpha p}'. \end{matrix}$$

Längs der Wege A_x wächst $\log z_1$ um $-k_x' . 2\pi i$, längs B_x um $+ k_x' \cdot 2\pi i$, während $\log z_2$ sich reproducirt.

Einen ersten Schritt von den algebraischen Formen zu den allgemein multiplicativen Formen hat man mit der Einführung der „*Wurzelformen*" gemacht.*)

Man versteht unter einer Wurzelform μ^{ter} Stufe eine solche unverzweigte multiplicative Form von z_1, z_2, welche bei geschlossenen Umläufen der z_1, z_2 sich nur mit μ^{ten} Einheitswurzeln multiplicirt.

Damit eine Form dieser Bedingung genügt, muss der Grad derselben in Bezug auf z_1, z_2 ein Multiplum von $\frac{1}{\mu}$ sein:

$$\nu = \frac{\nu'}{\mu},$$

wobei die ganze Zahl ν' eine Lösung der Congruenz

$$\nu' \cdot m \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ \mu)$$

sein muss, damit die Werthigkeit

$$\delta = m \cdot \nu = m \cdot \frac{\nu'}{\mu}$$

eine ganze Zahl sei.

Ausserdem müssen die Zahlen σ_x, σ_x' Multipla von $\frac{1}{\mu}$ sein; bei Wurzelformen μ^{ter} Stufe sind also μ^{2p} verschiedene Systeme der Zahlen σ_x, σ_x' möglich. Man unterscheidet danach μ^{2p} verschiedene Systeme von Wurzelformen μ^{ter} Stufe, und weist jedem dieser Systeme in Bezug auf ein bestimmtes System je eine Zusammenstellung von $2p$ ganzen Zahlen

$$\binom{g_x}{h_x}$$

*) In Betreff dieser, sowie überhaupt wegen der von mir hier angewendeten Terminologie vergleiche man Klein, Math. Ann. Bd. 36, § 12.

zu, welche man die relative Charakteristik des Systems von Wurzelformen in Bezug auf das bestimmte System nennt

Diese Zahlen hängen mit den $\sigma_\varkappa$, $\sigma'_\varkappa$ auf folgende Weise zusammen: Zu dem festen System mögen die Zahlen $(\sigma_\varkappa)$, $(\sigma'_\varkappa)$ gehören, zu dem in Frage kommenden System die Zahlen $\sigma_\varkappa$, $\sigma'_\varkappa$; dann sind $g_\varkappa$, $h_\varkappa$ durch folgende Congruenzen bestimmt

$$\left.\begin{aligned} \mu\left(\sigma_\varkappa - (\sigma_\varkappa)\right) &\equiv -h_\varkappa \\ \mu\left(\sigma'_\varkappa - (\sigma'_\varkappa)\right) &\equiv +g_\varkappa \end{aligned}\right\} (\text{mod. } \mu), \qquad \begin{aligned} 0 \leqq h_\varkappa < \mu, \\ 0 \leqq g_\varkappa < \mu. \end{aligned}$$

Im Falle der Wurzelformen von ganzzahligem Grade sind die „*Elementarcharakteristiken*" unmittelbar durch die Congruenzen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \mu\,\sigma_\varkappa &\equiv -h_\varkappa \\ \mu\,\sigma'_\varkappa &\equiv +g_\varkappa \end{aligned}\right\} (\text{mod. } \mu).$$

Etwas complicirter ist die Definition der „*Primcharakteristiken*", welche nur im Falle der Wurzelformen zweiter Stufe Platz hat, und bei der die Zahlen $n_\varkappa$, welche im Multiplicator der Klein'schen Primform vorkommen, eine Rolle spielen; es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} 2\sigma_\varkappa + n_\varkappa &\equiv -h_\varkappa \\ 2\sigma'_\varkappa + n'_\varkappa &\equiv +g_\varkappa \end{aligned}\right\} (\text{mod. } 2).$$

Der Begriff der *relativen Charakteristik* einer Wurzelform in Bezug auf eine andere lässt sich auf beliebige multiplicative Formen gleichen Grades erweitern; nur muss man zuvor die Charakteristiken des gewöhnlichen Sprachgebrauchs mit dem Nenner μ versehen. Sei nämlich für eine erste Form

$$\sum_a \overline{W}_a^a = \sum_\varkappa (k_\varkappa\,\omega_{a\varkappa} + k'_\varkappa\,\omega'_{a\varkappa}),$$

für eine zweite Form

$$\sum_a \overline{W}_a^a = \sum \left((k_\varkappa)\,\omega_{a\varkappa} + (k'_\varkappa)\,\omega'_{a\varkappa}\right).$$

Dann nenne ich das System der Zahlen

$$\begin{pmatrix} k_\varkappa - (k_\varkappa) \\ k'_\varkappa - (k'_\varkappa) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N'_\varkappa - (N'_\varkappa) + \sigma'_\varkappa - (\sigma'_\varkappa) \\ -N_\varkappa + (N_\varkappa) - \sigma_\varkappa + (\sigma_\varkappa) \end{pmatrix}$$

die Charakteristik der ersten Form in Bezug auf die zweite.

Die so definirten Charakteristiken sind nicht nur echte Brüche, wie bei der gewöhnlichen Definition, sondern sie enthalten im Allgemeinen auch noch ganze Zahlen. Verschiebt man jedoch die Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ über einen 0-Punkt einer der beiden Formen, so ändern sich diese ganzen Zahlen, und nur die gebrochenen Bestandtheile der Charakteristiken sind wegen der Unverzweigtheit der Formen von jeder Verschiebung der Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ unabhängig.

Nenne ich als Erweiterung der gewöhnlichen Definition allgemein das Zahlensystem

$$\binom{k_\varkappa}{k_\varkappa'} = \begin{pmatrix} N_\varkappa' + \sigma_\varkappa' \\ - N_\varkappa - \sigma_\varkappa \end{pmatrix}$$

die „*Elementarcharakteristik*" der betr. Form, so zeigt sich dieselbe bei Formen von *ganzzahligem Grade* in z_1, z_2 in ihrem gebrochenen Theile von einer jeden Verschiebung der Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ unabhängig; ist jedoch der Grad ein Bruch mit dem Nenner m' (m' natürlich ein Theiler von m), so wechseln auch die Bruchbestandtheile bei Verschiebung der Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ über $z = \infty$ um Brüche mit dem Nenner m'.

Die *Primcharakteristiken* gestatten keine Erweiterung. Doch ist leicht zu sehen, dass im Falle der Wurzelformen 2^{ter} Stufe die Primcharakteristiken in der That bis auf ganze Zahlen von einer Verschiebung der Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ unabhängig sind. Die Zahlen $n_\varkappa$, $n_\varkappa'$ wechseln, wenn $d \equiv 1 \pmod 2$ ist, nur bei Verschiebung über $z = \infty$ um eine ungerade Zahl, zugleich $2\sigma_\varkappa$, $2\sigma_\varkappa'$ um eine ungerade Zahl; ist dagegen $d \equiv 0 \pmod 2$, so wechseln die Zahlen $n_\varkappa$, $n_\varkappa'$ um gerade Zahlen, und $\sigma_\varkappa$, $\sigma_\varkappa'$ ebenfalls um gerade Zahlen. Bei jeder sonstigen Verschiebung bleiben, — wie ich hier ohne Beweis anführe — die Zahlen $n_\varkappa$, $n_\varkappa'$ ungeändert, während $\sigma_\varkappa$, $\sigma_\varkappa'$ um ganze Zahlen sich ändern, wenn die Wege über einen 0-Punkt der Form hinweggeführt werden. In jedem Falle ändert sich also die Primcharakteristik

$$\begin{pmatrix} + N_\varkappa' + \sigma_\varkappa' + \frac{1}{2} n_\varkappa' \\ - N_\varkappa - \sigma_\varkappa - \frac{1}{2} n_\varkappa \end{pmatrix}$$

nur um ganze Zahlen.

§ 9.

Gleichberechtigung der algebraischen und multiplicativen Formen und Unabhängigkeit von der speciellen Darstellung.

Geht man von der Darstellung des algebraischen Gebildes durch die unabhängige Variable z zur Darstellung durch irgend eine andere unabhängige Variable Z über, so verwandeln sich bekanntlich die algebraischen Functionen von z in algebraische Functionen von Z. Die Gesammtheit der algebraischen Functionen ist eben von der speciellen Darstellung des algebraischen Gebildes unabhängig.

Anders die algebraischen Formen von z_1, z_2. Die Theorie derselben setzt stets eine ganz bestimmte Riemann'sche Fläche voraus, und wird auf jeder andern Riemann'schen Fläche eine andere.

Dies gilt z. B. für die Arbeiten von Dedekind und Weber*)

*) Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. Crelle's Journ. Bd. 92 (datirt 1880).

sowie von Kronecker*) über ganze algebraische Functionen, und ins besondere auch für die formentheoretischen Ausführungen in Bd. II der Modulfunctionen S. 484ff.

Den Schlüssel zu diesem Verhalten der algebraischen Formen, und zugleich die Beseitigung dieses Missstandes liefert die Theorie der multiplicativen Formen. Ich kann nämlich zeigen:

Die Gesammtheit aller multiplicativen Formen bleibt dieselbe, von welcher speciellen kanonischen oder nichtkanonischen Darstellung des algebraischen Gebildes man auch ausgehen mag.

Mit der Wahl der unabhängigen Variablen z_1, z_2 ändern sich nur Grad und Elementarcharakteristiken, also auch die Multiplicatorsysteme der einzelnen Formen, nicht aber die Werthigkeit und die relativen Charakteristiken.

In Folge dessen bleiben bei Aenderung der Darstellung die algebraischen Formen nicht als solche erhalten, sondern verwandeln sich in multiplicative Formen, während andere multiplicative Formen sich in algebraische Formen verwandeln.

Es werde statt der bisher benutzten m-werthigen algebraischen Function z die M-werthige algebraische Function Z als unabhängige Variable eingeführt.

Wie früher z, so muss jetzt Z derart in zwei homgene Veränderliche Z_1, Z_2

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2}$$

gespalten werden, dass Z_1 und Z_2 weder simultan verschwinden, noch eins derselben unendlich wird.

Zunächst ist dadurch zwischen den z_1, z_2 und den Z_1, Z_2 nur die Beziehung gegeben, dass zwischen den Quotienten $z = \frac{z_1}{z_2}$ und $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ eine gewisse algebraische Gleichung besteht, und dass erlaubten Werthsystemen z_1, z_2 nur erlaubte Werthsysteme Z_1, Z_2 entsprechen und umgekehrt.

Will man aber die Formentheorie der z_1, z_2 und der Z_1, Z_2 in Beziehung setzen, so muss man eine bestimmte diesen Bedingungen genügende functionelle Abhängigkeit zwischen z_1, z_2 und Z_1, Z_2 festsetzen, der man natürlich möglichst einfache Eigenschaften ertheilen wird. Am liebsten würde man die Spaltung so ausführen, dass geschlossenen Wegen der z_1, z_2 auch geschlossene Wege der Z_1, Z_2, nicht nur von Z, entsprächen und umgekehrt, d. h. dass Z_1, Z_2 algebraische Formen von z_1, z_2 wären und umgekehrt; aber schon das erste ist ohne Adjunction gemeinsamer Nullstellen von Z_1, Z_2 im Allg[illegible]

*) Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen. Crelle's Journ. Bd. 91. 1881. — Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Crelle's Journ. Bd. 92. 1881.

unmöglich, und vollends die Umkehrbarkeit ist höchstens dann denkbar, wenn s und Z gleiche Werthigkeit besitzen.

Verlangt man dagegen nur multiplicatives Entsprechen der s_1, s_2 und Z_1, Z_2, so ist eine Spaltung der verlangten Art immer möglich.

Es seien $b_1, b_2, \ldots b_M$ die Unendlichkeitsstellen von Z. Es giebt dann unendlich viele sich nur um beliebige Exponentialfactoren unterscheidende Spaltungen von Z in zwei ganze multiplicative Formen ohne gemeinsame Nullstellen, sämmtlich von der Gestalt:

$$Z_1 = Z \,.\, \bar{P}(s\,b_1)\; \bar{P}(s\,b_2) \ldots \bar{P}(s\,b_M) \,.\, e^{c_0 + \sum_\alpha c_\alpha \bar{W}_\alpha^s},$$

$$Z_2 = \quad \bar{P}(s\,b_1)\; \bar{P}(s\,b_2) \ldots \bar{P}(s\,b_M) \,.\, e^{c_0 + \sum_\alpha c_\alpha \bar{W}_\alpha^s}.$$

Von diesen Spaltungen sei irgend eine beliebige ausgewählt.

Die Elementarcharakteristik von Z_2 als multiplicativer Form von s_1, s_2 sei

$$\binom{K_\varkappa}{K_\varkappa'},$$

d. h. der Zuwachs von $\log Z_2$ längs der Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ bei festgehaltenem s_2 sei

$$-K_\varkappa' \,.\, 2\pi i,$$
$$+K_\varkappa \,.\, 2\pi i.$$

Irgend eine multiplicative Form F von s_1, s_2 vom Grade $\frac{\delta}{m}$ habe als solche die Charakteristik,

$$\binom{k_\varkappa}{k_\varkappa'},$$

d. h. ihr Logarithmus wachse längs der Wege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ bei festgehaltenem Werthe von s_2 um

$$-k_\varkappa' \,.\, 2\pi i,$$
$$+k_\varkappa \,.\, 2\pi i.$$

Irgend ein Weg $(s\,s)$ bestehe aus je $\mu_\varkappa$ Wegen $A_\varkappa$, $\mu_\varkappa'$ Wegen $B_\varkappa$, $\mathfrak{q}$ Umkreisungen der Punkte $s = \infty$, und $\log s_2$ wachse längs desselben um $\mathfrak{q}_2 \,.\, 2\pi i$. Der zugehörige Multiplicator von F heisst dann:

$$e^{\frac{\delta}{m}(\mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q})\cdot 2\pi i + \binom{-\mu_1 k_1' - \mu_2 k_2' - \cdots - \mu_p' k_p'}{+\mu_1' k_1 + \mu_2' k_2 + \cdots + \mu_p' k_p} 2\pi i}.$$

Wie verhält sich nun dieselbe Form F als multiplicative Form von Z_1, Z_2?

Ich spalte den beliebigen geschlossenen Weg des Werthsystems Z_1, Z_2 in einen Weg, welcher $\mathfrak{Q}$ Umläufe um $Z = \infty$ macht, längs dessen $\log Z_2$ um $\mathfrak{Q}_2 \,.\, 2\pi i$ wächst, und welcher keinen der Schnitte $A_\varkappa^\pm$, $B_\varkappa$ überschreitet, und in eine Reihe von Periodenwegen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, jeden mit festgehaltenem Werthe von Z_2.

Umkreist der erste Weg, in den Variablen z_1, z_2 gedeutet, die Punkte $z = \infty$ im Ganzen $\mathfrak{q}$-mal, wächst längs desselben $\log z_2$ um $\mathfrak{q}_2 \cdot 2\pi i$, und umkreist er den Punkt b_1 r_1-mal, den Punkt b_2 r_2-mal u. s. w., so ist dem Ausdruck von Z_2 durch z_1, z_2 zufolge der Zuwachs von $\log Z_2$.

$$\mathfrak{Q}_2 \cdot 2\pi i = (r_1 + r_2 + \cdots + r_M)\, 2\pi i + \frac{M}{m}(\mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q}) \cdot 2\pi i.$$

Nun ist

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_M = \mathfrak{Q},$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q}}{M} = \frac{\mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q}}{m}.$$

Der Zuwachs $\frac{\delta}{m}(\mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q}) \cdot 2\pi i$ *der* δ*-werthigen Form* F *lässt sich also in der genau entsprechenden Form* $\frac{\delta}{M}(\mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q}) \cdot 2\pi i$ *ausdrücken.*

Lässt man nun z längs $A_\varkappa$ oder $B_\varkappa$ laufen, und zwar so, dass $\log z_2$ um $x_\varkappa \cdot 2\pi i$ bezw. $x'_\varkappa \cdot 2\pi i$ wächst, so durchläuft Z den entsprechenden Weg der Z-Fläche, und $\log Z_2$ wächst um

$$-K'_\varkappa \cdot 2\pi i + \frac{M}{m} x_\varkappa \cdot 2\pi i$$

bezw.

$$+K_\varkappa \cdot 2\pi i + \frac{M}{m} x'_\varkappa : 2\pi i.$$

Soll $\log Z_2$ sich reproduciren, so muss

$$x_\varkappa = +\frac{m}{M} K'_\varkappa,$$

$$x'_\varkappa = -\frac{m}{M} K_\varkappa$$

sein. D. h. *einem Umlaufe* $A_\varkappa$ *bezw.* $B_\varkappa$ *von* Z *bei festgehaltenem Werthe von* Z_2 *entspricht ein ebensolcher Umlauf von* z*, bei welchem* $\log z_2$ *bezüglich um*

$$+\frac{m}{M} K'_\varkappa \cdot 2\pi i,$$

$$-\frac{m}{M} K_\varkappa \cdot 2\pi i$$

wächst. Längs eines solchen Weges wächst aber $\log F$ bezüglich um

$$-k'_\varkappa \cdot 2\pi i + \frac{\delta}{m} \cdot \frac{m}{M} K'_\varkappa \cdot 2\pi i = -\left(k'_\varkappa - \frac{\delta}{M} K'_\varkappa\right) \cdot 2\pi i,$$

$$+k_\varkappa \cdot 2\pi i - \frac{\delta}{m} \cdot \frac{m}{M} K_\varkappa \cdot 2\pi i = +\left(k_\varkappa - \frac{\delta}{M} K_\varkappa\right) \cdot 2\pi i.$$

Die Elementarcharakteristik von F in Bezug auf Z_1, Z_2 lautet also:

$$\begin{pmatrix} k_x - \frac{\delta}{M} K_x \\ k'_x - \frac{\delta}{M} K'_x \end{pmatrix}.$$

Man hat damit den Satz:

Die Elementarcharakteristik einer multiplicativen Form in Bezug auf die Variablen Z_1, Z_2 ist gleich der Elementarcharakteristik in Bezug auf die Variablen z_1, z_2 vermindert um die mit dem Grade der Form in Z_1, Z_2 multiplicirte Elementarcharakteristik von Z_2 in Bezug auf die Variablen z_1, z_2.

Fasst man nun dieses Resultat mit dem betreffs $(\mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q})$ gefundenen zusammen, so folgt:

Der allgemeine Multiplicator einer multiplicativen Form F als Form von Z_1, Z_2 ist ein Ausdruck derselben Gestalt, wie der von F als Form von z_1, z_2, nur treten an Stelle der Zahlen m, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}$ die Zahlen M, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}$ und an Stelle der Charakteristik $\begin{pmatrix} k_x \\ k'_x \end{pmatrix}$ die Charakteristik

$$\begin{pmatrix} k_x - \frac{\delta}{M} K_x \\ k'_x - \frac{\delta}{M} K'_x \end{pmatrix}.$$

Ferner folgt hieraus:

Die relative Charakteristik zweier Formen von gleicher Werthigkeit, und also auch das Multiplicatorsystem einer multiplicativen Function, ist von der speciellen Darstellung des algebraischen Gebildes unabhängig.

Wenn, wie jetzt gezeigt, die multiplicativen Formen eine von den speciellen Variablen unabhängige Bedeutung haben, so muss es auch eine von der speciellen Wahl der z_1, z_2 *unabhängige Definition der algebraischen Primform* geben, statt der bisherigen, die von einer kanonischen Fläche ausgeht.

In der That, *sei*

$$F(z_1, z_2) = \overline{P}(z a_1)\, \overline{P}(z a_2) \ldots \overline{P}(z a_\delta)\, .\, e^{c_0 + \sum_\alpha c_\alpha \overline{W}^z_\alpha}$$

irgend eine multiplicative Form, so ist, unter $\overline{P}^z_{\xi\eta}$ das auf S. 5 definirte Integral 3. Gattung verstanden, die Form

$$P(z, e) = \left[F(z_1, z_2)\, e^{\overline{P}^z_{e a_1} + \overline{P}^z_{e a_2} + \cdots + \overline{P}^z_{e a_\delta}} \right]^{\frac{1}{\delta}}$$

von der früher definirten Primform $\overline{P}(z, e)$ nur um einen Exponentialfactor der Gestalt:

$$\text{const. } e^{\sum_\alpha \frac{c_\alpha}{\delta} \overline{W}^z_\alpha}$$

verschieden.

Man sieht hieraus zugleich, dass alle Primformen relativ zu einander den gleichen Grad haben, dass aber ihr Grad in Bezug auf die unabhängigen Variablen z_1, z_2 mit der Wahl derselben wechselt, nämlich $= \frac{1}{m}$ ist, unter m die Zahl der 0-Stellen von z_1 oder z_2, d. h. die Werthigkeit der Function z verstanden.

Nun ist aber der Grad irgend einer multiplicativen Form in derselben Weise von der Wahl der unabhängigen Variablen z_1, z_2 abhängig: er ist $= \frac{\delta}{m}$, unter δ die um die Anzahl der Unendlichkeitsstellen verminderte Anzahl der Nullstellen verstanden.

Der Grad irgend einer multiplicativen Form relativ zu den multiplicativen Primformen ist von der Wahl der unabhängigen Variablen z_1, z_2 sowohl wie von der Auswahl der speciellen Primform unabhängig, nämlich gleich der um die Anzahl der Unendlichkeitsstellen verminderten Anzahl der Nullstellen.

Ich werde daher künftig, wenn ich nichts Besonderes hinzufüge, diese Zahl den *Grad* der Form nennen und mit δ bezeichnen.

Da die verschiedenen multiplicativen Primformen nur unwesentlich von einander verschieden sind, so werde ich auch fortan die ursprüngliche von der kanonischen Fläche ausgehende Definition beibehalten, welche den für spätere Untersuchungen wesentlichen Vorzug vor der allgemeinen Definition hat, auch die Abhängigkeit von der Nullstelle genau festzulegen.

§ 10.

Die nirgends verschwindende ganze Differentialform $d\omega$ und die zugehörigen multiplicativen Formen Φ.

Ausser den endlichen Formen habe ich in § 2 auch gewisse Differentiale und Differentialformen in Betracht gezogen. Es lassen sich nun leicht alle multiplicativen Differentialformen einschliesslich der Differentiale auf eine beliebige unter ihnen zurückführen, da ja der Quotient irgend zweier eine multiplicative Form sein muss.

Jede beliebige multiplicative Differentialform gewinnt man aus irgend einer bestimmten durch Multiplication mit einem beliebigen Producte von Primformen und der Exponentialfunction eines beliebigen überall endlichen Integrals.

Die wichtigsten Differentialformen sind diejenigen, welche auf dem algebraischen Gebilde weder irgendwo verschwinden, noch unendlich werden. Der Quotient irgend zweier solchen Differentialformen muss eine multiplicative Form ohne Null- und Unendlichkeitsstellen, also die Exponentialfunction eines überall endlichen Integrals sein. Also:

Die allgemeinste nirgends verschwindende und nirgends unendlich werdende multiplicative Differentialform ist

$$d\omega = e^{c_0 + \sum_\alpha c_\alpha \overline{W}_\alpha^s} \cdot d\omega_s,$$

unter $d\omega_s$ die früher auf der kanonischen Fläche definirte Differentialform

$$d\omega_s = -\frac{(z, dz)}{G(z_1, z_2)}$$

verstanden.

Die Differentialformen $d\omega$ haben also eine von der speciellen Darstellung unabhängige Bedeutung, und sind alle vom Grade $-(2p-2)$; sie erscheinen aber im Allgemeinen sämmtlich als multiplicative Formen, und nur *im Falle einer kanonischen Darstellung wird eine der Formen $d\omega$ eine algebraische Form $d\omega_s$. Doch nimmt diese vom allgemeinen Standpunkte aus in keiner Weise eine Sonderstellung unter den übrigen $d\omega$ ein, da man eine jede beliebige Form $d\omega$ zur algebraischen Differentialform $d\omega_s$ machen kann*, wenn man statt z_1, z_2 geeignete verwandte Formen als unabhängige Veränderliche wählt.

Es thut daher der Allgemeinheit keinen Abbruch, wenn ich auch künftig die in § 2 definirte specielle Differentialform $d\omega_s$ zu Grunde lege.

Multiplicirt man eine Differentialform $d\omega$ mit irgend einer multiplicativen Form vom Grade $2p-2$, so entsteht ein multiplicatives Differential, welches durch Integration eine Function liefert, die bei Umläufen der Variablen Substitutionen der Gestalt

$$u' = \alpha u + \beta$$

erleidet.

Insbesondere gehört zu jeder Differentialform $d\omega$ ein System von multiplicativen Formen Φ vom Grade $2p-2$, welche mit $d\omega$ multiplicirt ein algebraisches Differential liefern, so dass

$$\Phi \cdot d\omega = \mathrm{Alg}\, F(z) \cdot dz$$

ist.

Die den verschiedenen $d\omega$ entsprechenden Systeme von Φ-Formen unterscheiden sich nur um Exponentialfactoren, sind also mit einander verwandt. Die Multiplicatoren der Φ sind die reciproken Werthe der Multiplicatoren des zugehörigen $d\omega$. Die Φ-Systeme sind in demselben Sinne von der speciellen Darstellung unabhängig, wie die $d\omega$.

Im Falle einer kanonischen Darstellung gehört zu der algebraischen Differentialform $d\omega_s$ ein System von algebraischen Formen $(2p-2)^{ten}$ Grades, die ich mit $\Phi(z_1, z_2)$ bezeichne, so dass also

$$\Phi(z_1, z_2) \cdot d\omega_s = \mathrm{Alg}\, F(z) \cdot dz$$

ist.

Diese bei kanonischer Darstellung algebraischen Formen $(2p-2)^{ten}$ Grades — an deren Stelle bei anderer Wahl der kanonischen Variablen z_1, z_2 auch jedes andere der verwandten Formensysteme Φ treten kann — sind für die weitere Untersuchung von grundlegender Bedeutung.

Ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{\overline{P}(za_1)\,\overline{P}(za_2)\ldots\overline{P}(za_{s+2p-2})}{\overline{P}(zb_1)\,\overline{P}(zb_2)\ldots\overline{P}(zb_s)} \cdot e^{c_0+\sum_a c_a \overline{W}_a^s},$$

$$\sum_a \overline{W}_a^a - \sum_b \overline{W}_a^b \equiv 0 = \sum_x (N_x \omega_{ax} + N_x' \omega_{ax}'),$$

$$c_a = \sum_x (N_x \eta_{ax} + N_x' \eta_{ax}').$$

Ich unterscheide nun die Formen $\Phi(z_1, z_2)$ in ganze und gebrochene Formen; die ersteren schreibe ich mit kleinem Functionszeichen: $\varphi(z_1, z_2)$.

Eine Form $\varphi(z_1, z_2)$ giebt mit $d\omega_s$ multiplicirt ein überall endliches algebraisches Differential; solcher Differentiale giebt es aber p linear unabhängige. Daraus folgt:

Die ganzen Formen $\varphi(z_1, z_2)$ lassen sich durch p linear unabhängige unter ihnen linear und homogen zusammensetzen:

$$\varphi(z_1, z_2) = k_1\varphi_1(z_1, z_2) + k_2\varphi_2(z_1, z_2) + \cdots + k_p\varphi_p(z_1, z_2)$$

$$\varphi_\alpha(z, z_2) \,.\, d\omega_s = dw_\alpha^s.$$

Es sind dies dieselben Formen, die unter dem Namen „adjungirte Curven“*) die bekannte wichtige Rolle in der Theorie der algebraischen Integrale spielen.

Ich erinnere nur an den Riemann-Roch'schen Satz, den ich hier in folgender Form ausspreche:

Dem Gleichungssystem

$$\overline{W}_\alpha^{a_1} + \overline{W}_\alpha^{a_2} + \cdots + \overline{W}_\alpha^{a\vartheta} \equiv K_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots p)$$

genügen $\infty^{\vartheta-p+\sigma'}$ Punktsysteme $a_1, a_2 \ldots a_\vartheta$, unter σ' die Anzahl derjenigen linear unabhängigen Formen $\varphi(z_1, z_2)$ verstanden, welche an sämmtlichen Punkten eines dieser Punktsysteme verschwinden.

In Betreff der *gebrochenen Formen* $\Phi(z_1, z_2)$ erinnere ich daran, dass die Summe der logarithmischen Residuen aller Unendlichkeitsstellen des Integrals

$$\int \Phi(z_1, z_2) \,.\, d\omega_s$$

verschwinden muss.

Es sei nun x_1, x_2 eine einfache Unendlichkeitsstelle von $\Phi(z_1, z_2)$; das erste Glied der Entwicklung nach steigenden Potenzen von $\overline{P}(zx)$ laute

$$A \cdot \left(\frac{\overline{P}(zy)}{\overline{P}(xy)}\right)^{(2p-2)+1} \cdot \overline{P}(zx)^{-1}.$$

*) Nach der Terminologie von Brill und Nöther in Math. Ann. Bd. 7.

Ich behaupte dann:

Der erste Entwicklungscoefficient A ist gerade das logarithmische Residuum der Stelle x.

Es gelten nämlich die Entwicklungen:

$$\overline{P}(z\,x) = \frac{1}{G(x_1, x_2)} \cdot \left(\frac{z_2}{x_2}\right)^{\frac{1}{m}-1} \cdot (z\,x)^{+1} + \cdots,$$

$$\frac{\overline{P}(z\,y)}{\overline{P}(x\,y)} = \left(\frac{z_2}{x_2}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot (z\,x)^0 + \cdots,$$

$$d\omega_z = dz \cdot \left\{\frac{x_2^2}{G(x_1, x_2)} \cdot \left(\frac{z_2}{x_2}\right)^{-\frac{2p-2}{m}} \cdot (z\,x)^0 + \cdots\right\},$$

welche in das Integral eingesetzt die Entwicklung

$$\int \Phi(z_1, z_2)\, d\omega_z = \int dz \left\{\frac{A}{z-x} + \mathfrak{P}(z-x)\right\} = A \log(z-x) + \mathfrak{P}'(z-x)$$

ergeben, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Der Residuensatz lässt sich daher in der Form aussprechen:

Besitzt eine Form $\Phi(z_1, z_2)$ nur einfache Unendlichkeitsstellen, so ist die Summe der ersten Entwicklungscoefficienten nach Primformen an diesen Stellen gleich Null.

§ 11.

Reciproke multiplicative Formen. Erweiterter Riemann-Roch'scher Satz.

Ich nenne zwei multiplicative Formen *„reciproke Formen"*, wenn ihr Product eine Form $\Phi(z_1, z_2)$ also bei unserer Darstellung durch kanonische Variable z_1, z_2 eine algebraische Form vom Grade $2p-2$ ist.

Es sei $F(z_1, z_2)$ die eine Form, δ ihr Grad, ϱ irgend einer ihrer Multiplicatoren, $F'(z_1, z_2)$ die andere Form, δ' ihr Grad, ϱ' der ϱ entsprechende Multiplicator; dann ist nach Definition

$$F(z_1, z_2) \,.\, F'(z_1, z_2) = \Phi(z_1, z_2),$$
$$\delta + \delta' = 2p - 2, \quad \varrho \,.\, \varrho' = 1.$$

Genügen die Null- und Unendlichkeitsstellen der einen Form den Gleichungen

$$\sum_a \overline{W}_\alpha^a - \sum_b \overline{W}_\alpha^b = K_\alpha,$$

so genügen die der andern Form den Gleichungen

$$\sum_{a'} \overline{W}_\alpha^{a'} - \sum_{b'} \overline{W}_\alpha^{b'} = K'_\alpha$$

wobei

$$K_\alpha + K'_\alpha \equiv 0$$

ist.

Die hierdurch festgesetzte reciproke Beziehung zwischen zwei Systemen multiplicativer Formen erweist sich für die Abzählung der Constanten sehr fruchtbar. Ein specieller Fall ist auch schon von Roch in diesem Sinne verwerthet worden. Nämlich die algebraischen Functionen einerseits und die Formen $\Phi(z_1, z_2)$ andererseits sind reciproke Formen; mit Rücksicht darauf lässt sich der gewöhnliche Riemann-Roch'sche Satz auch so aussprechen:

Die Anzahl der linear unabhängigen algebraischen Functionen, welche an ε vorgegebenen Stellen unendlich werden dürfen, ist $\varepsilon - p + 1 + \tau'$, unter τ' die Anzahl der linear unabhängigen reciproken ganzen Formen $\varphi(z_1, z_2)$ verstanden, welche an den gegebenen ε Unendlichkeitsstellen verschwinden. Der Satz gilt übrigens auch für $\varepsilon = 0$; τ' wird dann die Zahl p aller linear unabhängigen $\varphi(z_1, z_2)$, und es wird also $\varepsilon - p + 1 + \tau' = 1$; d. h. es giebt nur eine linear unabhängige überall endliche algebraische Function, nämlich die Constante.

Der Grad einer multiplicativen Form mit bestimmtem Multiplicatorsystem sei δ, die Zahl der vorgegebenen Unendlichkeitsstellen ε. Die $\delta + \varepsilon$ Nullstellen $a_1, a_2, \ldots a_{\delta+\varepsilon}$ müssen dann gewissen p Congruenzen von der Gestalt

$$\overline{W}_a^{a_1} + \overline{W}_a^{a_2} + \cdots + \overline{W}_a^{a_{\delta+\varepsilon}} \equiv K_a$$

genügen. Nach dem Riemann-Roch'schen Satze besitzen nun diese Congruenzen $\infty^{\varepsilon-p+\tau'}$ verschiedene Lösungen, wenn τ' die Anzahl der linear unabhängigen $\varphi(z_1, z_2)$ bedeutet, die an einem der Punktsysteme $a_1, a_2, \ldots a_{\delta+\varepsilon}$ verschwinden.

Es giebt also $\varepsilon + \delta - p + 1 + \tau'$ linear unabhängige multiplicative Formen $F(z_1, z_2)$ vom Grade δ und von bestimmtem Multiplicatorsysteme, welche an ε vorgegebenen Stellen unendlich werden dürfen, unter τ' die Anzahl derjenigen linear unabhängigen $\varphi(z_1, z_2)$ verstanden, welche an den Nullstellen einer der Formen verschwinden.

Es sei jetzt $\varphi(z_1, z_2)$ eine dieser φ-Formen. Dann ist

$$f'(z_1, z_2) = \frac{\varphi(z_1, z_2)}{F(z_1, z_2)}$$

eine ganze zu $F(z_1, z_2)$ reciproke Form, welche an den ε Unendlichkeitsstellen von $F(z_1, z_2)$ verschwindet. Umgekehrt, wenn $f'(z_1, z_2)$ eine an den ε Unendlichkeitsstellen von $F(z_1, z_2)$ verschwindende ganze reciproke Form ist, so ist

$$\varphi(z_1, z_2) = F(z_1, z_2) \cdot f'(z_1, z_2)$$

eine an den Nullstellen von $F(z_1, z_2)$ verschwindende φ-Form.

Also ist die Anzahl τ' derjenigen linear unabhängigen $\varphi(z_1, z_2)$, welche an den Nullstellen einer multiplicativen Form verschwinden, gleich der Anzahl der linear unabhängigen ganzen reciproken Formen, welche an den Unendlichkeitsstellen derselben Form verschwinden.

Dieser Satz mit dem vorhergehenden zusammen ergiebt die Erweiterung des Riemann-Roch'schen Satzes für die multiplicativen Formen:

Es giebt $\varepsilon + \delta - p + 1 + \tau'$ *linear unabhängige multiplicative Formen* $F(z_1, z_2)$ *vom Grade* δ *und mit bestimmtem Multiplicatorsysteme, welche an* ε *vorgegebenen Stellen unendlich werden dürfen, unter* τ' *die Anzahl derjenigen linear unabhängigen ganzen reciproken Formen verstanden, welche an den gegebenen* ε *Unendlichkeitsstellen verschwinden.*

Für ganze Formen gestaltet sich der Satz folgendermassen:

Ist δ *der Grad eines Systems multiplicativer Formen,* σ *die Anzahl der darin enthaltenen linear unabhängigen ganzen Formen,* δ' *und* σ' *die entsprechenden Zahlen für das reciproke System, so dass also* $\delta + \delta' = 2p - 2$ *ist, so bestehen die beiden reciproken Relationen*

$$\sigma = \delta - p + 1 + \sigma',$$
$$\sigma' = \delta' - p + 1 + \sigma.$$

Es ist dies im Grunde nichts anderes, als der bekannte Brill-Nöther'sche Reciprocitätssatz*), welcher also jetzt mit dem gewöhnlichen Riemann-Roch'schen Satze unter einen Ansatz als Specialfall des verallgemeinerten Riemann-Roch'schen Satzes gebracht ist, während er sonst nur als Zusatz zum gewöhnlichen Riemann-Roch'schen Satze erscheint.

Es soll nun noch genauer untersucht werden, in welcher Weise die willkürlichen Constanten in unsere Formen eintreten.

Es mögen die ε Unendlichkeitsstellen von $F(z_1, z_2)$ getrennt liegen und die Coordinaten x_1', x_2'; x_1'', x_2''; ... $x_1^{|\varepsilon|}, x_2^{|\varepsilon|}$ haben; die ersten Entwicklungscoefficienten daselbst sollen $A_1, A_2, \ldots A_\varepsilon$ sein.

In dem speciellen Falle, wo $F(z_1, z_2)$ eine Form $\Phi(z_1, z_2)$ ist, sind diese Coefficienten der Bedingung unterworfen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\varepsilon} A_\nu = 0.$$

Was entspricht dieser Bedingung im allgemeinen Fall?

Es sei $f'(z_1, z_2]$ irgend eine der σ' ganzen reciproken Formen. Dann ist $F(z_1, z_2) \cdot f'(z_1, z_2)$ eine Form $\Phi(z_1, z_2)$, welche nur an den Stellen x_1', x_2'; x_1'', x_2''; ... $x_1^{|\varepsilon|}, x_2^{|\varepsilon|}$ je mit dem Coefficienten $A_\nu f'(x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|})$ unendlich wird. Daher muss die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\varepsilon} A_\nu f'(x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|}) = 0$$

*) Brill-Nöther: Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie § 5. Math. Ann. Bd. 7. 1873.

für jede der σ' linear unabhängigen Formen $f'(z_1, z_2)$ erfüllt sein, die ich der Reihe nach mit

$$f_1'(z_1, z_2),\ f_2'(z_1, z_2),\ \ldots f_{\sigma'}'(z_1, z_2)$$

bezeichnen will.

Die Coefficienten A_ν der Unendlichkeitsstellen

$$x_1',\ x_2';\ x_1'',\ x_2'';\ \ldots x_1^{|\varepsilon|},\ x_2^{|\varepsilon|}$$

einer beliebigen multiplicativen Form genügen, unter $f_1'(z_1, z_2)$, $f_2'(z_1, z_2)$, $\ldots f_{\sigma'}'(z_1, z_2)$ die σ' linear unabhängigen ganzen reciproken Formen verstanden, dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&A_1 f_1'(x_1', x_2') + A_2 f_1'(x_1'', x_2'') + \cdots + A_\varepsilon f_1'(x_1^{|\varepsilon|}, x_2^{|\varepsilon|}) = 0,\\
&A_1 f_2'(x_1', x_2') + A_2 f_2'(x_1'', x_2'') + \cdots + A_\varepsilon f_2'(x_1^{|\varepsilon|}, x_2^{|\varepsilon|}) = 0,\\
&\quad\vdots\\
&A_1 f_{\sigma'}'(x_1', x_2') + A_2 f_{\sigma'}'(x_1'', x_2'') + \cdots + A_\varepsilon f_{\sigma'}'(x_1^{|\varepsilon|}, x_2^{|\varepsilon|}) = 0.
\end{aligned}$$

Wenn nun aber τ' linear unabhängige Combinationen der $f_1', f_2', \ldots f_\sigma'$ an den sämmtlichen Stellen $x_1^{|\nu|}$, $x_2^{|\nu|}$ verschwinden, so sind τ' dieser Gleichungen identische Folge der übrigen, die A_ν also nur $\sigma' - \tau'$ unabhängigen Bedingungsgleichungen unterworfen. Daraus folgt:

Die Coefficienten A_ν der ε Unendlichkeitsstellen einer multiplicativen Form lassen sich linear und homogen aus $\varepsilon - \sigma' + \tau'$ willkürlichen Grössen zusammensetzen, unter σ' die Zahl aller linear unabhängigen ganzen reciproken Formen, unter τ' die Zahl derjenigen linear unabhängigen ganzen reciproken Formen verstanden, welche an sämmtlichen ε Unendlichkeitsstellen verschwinden.

Im Allgemeinen sind die A_ν nicht die einzigen willkürlichen Constanten der Form. Denn man kann immer noch ohne Aenderung der A_ν eine beliebige lineare Combination der σ ganzen Formen $f(z_1, z_2)$ desselben Grades und Multiplicatorsystemes hinzufügen. Man findet mithin als Gesammtzahl der willkürlichen Constanten

$$\varepsilon - \sigma' + \tau' + \sigma,$$

welche Anzahl wegen der oben gegebenen Relation

$$\sigma - \sigma' = \delta - p + 1$$

in der That mit der früher gefundenen Constantenzahl

$$\varepsilon + \delta - p + 1 + \tau'$$

übereinstimmt.

Von den $\varepsilon + \delta - p + 1 + \tau'$ willkürlichen linearen Constanten einer multiplicativen Form kommen $\varepsilon - \sigma' + \tau'$ auf die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen, σ auf die noch willkürliche ganze Form.

Ich bemerke noch, dass alle diejenigen Fälle, wo sowohl σ wie σ' von Null verschieden sind, besondere Werthe der Integralsummen, und also auch besondere Multiplicatorsysteme voraussetzen.

Den Fall, wo entweder σ oder σ' gleich Null ist, wenn es also nur in einem der beiden reciproken Formensysteme (oder in keinem, wenn $\delta = p - 1$) *ganze Formen giebt, nenne ich den „allgemeinen Fall".*

Im allgemeinen Fall ist, wenn

$$\delta \geqq p - 1 \text{ ist}, \quad \sigma = \delta - p + 1, \quad \sigma' = 0,$$

wenn

$$\delta \leqq p - 1 \text{ ist}, \quad \sigma = 0, \qquad \sigma' = \delta' - p + 1.$$

Der allgemeine Fall liegt z. B. immer vor, wenn entweder $\delta < 0$ oder $\delta > 2p - 2$ ist. Für $\delta = 0$ sowie $\delta = 2p - 2$ ist der allgemeine Fall durch die nichtalgebraischen und nicht mit algebraischen verwandten Functionen bezw. Formen vorgestellt.

§ 12.

Mindestanzahl der Unendlichkeitsstellen einer multiplicativen Form.

Es sei Grad und Multiplicatorsystem einer Form gegeben:

Wie gross ist die Mindestanzahl von Unendlichkeitsstellen, wenn dieselben ihrer Lage nach keinen Bedingungen unterworfen, also ganz frei beweglich sein sollen?

Es sei σ die Anzahl der ganzen Formen vom selben Grad und Multiplicatorsystem, σ' die Anzahl der ganzen reciproken Formen.

Ich untersuche die folgenden beiden Fälle:

1) $\varepsilon > \sigma'$,
2) $\varepsilon \leqq \sigma'$.

Im Falle 1) $\varepsilon > \sigma'$ ist die Anzahl $\varepsilon + \delta - p + 1 + \tau'$ der willkürlichen Constanten einer Form mit irgendwie vorgegebenen ε Unendlichkeitsstellen grösser als $\sigma' + \delta - p + 1$, also grösser als σ, d. h. diejenigen Formen, welche überall mit Ausnahme höchstens der ε vorgegebenen Stellen endlich bleiben, besitzen mehr willkürliche Constanten, als die überall endlichen Formen. In Folge dessen ist die Möglichkeit, dass die Formen alle auch an den gegebenen ε Stellen endlich bleiben, ausgeschlossen, und man erhält also für

$$\varepsilon = \sigma' + 1$$

sicher noch wirklich unendlich werdende Formen.

Im Falle 2) $\varepsilon \leqq \sigma'$ ist bei allgemeiner Lage der Unendlichkeitsstellen $\tau' = \sigma' - \varepsilon$, also die Zahl der willkürlichen Constanten

$$\varepsilon + \delta - p + 1 + \tau' = \sigma.$$

Die Zahl der Constanten in denjenigen Formen, welche an den

gegebenen Stellen unendlich werden dürfen, ist also ebensogross, als die Anzahl der Constanten in denjenigen Formen, welche nirgends unendlich werden, d. h. wir bekommen in Wahrheit keine Formen mehr mit Unendlichkeitsstellen. Das Ergebniss der Untersuchung ist also:

Die Mindestanzahl frei beweglicher wirklicher Unendlichkeitsstellen einer multiplicativen Form ist

$$\varepsilon = \sigma' + 1 = p - \delta + \sigma,$$

also um 1 *grösser als die Zahl der ganzen reciproken Formen.*

Die Zahl der willkürlichen Constanten in einer Form mit dieser Zahl der Unendlichkeitsstellen ist bei allgemeiner Lage derselben um 1 *grösser als die Zahl der Constanten in einer ganzen Form vom selben Grade und Multiplicatorsystem, und die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen sind im selben Falle jedesmal eindeutig bestimmt.*

Multiplicative Formen mit nur einer beweglichen Unendlichkeitsstelle giebt es ausschliesslich dann, wenn es keine ganzen reciproken Formen giebt, also nur im allgemeinen Falle für $\delta \geqq p - 1$.

Die ausgesprochenen Sätze geben die Mindestanzahl ganz allgemein gelegener Unendlichkeitsstellen; man kann dieselben, jede einzelne ganz beliebig, sich bewegen lassen, und doch den Zähler der Form immer so bestimmen, dass die Form dasselbe Multiplicatorsystem beibehält. In jedem einzelnen Stadium der Bewegung sind dabei die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen im Allgemeinen ihren Verhältnissen nach wohlbestimmt. Doch bei specieller Lage der Unendlichkeitsstellen — z. B. wenn man als Unendlichkeitsstellen irgend ε der Nullstellen einer ganzen reciproken Form wählt, — erhöht sich die Constantenzahl des Zählers, so dass man einen oder mehrere dieser Coefficienten zum Verschwinden bringen kann, dass man also eine Form mit einer geringeren Anzahl von Unendlichkeitsstellen erhält, als die eben gefundene allgemeine Mindestanzahl angiebt.

Dies ist aber, wie ich wiederhole, nur für specielle Lagen der Unendlichkeitsstellen möglich; man kann diese dann, wenn das Multiplicatorsystem dasselbe bleiben soll, nicht mehr ganz beliebig variiren, sondern sie müssen ein System von weniger als ε Graden der Freiheit bilden. Die Frage nach der *Mindestanzahl der Unendlichkeitsstellen von beschränkter Bewegungsfreiheit* haben die Herren Brill und Nöther in der oben angeführten Abhandlung für die algebraischen Functionen beantwortet, nachdem schon Riemann eine erste Abzählung gegeben hatte. Ganz entsprechend gestaltet sich dieselbe Untersuchung für die multiplicativen Formen. Ich will hier nur die beiden wichtigsten Grenzfälle kurz erörtern:

1) *Welches ist die Mindestanzahl der Unendlichkeitsstellen überhaupt?*

2) *Welches ist die Mindestanzahl beweglicher Unendlichkeitsstellen.*

Zu 1 findet man, wie ich gleich im Voraus bemerke, entweder feste Unendlichkeitsstellen, oder solche von einem Grade der Freiheit, zu 2 solche entweder von einem oder von zwei Graden der Freiheit.

Beide Fragen werden, im Gegensatz zu der Frage nach der Mindestanzahl frei beweglicher Unendlichkeitsstellen, nur unter Voraussetzung allgemeiner Multiplicatoren, sowie allgemeiner Moduln des algebraischen Gebildes beantwortet werden, so dass für spezielle Moduln und Multiplicatoren sehr wohl eine kleinere Zahl von Unendlichkeitsstellen möglich ist.

Damit $x', x'', \ldots x^{\varepsilon}$ wirkliche Unendlichkeitsstellen sein sollen, muss das Gleichungssystem auf Seite 315 mindestens ∞^1, allgemein $\infty^{\varepsilon-1}$ Lösungen in nicht verschwindenden Grössen $A_1, A_2, \ldots A_\varepsilon$ besitzen. Da man $\varepsilon \leqq \sigma'$ annehmen darf, so müssen also die sämmtlichen $(\varepsilon-\varrho)$-gliedrigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} f_1'(x_1', x_2') & f_2'(x_1', x_2') & \ldots & f_\sigma'(x_1', x_2') \\ f_1'(x_1'', x_2'') & f_2'(x_1'', x_2'') & \ldots & f_\sigma'(x_1'', x_2'') \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1'(x_1^{\varepsilon}, x_2^{\varepsilon}) & f_2'(x_1^{\varepsilon}, x_2^{\varepsilon}) & \ldots & f_\sigma'(x_1^{\varepsilon}, x_2^{\varepsilon}) \end{vmatrix}$$

verschwinden. Dies ergiebt

$$(\varrho+1)(\sigma'-\varepsilon+1)$$

unabhängige Gleichungen für die ε Punkte $x', x'', \ldots x^{\varepsilon}$.

Sollen die Lösungen nun ein System von t Graden der Freiheit bilden, so muss allgemein zu reden

$$\varepsilon-(\varrho+1)(\sigma'-\varepsilon+1) = t \geqq 0$$

sein, oder

$$\varepsilon = \frac{(\varrho+1)\sigma' + (\varrho+1+t)}{\varrho+2}.$$

Ich brauche nur $\varrho = 0$ zu berücksichtigen, da man für $\varrho > 0$ niemals kleinere Zahlen als für $\varrho = 0$ erhält, und wenn gleiche Zahlen, dann immer einen geringeren Grad τ der Freiheit.

Nehme ich also $\varrho = 0$ an, und sehe vorderhand von einer Untersuchung, ob die Gleichungen mit einander verträglich sind, ab, berücksichtige aber, dass jedenfalls

$$\varepsilon \geqq -\delta$$

sein muss, so finde ich als

Mindestanzahl der Unendlichkeitsstellen

1) *von fester Lage:*

$\varepsilon = \frac{\sigma'+1}{2}$, *wenn* $\delta \geqq -p$ *ist*

keine Lösung, „ $\delta < -p$ *„*

} *vorausgesetzt, dass* $\sigma' \equiv 1 \pmod 2$,

2) *von einem Grade der Freiheit:*

$\varepsilon = \frac{\sigma'+2}{2}$, *wenn* $\delta \geqq -(p+1)$ *ist*

keine Lösung, „ $\delta < -(p+1)$ *„*

} *vorausgesetzt, dass* $\sigma' \equiv 0 \pmod 2$,

3) *von zwei Graden der Freiheit:*

$\varepsilon = \frac{\sigma'+3}{2}$, *wenn* $\delta \geqq -(p+2)$ *ist*

keine Lösung, „ $\delta < -(p+2)$ *„*

} *vorausgesetzt, dass* $\sigma' \equiv 1 \pmod 2$.

In den ausgeschlossenen Fällen

$$\delta < -p, \quad \delta < -(p+1), \quad \delta < -(p+2)$$

ist die betreffende Mindestanzahl einfach $\varepsilon = -\delta$, der Grad der Freiheit jedoch ein grösserer, nämlich $t = \varepsilon - p = -p - \delta$.

Es ist nun noch zu untersuchen, wie viel verschiedene Systeme von fester Lage, von einem Grade der Freiheit, von zwei Geraden der Freiheit das durch die Matrix vorgestellte Gleichungssystem liefert; dadurch wird zugleich die Frage beantwortet, ob die Gleichungen überhaupt mit einander verträglich sind. Es ist das im Wesentlichen ein geometrisches Problem, welches darauf hinausläuft, die durch die Gleichungen

$$X_1 = f_1(z_1, z_2), \; X_2 = f_2'(z_1, z_2), \ldots X_{\sigma'} = f_{\sigma'}'(z_1, z_2)$$

vorgestellte Curve vom Geschlechte p im $(\sigma'-1)$ dimensionalen Raume in Bezug auf gewisse Singularitäten zu untersuchen.

Der Kürze halber gebe ich einfach die Resultate, welche aus der von den Herren Brill und Nöther in § 11 ihrer Abhandlung angegebenen Formel hervorgehen:

Es bezeichne ω die Anzahl der allen $f_1', f_2', \ldots f_{\sigma'}'$ gemeinsamen Nullstellen, t den Grad der Freiheit je eines Lösungssystems, α *die Anzahl der unterschiedenen Lösungssysteme; dann ist*

$$\alpha = \binom{\delta'-\omega-\varepsilon+1}{\varepsilon-t} - \binom{p}{1}\cdot\binom{\delta'-\omega-\varepsilon-1}{\varepsilon-t-2} + \binom{p}{2}\binom{\delta'-\omega-\varepsilon-3}{\varepsilon-t-4} - + \cdots$$

$$\delta = p+\sigma-2\varepsilon+t, \qquad \sigma' = 2\varepsilon - t - 1.$$
$$\delta' = p-\sigma+2\varepsilon-t-2,$$

Man kann den Ausdruck für α auch in einer andern Weise darstellen. Die Summe

$$\binom{r}{s} - \binom{p}{1}\binom{r-2}{s-2} + \binom{p}{2}\binom{r-4}{s-4} - + \cdots$$

ist nämlich der Coefficient des von x freien Gliedes in der Entwicklung folgenden Ausdrucks nach steigenden Potenzen von x,

$$(1-x^2)^p \cdot \frac{(1-x)^{s-r-1}}{x^s} = \frac{(1+x)^p \cdot (1-x)^{p+s-r-1}}{x^s}.$$

Daraus folgt:

α ist der Coefficient des von x freien Gliedes in der Entwicklung von

$$\frac{(1+x)^p\ (1-x)^{\sigma+\omega}}{x^{s-t}}$$

nach steigenden Potenzen von x.

Besonders einfach wird α im allgemeinen Falle. Da für diesen das Problem nur für $\delta \leqq p-1$ existirt, so ist $\sigma = 0$. Zugleich ist $\omega = 0$, so dass α der Coefficient des von x freien Gliedes in der Entwicklung von

$$\frac{(1-x)^p}{x^{s-t}}$$

wird.

Im allgemeinen Falle wird daher

$$\alpha = \binom{p}{s-t} = \frac{p(p-1)\ldots(p-s+t+1)}{1.2\ldots(s-t)},$$

$$\delta = p - 2s + t, \qquad \sigma' = 2s - t - 1.$$
$$\delta' = p + 2s - t - 2,$$

Die oben vorgenommene Ausschliessung der Werthe $\delta < -(p+t)$ findet sich also auch in der Formel für α begründet. Denn aus

$$\delta = p - 2s + t < -(p+t)$$

folgt

$$p - s + t + 1 \leqq 0,$$

so dass dann — da für negative δ immer der allgemeine Fall vorliegt — in der That $\alpha = 0$ wird.

Ich wende ferner die Formel noch auf den Fall der algebraischen Functionen und auf den Fall der bei kanonischer Darstellung algebraischen Formen vom Grade $2p-2$ d. h. der Form $\Phi(z_1, z_2)$ an.

Im ersten Fall ist

$$\delta = 0, \quad \delta' = 2p-2 \qquad \omega = 0$$
$$\sigma = 1, \quad \sigma' = p,$$

und

$$s = \frac{p+1+t}{2}$$

wo für ungeradzahlige p nur $t = 0$ und $t = 2$, für geradzahlige p dagegen nur $t = 1$ in Betracht kommt.

Allgemein setze ich

$$p = 2\varepsilon - t - 1.$$

Die Anzahl der Lösungen α ist der Coefficient des von x freien Gliedes in der Entwicklung von:

$$\frac{(1+x)^{2\varepsilon-t-1} \cdot (1-x)}{x^{\varepsilon-t}}$$

also

$$\alpha = \binom{2\varepsilon-t-1}{\varepsilon-t} - \binom{2\varepsilon-t-1}{\varepsilon-t-1} = t \cdot \frac{(2\varepsilon-t-1)\,(2\varepsilon-t-2)\ldots(\varepsilon+1)}{1\,.\,2\ldots(\varepsilon-t)}$$

mithin

$$\text{für } t = 0 \quad \alpha = 0,$$

$$\text{für } t = 1 \quad \alpha = \frac{(2\varepsilon-2)\,(2\varepsilon-3)\ldots(\varepsilon+1)}{1\,.\,2\ldots(\varepsilon-1)},$$

$$\text{für } t = 2 \quad \alpha = \frac{(2\varepsilon-2)\,(2\varepsilon-3)\ldots(\varepsilon+1)}{1\,.\,2\ldots(\varepsilon-1)}.$$

Die Unendlichkeitsstellen einer algebraischen Function sind also immer beweglich, und die Mindestanzahl derselben ist bei geradzahligem p gleich $\frac{p+2}{2}$, bei ungeradzahligem p dagegen gleich $\frac{p+3}{2}$. Im ersten Falle besitzen die Unendlichkeitsstellen einen, im andern zwei Grade der Freiheit; die Anzahl der verschiedenen Systeme von Unendlichkeitsstellen ist beidemal

$$\alpha = \frac{(2\varepsilon-2)\,(2\varepsilon-3)\ldots(\varepsilon+1)}{1\,.\,2\ldots(\varepsilon-1)}.$$ *)

Für die algebraischen Formen vom Grade $2p - 2$ ist

$$\delta = 2p-2, \quad \delta' = 0, \qquad \sigma = p, \quad \sigma' = 1, \qquad \omega = 0, \quad \varepsilon = \frac{2+t}{2}.$$

Es kommt nur $t = 0$ mit $\varepsilon = 1$ und $t = 2$ mit $\varepsilon = 2$ in Betracht. Die Anzahl α ist der Coefficient des von x freien Gliedes in der Entwicklung von

$$\frac{(1+x)^p \cdot (1-x)^p}{x^{\varepsilon-1}}$$

also

$$\text{für } t = 0 \quad \alpha = 0,$$

$$\text{für } t = 2 \quad \alpha = 1.$$

*) Dieser von mir gefundene geschlossene Ausdruck der Zahl α stimmt genau mit den beiden von Herrn Brill in Math. Ann. Bd. 36. S. 358 angegebenen geschlossenen Ausdrücken überein. Leider war mir zur Zeit der Abfassung meiner Arbeit diese Abhandlung von Herrn Brill weder bekannt noch zugänglich.

Die Mindestanzahl der Unendlichkeitsstellen einer nicht ganzen algebraischen Form $\Phi(z_1, z_2)$ vom Grade $2p-2$ ist $\varepsilon = 2$. Diese bilden dann ein einziges frei bewegliches System.

Alle die vorstehenden Sätze, mit Ausnahme derjenigen über die Anzahl der frei beweglichen Unendlichkeitsstellen, beziehen sich nur auf allgemeine Moduln des algebraischen Gebildes und auf allgemeine Multiplicatorsysteme. *Für specielle Multiplicatorsysteme auf algebraischen Gebilden von speciellen Moduln kann die Mindestanzahl der Unendlichkeitsstellen sehr wohl eine kleinere sein, als die angegebene.* Z. B. ist die Mindestanzahl der beweglichen Unendlichkeitsstellen einer algebraischen Function auf einem hyperelliptischen Gebilde bekanntermassen nicht $\frac{p+2}{2}$ bezw. $\frac{p+3}{2}$, sondern 2.

Für specielle Multiplicatorsysteme kann sich z. B. auch auf einem beliebigen algebraischen Gebilde die Anzahl wenigstens der festen Unendlichkeitsstellen selbst bis $(-\delta)$ erniedrigen, welche Zahl jedenfalls für $-p < \delta < 0$ kleiner als die allgemeine Mindestanzahl $\frac{p-\delta}{2}$ ist.

Eine solche Erniedrigung der allgemeinen Grenze kann aber, mögen die Moduln allgemein oder speciell sein, jedenfalls nicht für alle Multiplicatorsysteme stattfinden.

Denn gesetzt, das Congruenzensystem

$$\overline{W}_a^{a_1} + \overline{W}_a^{a_2} + \cdots + \overline{W}_a^{a_{\delta+s}} - \overline{W}_a^{x'} - \overline{W}_a^{x''} - \cdots - \overline{W}_a^{x^{(s)}} \equiv K_a$$

liefere für jedes der ∞^p Systeme von Werthen K_a ein mindestens t-fach unendliches System von Punktgruppen $a_1, a_2, \ldots a_{\delta+s}, x', x'', \ldots x^{(s)}$, so müsste das System aller möglichen Punktgruppen ein mindestens $(p+t)$-fach mannigfaltiges System sein, also

$$\delta + 2\varepsilon \geqq p + t, \quad \varepsilon \geqq \frac{p-\delta+t}{2}$$

sein, d. h. es wäre ε mindestens gleich der oben gefundenen Mindestanzahl für den allgemeinen Fall; und für diejenigen Werthe von δ, für welche diese Formel nicht gilt, d. h. für $\delta < -(p+t)$ und für $\delta \geqq p-1$, ist es selbstverständlich, dass die da sich allgemein ergebenden Mindestanzahlen $(-\delta)$ und t nicht noch weiter erniedrigt werden können.

Sieht man nun aber ganz davon ab, bei der Variirung der Formen das Multiplicatorsystem derselben festzuhalten, so hören alle Unterschiede zwischen den verschiedenen algebraischen Gebilden auf. Dann nämlich kann man jede Nullstelle und Unendlichkeitsstelle und ausserdem noch jede der Constanten k_0, k_a des allgemeinen Ausdrucks einzeln beliebig variiren ohne aus dem Gebiet der multiplicativen Formen des bestimmten Grades herauszutreten.

Dies giebt auch Aufklärung darüber, wie es möglich ist, dass auf algebraischen Gebilden von bestimmten Moduln gewisse algebraische Functionen- und Formensysteme scheinbar isolirt auftreten, die auf anderen Gebilden, wenn auch mit noch so wenig verschiedenen Moduln, nicht zu existiren scheinen. Ist nämlich die Anzahl der Null- und Unendlichkeitsstellen zu gering, so kann man bei allgemeiner Variation der Moduln nicht mehr durch Variation der Null- und Unendlichkeitsstellen erreichen, dass das Multiplicatorsystem dasselbe bleibt.

Bei Variation der Moduln des algebraischen Gebildes verwandeln sich die speciellen algebraischen Functionen in nothwendig multiplicative Functionen, während man die allgemeinen algebraischen Functionen so einrichten kann, dass sie algebraisch bleiben.

Es ist jedoch nicht nöthig, dass bei der in Rede stehenden Variation alle algebraischen Functionen mit einer gewissen Anzahl von Unendlichkeitsstellen wieder in einem System mit gemeinsamem Multiplicatorsystem zusammen bleiben, sondern sie werden im Allgemeinen verschiedene Multiplicatorsysteme bekommen müssen.

Inwieweit ein solches Zusammenbleiben möglich ist, inwieweit es auch auf allgemeinem algebraischen Gebilde in dem Sinne specielle Multiplicatorsysteme giebt, dass zu ihnen nicht nur einzelne Formen sondern ganze Formensysteme mit einer geringern als der allgemeinen Mindestanzahl von Unendlichkeitsstellen gehören, das wäre einer genauern Untersuchung werth. Was ich in meiner Note in Nr. 3 der Gött. Nachr. vom Jahre 1893 auf Seite 133 über specielle Multiplicatorsysteme sage, bezieht sich nur auf solche Multiplicatorsysteme, zu denen wenigstens einzelne Formen mit einer geringern Anzahl dann natürlich im Allgemeinen fester Unendlichkeitsstellen gehören. Solche specielle Multiplicatorsysteme giebt es natürlich immer. Ueberhaupt habe ich an jener Stelle den Unterschied zwischen festen und beweglichen Unendlichkeitsstellen nicht hervortreten lassen, hauptsächlich in Folge meines Ausgangs von den automorphen Formen, bei denen die zwischen $\delta = 0$ und $\delta = 2p - 2$ liegenden Fälle zunächst zurücktreten.

§ 13.

Die Elementarformen.

Wir haben oben gesehen, dass irgend eine multiplicative Form von bestimmtem Grad und Multiplicatorsystem durch das Verhalten in ihren Unendlichkeitsstellen soweit gekennzeichnet ist, dass nur noch eine lineare Combination einer hinreichenden Anzahl ganzer multiplicativer Formen desselben Systems willkürlich bleibt. Ein specieller Fall multiplicativer Formen sind die algebraischen und von diesen wieder die rationalen Functionen. Diese sind durch das Verhalten in

ihren Unendlichkeitsstellen bis auf eine willkürlich bleibende Constante bestimmt. Das führt aber bei den rationalen Functionen dazu, dieselben aus Partialbrüchen und einer Constanten darzustellen; ich will solche einfache Darstellungselemente in Anlehnung an den von französischen Mathematikern gebrauchten Ausdruck „éléments simples" allgemein „*Elementarfunctionen*" und wenn es sich um Formen handelt „*Elementarformen*" nennen. Bei den rationalen Functionen ist die Elementarfunction wieder eine Function derselben Art, eine rationale Function, und zwar eine solche, welche immer nur an einer Stelle unendlich wird. Auch die algebraischen Functionen stellt man durch Elementarfunctionen dar. Hier bietet sich aber die Schwierigkeit, welche darin liegt, dass es keine algebraischen Functionen mit nur einer Unendlichkeitsstelle giebt. Man ist daher gezwungen, entweder zu der variablen Unendlichkeitsstelle noch eine Anzahl fester Unendlichkeitsstellen hinzuzunehmen, — dies geschieht z. B. wenn man irgend eine elliptische Function als Summe von Functionen $\frac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}$ darstellt — oder man muss Functionen einer allgemeineren Art als Elementarfunctionen heranziehen, — im algebraischen Falle Integrale zweiter Gattung.

Beide Arten von Darstellungen sind nun auch für die allgemeinen multiplicativen Formen möglich, und es wird sich dabei ein überraschender Zusammenhang zwischen den Elementarformen der einen und der andern Art herausstellen. Alle bekannten Darstellungen der algebraischen Functionen durch Elementarfunctionen, sowohl durch algebraische, wie durch Integrale, ergeben sich dann als Specialfälle unserer Formendarstellungen durch multiplicative Elementarformen.

Es ist also die Aufgabe, sämmtliche multiplicative Formen eines Systems vom Grade δ und dem Multiplicatorsystem $\varrho_\varkappa$ durch Elementarformen darzustellen, — wobei ich mich in dieser Arbeit auf Formen mit nur einfachen Unendlichkeitsstellen beschränke. —

Wenn das System auch ganze Formen, etwa in der Anzahl σ, enthält, so hat man ausser den gebrochenen auch noch *ganze Elementarformen* nöthig, nämlich irgend σ linear unabhängige ganze Formen des Systems, welche $f_1(z_1, z_2)$, $f_2(z_1, z_2)$, $\cdots$ $f_\sigma(z_1, z_2)$ heissen sollen.

Jede beliebige ganze Form des Systems lässt sich dann auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt darstellen:

$$f(z_1, z_2) = B_1 f_1(z_1, z_2) + B_2 f_2(z_1, z_2) + \cdots + B_\sigma f_\sigma(z_1, z_2)$$

Denn wären irgend zwei Darstellungen derselben Form einmal mit den Coefficienten B_μ, das andere Mal mit den Coefficienten C_μ möglich, so müsste

$$(B_1 - C_1) f_1(z_1, z_2) + (B_2 - C_2) f_2(z_1, z_2) + \cdots + (B_\sigma - C_\sigma) f_\sigma(z_1, z_2)$$

identisch verschwinden, was eine lineare Relation zwischen den $f_1, f_2, \ldots f_\sigma$ ergäbe, entgegen der Voraussetzung über die Auswahl dieser Formen.

Was nun die *gebrochenen Elementarformen* betrifft, so will ich zuerst von solchen Elementarformen sprechen, welche selbst multiplicative Formen desselben Systems sind, wie die darzustellenden Formen; ich will sie *„Elementarformen der ersten Art"* nennen.

Wenn es im reciproken System σ' linear unabhängige ganze Formen giebt, so ist die Mindestanzahl willkürlich anzunehmender Unendlichkeitsstellen $\sigma' + 1$.

Ich verstehe nun unter einer Elementarform erster Art eine solche multiplicative Form des betreffenden Systems, welche nur an σ' festen Stellen $y', y'', \ldots y^{|\sigma'|}$ von allgemeiner Lage und an einer variablen Stelle x je einfach unendlich werden, und zwar an der Stelle x mit dem Coefficienten 1.

Der allgemeine Ausdruck der Elementarform in Primformen ist:

$$(\mathrm{I}) \qquad A(z_1, z_2; x_1, x_2) = \frac{1}{\overline{P}(zx)} \cdot \frac{\overline{P}(xy')\,\overline{P}(xy'')\ldots\overline{P}(xy^{|\sigma'|})}{\overline{P}(zy')\,\overline{P}(zy'')\ldots\overline{P}(zy^{|\sigma'|})} \cdot \frac{\overline{P}(za_1)\,\overline{P}(za_2)\ldots\overline{P}(za_{p+\sigma})}{\overline{P}(xa_1)\,\overline{P}(xa_2)\ldots\overline{P}(xa_{p+\sigma})} \cdot e^{\sum_\alpha k_\alpha \bar{w}_\alpha^{sx}},$$

wobei die Constanten folgenden Bedingungen genügen müssen:

$$(1) \quad \overline{W}_\alpha^{a_1} + \overline{W}_\alpha^{a_2} + \cdots + \overline{W}_\alpha^{a_{p+\sigma}} = \sum_x (h_x \omega_{\alpha x} + h_x' \omega_{\alpha x}') + \left(\overline{W}_\alpha^{y'} + \overline{W}_\alpha^{y''} + \cdots + \overline{W}_\alpha^{y^{|\sigma'|}}\right) + \overline{W}_\alpha^{z},$$

$$\equiv K_\alpha + \left(\overline{W}_\alpha^{y'} + \overline{W}_\alpha^{y''} + \cdots + \overline{W}_\alpha^{y^{|\sigma'|}}\right) + \overline{W}_\alpha^{z},$$

$$(2) \qquad k_\alpha = \sum_x (h_x \eta_{\alpha x} + h_x' \eta_{\alpha x}').$$

Dabei sollen die festen Unendlichkeitspunkte $y', \ldots y^{|\sigma'|}$ eine solche Lage haben, dass die Coefficienten des Unendlichwerdens in ihnen durch die Lage des Punktes x eindeutig bestimmt sind. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\sigma'}$ die Coefficienten des Unendlichwerdens in $y', y'', \ldots y^{|\sigma'|}$. Dieselben müssen mit dem Coefficienten 1 der Stelle x durch folgende Gleichungen verbunden sein, in welchen $f_1', f_2', \ldots f_{\sigma'}'$ die σ' linear unabhängigen ganzen Formen des reciproken Systems vorstellen:

$$(3) \quad \begin{aligned} &\alpha_1 f_1'(y_1', y_2') + \alpha_2 f_1'(y_1'', y_2'') + \cdots + \alpha_{\sigma'} f_1'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) + f_1'(x_1, x_2) = 0, \\ &\alpha_1 f_2'(y_1', y_2') + \alpha_2 f_2'(y_1'', y_2'') + \cdots + \alpha_{\sigma'} f_2'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) + f_2'(x_1, x_2) = 0, \\ &\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\alpha_1 f_{\sigma'}(y_1', y_2') + \alpha_2 f_{\sigma'}(y_1'', y_2'') + \cdots + \alpha_{\sigma'} f_{\sigma'}'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) + f_{\sigma'}'(x_1, x_2) = 0. \end{aligned}$$

Damit die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\sigma'}$ hierdurch immer eindeutig bestimmt sind, ist hinreichende und nothwendige Bedingung, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1'(y_1', y_2'), & f_1'(y_1'', y_2''), & \ldots & f_1'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) \\ f_2'(y_1', y_2'), & f_2'(y_1'', y_2''), & \ldots & f_2'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) \\ \vdots & & & \\ f_{\sigma'}'(y_1', y_2'), & f_{\sigma'}'(y_1'', y_2''), & \ldots & f_{\sigma'}'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist, d. h. dass es keine nur an den Stellen $y', y'', \ldots y^{|\sigma'|}$ wirklich unendlich werdende Form desselben Systems, oder dass es keine an sämmtlichen Stellen $y', y'', \ldots y^{|\sigma'|}$ verschwindende ganze Form des reciproken Systems giebt. In solcher Weise kann man die festen Unendlichkeitsstellen aber sicher wählen; denn wenn es für jede Lage derselben eine nur an diesen unendlich werdende Form gäbe, so wäre die Mindestanzahl allgemein gelegener Unendlichkeitsstellen nicht $\sigma' + 1$, sondern $\leqq \sigma'$.

Setzt man eine solche allgemeine Lage der festen Unendlichkeitsstellen voraus, so sind die Coefficienten in denselben durch das Gleichungssystem (3) *immer eindeutig bestimmt, welches auch die Lage der variablen Unendlichkeitsstelle x sein mag.*

Durch das Congruenzensystem (1) sind die Stellen $a_1, a_2, \ldots a_{p+\sigma}$ derart als Functionen der variablen Unendlichkeitsstelle x bestimmt, dass diese Functionen noch σ willkürliche Parameter enthalten, für welche man beliebige ein- oder mehrdeutige Functionen der Unendlichkeitsstelle x einsetzen kann.

Ich zeige nun, dass die definirte gebrochene Elementarform im Verein mit den σ ganzen Elementarformen in der That zur Darstellung aller multiplicativen Formen des Systems mit nur einfachen Unendlichkeitsstellen brauchbar sind. Ich behaupte also:

Jede multiplicative Form $F(z_1, z_2)$ des Systems, welche an den Stellen $x', x'', \ldots x^{|\varrho|}$ und nur an diesen je einfach mit den Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_\varrho$ unendlich wird, hat die Gestalt:

$$\text{(II)} \quad F(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\varrho} A_\nu \Delta(z_1, z_2; x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|}) + \sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma} B_\mu f_\mu(z_1, z_2).$$

Dass die hierdurch dargestellte Form eine multiplicative Form des Systems ist, welche an den Stellen $x', x'', \ldots x^{|\varrho|}$ in der vorgeschriebenen Weise unendlich wird, ist ohne Weiteres klar. Es muss aber noch bewiesen werden, dass sie an keiner weiteren Stelle unendlich wird.

Sie könnte nur noch an den Stellen $y', y'', \ldots y^{|\sigma'|}$ unendlich werden; die Coefficienten des Unendlichwerdens an diesen Stellen würden dann folgende sein:

$$C_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu \alpha_1^{|\nu|}, \quad C_2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu \alpha_2^{|\nu|}, \quad \cdots \quad C_\sigma = \sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu \alpha_\sigma^{|\nu|},$$

wo die $\alpha_1^{|\nu|}, \alpha_2^{|\nu|}, \ldots \alpha_\sigma^{|\nu|}$ je aus folgenden Gleichungssystemen zu bestimmen wären:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^{|\nu|} f_1'(y_1', y_2') + \alpha_2^{|\nu|} f_1'(y_1'', y_2'') + \cdots + \alpha_\sigma^{|\nu|} f_1'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) + f_1'(x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|}) = 0,\\
&\alpha_1^{|\nu|} f_2'(y_1', y_2') + \alpha_2^{|\nu|} f_2'(y_1'', y_2'') + \cdots + \alpha_\sigma^{|\nu|} f_2'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) + f_2'(x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|}) = 0,\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \qquad\vdots\\
&\alpha_1^{|\nu|} f_\sigma'(y_1', y_2') + \alpha_2^{|\nu|} f_\sigma'(y_1'', y_2'') + \cdots + \alpha_\sigma^{|\nu|} f_\sigma'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) + f_\sigma'(x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|}) = 0.
\end{aligned}$$

Da nun aber die Coefficienten A^ν nach dem Residuensatz den Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu f_1'(x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|}) = 0,\\
&\sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu f_2'(x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|}) = 0,\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\vdots\\
&\sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu f_\sigma'(x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|}) = 0
\end{aligned}$$

genügen, so folgen für $C_1, C_2, \ldots C_\sigma$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&C_1 f_1'(y_1', y_2') + C_2 f_1'(y_1'', y_2'') + \cdots + C_\sigma f_1'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) = 0,\\
&C_1 f_2'(y_1', y_2') + C_2 f_2'(y_1'', y_2'') + \cdots + C_\sigma f_2'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) = 0,\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \qquad\vdots\\
&C_1 f_\sigma'(y_1', y_2') + C_2 f_\sigma'(y_1'', y_2'') + \cdots + C_\sigma f_\sigma'(y_1^{|\sigma'|}, y_2^{|\sigma'|}) = 0,
\end{aligned}$$

Hier ist aber, wie wir wissen, die Determinante der f von Null verschieden; daher müssen sämmtliche $C_1, C_2, \ldots C_\sigma$ verschwinden, die dargestellte Form also an den Stellen $y', y'', \ldots, y^{|\sigma'|}$ endlich bleiben. Der Beweis zeigt zugleich, dass die Gleichungen (4) nicht nur nothwendige, sondern auch hinreichende Bedingungen dafür sind, dass die rechte Seite von (II) eine multiplicative Form vorstellt, welche nur an den Stellen $x', x'', \ldots x^{|s|}$ unendlich wird.

Um nun zu den *„Elementarformen der zweiten Art"* zu gelangen, welche im Allgemeinen nicht multiplicative Formen, wie die darzustellende Form sind, so betrachte ich die oben gewonnene Elementarform als Function ihrer variablen Unendlichkeitsstelle x. Zu dem Zwecke müssen freilich die in den $a_1, a_2, \ldots a_{p+\sigma}$ willkürlich gebliebenen σ Parameter in irgend einer Weise, über welche ich jetzt gar keine Voraussetzung machen will, als bestimmte Functionen von x festgelegt werden.

Da $\overline{P}(z, x)$, während es in z_1, z_2 vom Grade $\frac{1}{m}$ ist, in den

Variablen x_1, x_2 den Grad $\frac{-2p+1}{m}$ besitzt, so ist die Elementarform, wenn sie in z_1, z_2 den Grad $\frac{\delta}{m}$ hat, in x_1, x_2 vom Grade

$$\frac{2p-2-\delta}{m} = \frac{\delta'}{m}.$$

Man hat also den Satz:

Die Elementarform erster Art hat als Form ihrer variablen Unendlichkeitsstelle denselben Grad, wie die reciproken multiplicativen Formen.

Die Entwicklungen der Elementarform an der Stelle $z = x$:

$$(\alpha) \qquad 1 \cdot \left(\frac{\overline{P}(zy)}{\overline{P}(xy)}\right)^{\delta+1} \overline{P}(zx)^{-1} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} a_\lambda \left(\frac{\overline{P}(zy)}{\overline{P}(xy)}\right)^{\delta-\lambda} \overline{P}(zx)^\lambda,$$

$$(\beta) \qquad G(x_1, x_2) \cdot \left(\frac{(zy)}{(xy)}\right)^{\frac{\delta}{m}+1} \cdot (zx)^{-1} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} b_\lambda \left(\frac{(zy)}{(xy)}\right)^{\frac{\delta}{m}-\lambda} \cdot (zx)^\lambda,$$

$$(a_\lambda, b_\lambda = \text{Formen von } x_1, x_2),$$

lassen sich in Entwicklungen folgender Gestalt umsetzen:

$$(\alpha') \qquad -1 \cdot \left(\frac{\overline{P}(xy)}{\overline{P}(zy)}\right)^{\delta'+1} \overline{P}(xz)^{-1} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} a'_\lambda \left(\frac{\overline{P}(xy)}{\overline{P}(zy)}\right)^{\delta'-\lambda} \cdot \overline{P}(xz)^\lambda,$$

$$(\beta') \qquad -G(z_1, z_2) \cdot \left(\frac{(xy)}{(zy)}\right)^{\frac{\delta'}{m}+1} (xz)^{-1} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} b'_\lambda \left(\frac{(xy)}{(zy)}\right)^{\frac{\delta'}{m}-\lambda} \cdot (xz)^\lambda,$$

$$(a'_\lambda, b'_\lambda = \text{Formen von } z_1, z_2).$$

Man sieht daraus: *Während der Ausgangszweig von $A(z_1, z_2; x_1, x_2)$ als Form von z_1, z_2 an der Stelle x mit dem Coefficienten $+1$ unendlich wird, wird er als Form von x_1, x_2 mit dem Coefficienten -1 unendlich.*

Lässt man nun z_1, z_2 irgend einen geschlossenen Umlauf ausführen, so multiplicirt sich die Elementarform, also auch der Coefficient des Unendlichwerdens, mit dem zugehörigen Multiplicator $\varrho_\varkappa$. Man kann aber wohlverstanden diesen Umlauf nur in dem geschlossenen Ausdruck, nicht in einer der Reihen (α) oder (β) ausführen, weil man dabei die Convergenzgrenze derselben nothwendig überschreiten müsste.

Es soll nun aber auch x_1, x_2 einen Umlauf machen, und untersucht werden, mit welchem Coefficienten der dadurch zu gewinnende neue Zweig der Elementarform an der Stelle z unendlich wird. Dieser Umlauf lässt sich ebensowenig, wie derjenige von z_1, z_2 in einer der Reihenentwicklungen ausführen.

Wohl aber kann man die Reihen benutzen, um einen simultanen Umlauf von z und x daran auszuführen; denn dadurch, dass man z und x in jedem Stadium des Umlaufs einander hinreichend nahe wählt,

kann man bewirken, dass die Convergenz der Reihen stets erhalten bleibt. Dabei geht aber das unendlich werdende Glied sowohl der Reihe (β) wie (β') wieder in sich selbst über, während die weiteren Coefficienten sich im Allgemeinen wie mehrdeutige Formen von x_1, x_2 bezw. von z_1, z_2 ändern. Jedenfalls aber bleibt bei einem simultanen Umlauf von z und x der Coefficient des Unendlichwerdens ungeändert.

Nun sieht man auch, wie sich der Coefficient des Unendlichwerdens ändert, wenn x_1, x_2 einen Umlauf macht. Man kann nämlich einen solchen Umlauf sich durch eine Combination eines simultanen Umlaufs von z und x und eines Umlaufs von z allein im entgegengesetzten Sinne ersetzt denken. Daraus folgt:

Lässt man bei festgehaltenem z_1, z_2 die Unendlichkeitsstelle x_1, x_2 einen solchen Umlauf machen, zu welchem der Multiplicator $\varrho_\varkappa$ gehört, so multiplicirt sich der Coefficient des Unendlichwerdens an der Stelle z_1, z_2 mit dem reciproken Werthe $\varrho_\varkappa' = \varrho_\varkappa^{-1}$ dieses Multiplicators.

Die Elementarform verhält sich also als Form von x_1, x_2 an der Unendlichkeitsstelle z_1, z_2 wie eine multiplicative Form des reciproken Systems.

Es bezeichne $z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}$ auf der Riemann'schen Fläche denselben Punkt wie z_1, z_2, aber erst, nachdem derselbe einen Periodenweg beschrieben hat, zu welchem der Multiplicator $\varrho_\varkappa$ gehört; entsprechend $x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}$ den Punkt x_1, x_2 nach Durchlaufung desselben Periodenweges.

Dann hebt sich in der Differenz

$$A(z_1, z_2;\ x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) - \varrho_\varkappa^{-1} A(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$$

das Unendlichwerden an der Stelle $z = x$ gerade auf, und die Differenz ist daher eine an der Stelle x nicht unendlich werdende multiplicative Form von z_1, z_2; dieselbe kann als Form von z_1, z_2 nur noch an den Stellen $y', y'', \ldots y^{|\sigma|}$ unendlich werden. Da aber an diesen Stellen allein keine multiplicative Form wirklich unendlich werden kann, so muss die vorstehende Differenz eine ganze multiplicative Form $f(z_1, z_2)$ sein, welche sich linear mit von z unabhängigen Coefficienten durch die ganzen Elementarformen $f_1(z_1, z_2), f_2(z_1, z_2), \ldots f_\sigma(z_1, z_2)$ ausdrücken lässt. Diese Coefficienten sind dann natürlich irgend welche Formen δ^{ten} Grades von x_1, x_2.

Das Verhalten der Elementarformen gegenüber geschlossenen Umläufen des ersten Argumentpaares einerseits, des zweiten Argumentpaares andererseits ist durch folgende Formeln gegeben:

$$A(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)};\ x_1, x_2) - \varrho_\varkappa A(z_1, z_2;\ x_1, x_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} A(z_1, z_2;\ x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) - \varrho_\varkappa' A(z_1, z_2;\ x_1, x_2) &= \mathsf{H}_1^{(\varkappa)}(x_1, x_2) f_1(z_1, z_2) \\ &+ \mathsf{H}_2^{(\varkappa)}(x_1, x_2) f_2(z_1, z_2) \\ &\cdots + \mathsf{H}_\sigma^{(\varkappa)}(x_1, x_2) f_\sigma(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Dieses Verhalten der Elementarform als Form von x_1, x_2 genügt nun zur Begründung des folgenden Satzes:

In gleicher Weise, wie zur Darstellung der multiplicativen Formen von z_1, z_2 vom Grade δ und dem Multiplicatorsystem $\varrho_\varkappa$, kann die Elementarform im Verein mit σ' linear unabhängigen ganzen reciproken Formen von x_1, x_2 zur Darstellung der reciproken Formen von x_1, x_2 vom Grade δ' und dem Multiplicatorsystem $\varrho'_\varkappa$ durch ihre Unendlichkeitsstellen dienen.

Es seien $z', z'', \ldots z^{|\sigma'|}$ die Unendlichkeitsstellen der darzustellenden Form, $A_1', A_2', \ldots A_\sigma'$ die Coefficienten derselben. *Dann lautet der allgemeinste Ausdruck für eine solche Form:*

$$\text{(III)}\quad F'(x_1, x_2) = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma'} A'_\nu \Delta(z_1^{|\nu|}, z_2^{|\nu|}; x_1, x_2) + \sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma'} B'_\mu f'_\mu(x_1, x_2).$$

Die dargestellte Form ist in der That vom Grade δ'. Längs des geschlossenen Weges $(x x^{(\varkappa)})$ multiplicirt sie sich mit $\varrho'_\varkappa = \varrho_\varkappa^{-1}$, wie man leicht einsieht. In der That müssen die A_ν' folgende Gleichungen befriedigen:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma'} A_\nu' f_1(z_1^{|\nu|}, z_2^{|\nu|}) &= 0,\\
\sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma'} A_\nu' f_2(z_1^{|\nu|}, z_2^{|\nu|}) &= 0,\\
\vdots \qquad\qquad & \vdots\\
\sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma'} A_\nu' f_\sigma(z_1^{|\nu|}, z_1^{|\nu|}) &= 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$F'(x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) - \varrho'_\varkappa F'(x_1, x_2) = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma} A_\nu' f(z_1^{|\nu|}, z_2^{|\nu|}) = 0,$$

womit das geforderte multiplicative Verhalten erwiesen ist.

An den Stellen $z_1^{|\nu|}, z_2^{|\nu|}$ wird die dargestellte Form in der verlangten Weise unendlich. Es ist also nur noch zu zeigen, dass sie nicht etwa noch an irgend einer weiteren Stelle unendlich werden kann.

Es könnte dies nur an einer Stelle geschehen, an der eine der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{p+\sigma}$ mit x zusammenrückt. Es werde z. B. $a_1 = x$. Dann wird die Summe (III) mit demselben Coefficienten unendlich, wie

$$-\frac{1}{\overline{P}(x a_1)} \cdot \frac{\overline{P}(a_1 y')\,\overline{P}(a_1 y'') \ldots \overline{P}(a_1 y^{|\sigma'|})}{\overline{P}(a_1 a_2)\,\overline{P}(a_1 a_3) \ldots \overline{P}(a_1 a_{p+\sigma})}\, e^{-\sum_\alpha k_\alpha \overline{w}_\alpha^{a_1}}$$
$$\cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma'} A_\nu' \cdot \frac{\overline{P}(z^{|\nu|} a_2)\,\overline{P}(z^{|\nu|} a_3) \ldots \overline{P}(z^{|\nu|} a_{p+\sigma})}{\overline{P}(z^{|\nu|} y')\,\overline{P}(z^{|\nu|} y'') \ldots \overline{P}(z^{|\nu|} y^{|\sigma'|})}\, e^{\sum_\alpha k_\alpha \overline{w}_\alpha^{z^{|\nu|}}}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) gehen über in

$$\overline{W}_a^{a_1} + \overline{W}_a^{a_2} + \cdots + \overline{W}_a^{a_{p+\sigma}}$$
$$= \sum_x (h_x \omega_{ax} + h_x' \omega_{ax}') + \left(\overline{W}_a^{y'} + \overline{W}_a^{y''} + \cdots + \overline{W}_a^{y^{|\sigma'|}}\right),$$
$$k_a = \sum_x (h_x \eta_{ax} + h_x' \eta_{ax}').$$

Diese besagen, dass

$$f(z_1, z_2) = \frac{\overline{P}(za_1)\,\overline{P}(za_2)\ldots\overline{P}(za_{p+\sigma})}{\overline{P}(zy')\,\overline{P}(zy'')\ldots\overline{P}(zy^{|\sigma'|})} \cdot e^{\sum k_a \overline{W}_a^z}$$

eine multiplicative Form vom Grade δ und dem Multiplicatorsystem ϱ_x ist. Eine solche kann aber nicht, wie es hier der Fall sein müsste, nur an den Stellen $y', y'', \ldots y^{|\sigma'|}$ unendlich werden; sie muss also eine ganze Form sein. Und dann folgt wieder aus

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma'} A_\nu' f(z_1^{|\nu'|}, z_2^{|\nu'|}) = 0,$$

dass $F'(x_1, x_2)$ an der Stelle $x = a_1$ in der That nicht unendlich werden kann.

Die Elementarform ist also sowohl als Form ihres ersten Argumentpaares, wie als Form ihres zweiten Argumentpaares Elementarform, und zwar immer für je zwei zu einander reciproke Formensysteme.

Insofern die Elementarform als Form ihres ersten Argumentpaares verwendet wird, ist sie also eine *Elementarform erster Art*, insofern man sie als Form ihres zweiten Argumentpaares verwendet, eine *Elementarform der zweiten Art.*

Für die Darstellung der Formen eines Systemes multiplicativer Formen stehen uns immer zwei Arten von Elementarformen zur Verfügung, und zwar dieselben wie für die Darstellung der Formen des reciproken Systems. Die Elementarformen erster Art des einen Systems sind immer Elementarformen zweiter Art des andern Systems und umgekehrt.

Die Elementarform erster Art ist immer eine multiplicative Form des betreffenden Systems, die Elementarform zweiter Art dagegen ist nur dann nothwendig eine multiplicative Form, wenn es in dem reciproken System keine ganzen Formen giebt, d. h. nur im allgemeinen Fall für $\delta \geqq p - 1$.

In diesem besondern Falle sind beide Elementarformen multiplicative Formen mit nur einer Unendlichkeitsstelle.

Für die Elementarformen erster Art folgt das Letztere aus der Definition, da für $\sigma' = 0$ die festen Unendlichkeitsstellen wegfallen.

Dass die Elementarform zweiter Art in dem genannten Falle multiplicativ ist, ist ebenfalls klar, da es keine ganzen reciproken Formen giebt. Es ist noch zu beweisen, dass sie auch nur die eine nothwendige Unendlichkeitsstelle $z = x$ besitzt. Zu dem Zwecke brauche ich nur zu zeigen, dass in dem Definitionsausdruck I, wenn $\sigma = 0$ ist, die $a_1, a_2, \ldots a_{p+\sigma}$ derart eindeutig durch die Stelle x bestimmt sind, dass niemals, wie auch diese sich bewegen mag, eine von ihnen mit x zusammenfällt; denn nur dann könnte Δ als Form von x an einer von z verschiedenen Stelle unendlich werden.

Fiele etwa die Stelle x mit a_1 zusammen, so gingen die Gleichungen für die Constanten über in

$$\overline{W}_\alpha^{a_1} + \overline{W}_\alpha^{a_2} + \cdots + \overline{W}_\alpha^{a_p} = \sum_\varkappa (h_\varkappa \omega_{\alpha\varkappa} + h'_\varkappa \omega'_{\alpha\varkappa}) + \left(\overline{W}_\alpha^{y'} + \overline{W}_\alpha^{y''} + \cdots + \overline{W}_\alpha^{y^{|\sigma'|}}\right),$$

$$k_\alpha = \sum_\varkappa (h_\varkappa \eta_{\alpha\varkappa} + h'_\varkappa \eta'_{\alpha\varkappa}).$$

Diese Bedingungen sagen aber, dass

$$\frac{\overline{P}(za_1)\,\overline{P}(za_2)\ldots\overline{P}(za_p)}{\overline{P}(zy')\,\overline{P}(zy'')\ldots\overline{P}(zy^{|\sigma'|})} \cdot e^{\sum_\alpha k_\alpha \overline{W}_\alpha^z}$$

eine multiplicative Form, und zwar, da $y', y'', \ldots y^{|\sigma'|}$ nicht alleinige Unendlichkeitsstellen sein können, eine ganze Form wäre; solche giebt es aber nach Voraussetzung nicht. Daher kann niemals einer der Punkte $a_1, a_2, \ldots a_p$ mit x zusammenrücken.

Die Elementarform zweiter Art ist also im allgemeinen Falle für $\delta \geqq p - 1$ negativ genommen eine multiplicative Form, welche nur an einer Stelle mit dem Coefficienten 1 unendlich wird. Das ist aber gerade die Definition der Elementarform erster Art für diese Fälle.

Also muss im allgemeinen Falle für $\delta \geqq p - 1$ die Elementarform zweiter Art mit unter den Elementarformen erster Art enthalten sein.

Daraus folgt aber für den allgemeinen Fall $\delta \leq p - 1$, dass die Elementarform erster Art mit unter den Elementarformen zweiter Art enthalten sein muss.

Dass dieses Enthaltensein nicht etwa ein Identischsein ist, ist für $\delta \lesssim p - 1$ leicht einzusehen; denn für $\delta < p - 1$ sind die Elementarformen erster Art nothwendig multiplicative Formen, die Elementarformen zweiter Art dagegen brauchen nicht nothwendig multiplicativ zu sein.

Nur im allgemeinen Falle $\delta = p - 1$ sind beide Arten von Elementarformen identisch.

Sonst ist im allgemeinen Falle immer diejenige Elementarform die allgemeinere, welche in ihrem ersten Argumentpaare von höherem Grade als in ihrem zweiten Argumentpaare ist.

Wenn es dagegen in beiden reciproken Formensystemen ganze Formen giebt, so kann keines der beiden Systeme von Elementarformen das andere vollständig umfassen.

Denn da immer die Elementarformen 1. Art multiplicativ sind, diejenigen der zweiten Art dies nicht zu sein brauchen, so müssten immer die Elementarformen der ersten Art unter denen der zweiten Art enthalten sein, was aber nicht möglich ist, weil die erste Art im reciproken System zweite Art, die zweite Art erste Art ist.

§ 14.

Beispiel des Falles $\delta = 0$ und insbesondere der elliptischen Functionen.

Es sollen die im letzten Paragraphen allgemein für multiplicative Formen aufgestellten Begriffe und Sätze für den von Appell und anderen (vergl. die Citate auf S. 284) behandelten speciellen Fall der multiplicativen Functionen exemplificirt und schliesslich auf die elliptischen Functionen angewendet werden, wo wir dann zur Partialbruchzerlegung nicht nur der gewöhnlichen elliptischen Functionen, sondern auch der multiplicativen elliptischen Functionen gelangen werden, welche bekanntlich Herr Hermite zuerst in die Analysis eingeführt hat. (Cours lithographié 1882. Sur quelques applications des fonctions elliptiques 1885.)

Man hat immer den allgemeinen Fall, in welchem entweder σ oder $\sigma' = 0$ ist, von dem speciellen Fall zu unterscheiden, wo es in beiden reciproken Formensystemen ganze Formen giebt.

Bei den multiplicativen Functionen umfasst der specielle Fall die algebraischen und die mit algebraischen Functionen verwandten Functionen; alle andern multiplicativen Functionen gehören dem allgemeinen Falle an.

Im allgemeinen Falle ist:

$$\delta = 0, \quad \delta' = 2p - 2, \quad \sigma = 0, \quad \sigma' = p - 1,$$

im speciellen Falle:

$$\delta = 0, \quad \delta' = 2p - 2, \quad \sigma = 1, \quad \sigma' = p.$$

Die *Elementarform erster Art* $A(\overset{0}{\frown}z_1,z_2;\ \overset{2p-2}{\frown}x_1,x_2)$ besitzt also im allgemeinen Falle $p - 1$, im speciellen Falle p feste Unendlichkeitsstellen. Die Nullstellen sind im allgemeinen Falle p an Zahl und durch die Unendlichkeitsstellen eindeutig bestimmt, im speciellen Falle sind es ihrer $p + 1$, und sie enthalten einen willkürlichen Parameter.

Die *Elementarform zweiter Art* will ich explicit hinschreiben.

Im allgemeinen Falle lautet sie:

$$\Delta(\overset{2p-2}{\frown}x_1,x_2;\ \overset{0}{\frown}z_1,z_2) = \frac{1}{\overline{P}(xz)}\cdot\frac{\overline{P}(xa_1')\,\overline{P}(xa_2')\ldots\overline{P}(xa_{2p-1}')}{\overline{P}(za_1')\,\overline{P}(za_2')\ldots\overline{P}(za_{2p-1}')}\cdot c^{\sum_\alpha k_\alpha' \bar{w}_\alpha^{xz}}$$

mit den Bedingungsgleichungen:

$$\overline{W}_\alpha^{a_1'} + \overline{W}_\alpha^{a_2'} + \cdots + \overline{W}_\alpha^{a_{2p-1}'} = \sum_x (h_x\omega_{\alpha x} + h_x'\omega_{\alpha x}') + \overline{W}_\alpha^{z},$$

$$k_\alpha' = \sum_x (h_x\eta_{\alpha x} + h_x'\eta_{\alpha x}'),$$

im speciellen Falle dagegen:

$$\Delta(\overset{2p-2}{\frown}x_1,x_2;\ \overset{0}{\frown}z_1,z_2) = \frac{1}{\overline{P}(xz)}\cdot\frac{\overline{P}(zy)}{\overline{P}(xy)}\cdot\frac{\overline{P}(xa_1')\,\overline{P}(xa_2')\ldots\overline{P}(xa_{2p}')}{\overline{P}(za_1')\,\overline{P}(za_2')\ldots\overline{P}(za_{2p}')}\cdot c^{\sum_\alpha k_\alpha' \bar{w}^{xz}},$$

worin

$$\overline{W}_\alpha^{a_1'} + W_\alpha^{a_2'} + \cdots + \overline{W}_\alpha^{a_{2p}'} = \sum_x (N_x\omega_{\alpha x} + N_x'\omega_{\alpha x}') + \overline{W}_\alpha^{y} + \overline{W}_\alpha^{z},$$

$$k_\alpha' = \sum_x (N_x\eta_{\alpha x} + N_x'\eta_{\alpha x}')$$

sein muss.

Die Elementarformen erster Art sind nach ihrer Definition natürlich multiplicative Formen von z_1, z_2, diejenigen zweiter Art dagegen genügen folgenden Functionalgleichungen:

im allgemeinen Falle:

$$\Delta(x_1,x_2;\ z_1^{(x)},z_2^{(x)}) = \varrho_x\Delta(x_1,x_2;\ z_1,z_2) + \mathsf{H}_1^{(x)}(\overset{0}{\frown}z_1,z_2)\,f_1(\overset{2p-2}{\frown}x_1,x_2)$$
$$+ \mathsf{H}_2^{(x)}(\overset{0}{\frown}z_1,z_2)\,f_2(\overset{2p-2}{\frown}x_1,x_2) + \cdots$$
$$+ \mathsf{H}_{p-1}^{(x)}(\overset{0}{\frown}z_1,z_2)\,f_{p-1}(\overset{2p-2}{\frown}x_1,x_2),$$

im speciellen Falle:

$$\Delta(x_1,x_2;\ z_1^{(x)},z_2^{(x)}) = \varrho_x\Delta(x_1,x_2;\ z_1,z_2) + \mathsf{H}_1^{(x)}(\overset{0}{\frown}z_1,z_2)\,f_1(\overset{2p-2}{\frown}x_1,x_2)$$
$$+ \mathsf{H}_2^{(x)}(\overset{0}{\frown}z_1,z_2)\,f_2(\overset{2p-2}{\frown}x_1,x_2) + \cdots$$
$$+ \mathsf{H}_p^{(x)}(\overset{0}{\frown}z_1,z_2)\,f_p(\overset{2p-2}{\frown}x_1,x_2).$$

Unter $f_1, f_2, \ldots$ sind dabei immer die linear unabhängigen ganzen reciproken Formen verstanden, im speciellen Falle also die φ-Formen.

Durch die Bedingungsgleichungen sind die Punkte $a_1', a_2', \ldots$ nur soweit als Functionen von z festgelegt, dass im allgemeinen Fall noch $p-1$, im speciellen Fall p Parameter willkürlich bleiben. Erst

dadurch, dass man für diese Parameter irgend welche bestimmte, aber ganz beliebige Functionen von z einsetzt, wird die Elementarform eine wohlbestimmte Function von z.

Ich behaupte nun, um von dem speciellen Fall, als dem bekannteren, zuerst zu reden:

Unter den verschiedenen durch die Wahl der Functionen $a_1'(z_1, z_2)$, $a_2'(z_1, z_2), \ldots a_{2p}'(z_1, z_2)$ *unterschiedenen Elementarfunctionen des speciellen Falls befinden sich auch die Integrale zweiter Gattung:*

$$Y_x^{zy} = -\frac{\partial P_{xx_0}^{zy}}{\partial w_z},$$

welche an der Stelle x *mit dem Coefficienten* -1 *unendlich werden, und deren untere Integrationsgrenze* y, *deren obere Integrationsgrenze* z *ist.*

Diese Integrale sind nämlich auf der kanonischen Fläche algebraische Formen von x_1, x_2 vom Grade $2p-2$, d. h. Φ-Formen von x_1, x_2 welche nur an der Stelle z mit dem Coefficienten $+1$, an der Stelle y mit dem Coefficienten -1 unendlich werden. Das ist aber gerade die allgemeine Definition der Elementarform zweiter Art, so dass die Integrale mit unter diesen enthalten sind.

Legen wir zur Definition des Integrals zweiter Gattung das in § 1 benutzte Integral dritter Gattung zu Grunde, welches übrigens durch die Primformen sich folgendermassen ausdrückt:

$$\overline{P}_{xx_0}^{zy} = \log \frac{\overline{P}(zx)\,\overline{P}(yx_0)}{\overline{P}(zx_0)\,\overline{P}(yx)} = \log \frac{\overline{P}(xz)\cdot\overline{P}(x_0y)}{\overline{P}(xy)\cdot\overline{P}(x_0z)},$$

so verwandeln sich die Functionen

$$\mathsf{H}_1^{(x')}(z_1, z_2),\ \mathsf{H}_2^{(x)}(z_1, z_2),\ \ldots\ \mathsf{H}_p^{(x)}(z_1, z_2)$$

in die Constanten $\eta_{1x}, \eta_{2x}, \ldots \eta_{px}$.

Und allgemein, wenn die Functionen

$$\mathsf{H}_1^{(x)}(z_1, z_2),\ \mathsf{H}_2^{(x)}(z_1, z_2)\ \ldots\ \mathsf{H}_p^{(x)}(z_1, z_2)$$

zu Constanten werden, hat man ein Integral zweiter Gattung.

Ferner behaupte ich für den allgemeinen Fall:

Auch die „Integrale zweiter Gattung von multiplicativen Functionen", welche Herr Appell in Acta math. Bd. 13 *als Elementarfunctionen für die multiplicativen Functionen einführt, sind unter meinen Elementarformen zweiter Art des allgemeinen Falls enthalten.*

Man kann nämlich, wie ich hier ohne Beweis anführen will, auch diese Integrale ganz ebenso, wie die Abel'schen Integrale, auf reciproke multiplicative Formen der Unendlichkeitsstelle x_1, x_2 zurückführen, und zwar auf solche, die nur an der Stelle z mit dem Coefficienten $+1$ einfach unendlich werden. Das ist aber gerade die Definition der

Elementarform zweiter Art von x_1, x_2, womit meine Behauptung bestätigt ist. Auch hier werden die $H_1^{(x)}, H_2^{(x)}, \ldots H_{p-1}^{(x)}$ zu Constanten.

Ich will nun noch auf den Fall $p = 1$, den Fall der *elliptischen Functionen* näher eingehen. Ich werde dabei der grösseren Symmetrie halber mich der Weierstrass'schen σ-Function bedienen, und bemerke von vornherein, dass man für diese natürlich auch die ϑ-Function einsetzen kann, wodurch meine Formeln in die Hermite'schen übergehen.

Im allgemeinen Fall, d. h. für die Hermite'schen elliptischen Functionen zweiter Art, sind nach dem letzten Satze auf S. 72 die beiden Elementarfunctionen, abgesehen vom Vorzeichen, identisch, nämlich eine multiplicative Function mit nur einer, und zwar frei beweglichen Unendlichkeitsstelle.

Wenn $\binom{h}{h'}$ die Charakteristik der Function (vergl. S. 43) ist, ihr Multiplicatorsystem also $e^{-h' \cdot 2\pi i}$, $e^{+h \cdot 2\pi i}$, so wird

$$\Lambda(z_1, z_2; x_1, x_2) = \frac{1}{\overline{P}(zx)} \cdot \frac{\overline{P}(za)}{\overline{P}(xa)} \cdot e^{k\overline{w} - \overline{z}x},$$

wobei die Constanten a und k aus den Gleichungen zu bestimmen sind:

$$\overline{W}^a = h\omega + h'\omega' + \overline{W}^x,$$
$$k = h\eta + h'\eta'.$$

Ich werde nun diese Formeln in σ-Functionen umsetzen. Als unabhängige Variable wähle ich die algebraische Function $z = \wp w$ und spalte diese in z_1, z_2. Ich setze demgemäss:

$$\overline{W}^z = w, \quad \overline{W}^x = u, \quad \overline{W}^a = v.$$

Die multiplicative Primform hat den folgenden Ausdruck:

$$\overline{P}(zx) = \sigma(w - u) \cdot \frac{\sigma u}{\sigma w} \sqrt{\frac{z_2}{x_2}},$$

und es wird

$$\Lambda(z_1, z_2; x_1, x_2) = \Lambda(w, u) = \frac{1}{\sigma(w-u)} \cdot \frac{\sigma(w-v)}{\sigma(u-v)} \cdot e^{k(w-u)},$$

wobei

$$v = h\omega + h'\omega' + u, \qquad k = h\eta + h'\eta' \text{ *)}$$

ist. Durch Einsetzen der Ausdrücke für v und k bekomme ich

$$\Lambda(w, u) = \frac{\sigma(w - u - h\omega - h'\omega')}{\sigma(w-u) \cdot \sigma(-h\omega - h'\omega')} \cdot e^{(h\eta + h'\eta')(w-u)}.$$

*) ω, ω' bedeutet in meiner Arbeit dasselbe, wie in der Weierstrass'schen Bezeichnungsweise $2\omega, 2\omega'$; entsprechend η, η' dasselbe, wie bei Weierstrass $2\eta, 2\eta'$.

Die Elementarfunction zweiter Art $\Lambda(u, w)$ muss man hieraus durch Vertauschung von w und u und Zeichenumkehr von h und h' erhalten. Man sieht, dass dabei die Elementarform nur ihr Zeichen ändert, dass also wirklich, wie behauptet

$$\Lambda(u, w) = -\Lambda(w, u)$$

ist.

Die Elementarform $\Lambda(u, w)$ der allgemeinen multiplicativen elliptischen Functionen stimmt genau mit dem Hermite'schen „élément simple" überein.

Für *die gewöhnlichen elliptischen Functionen* und die von ihnen nur um einen Exponentialfactor unterschiedenen multiplicativen elliptischen Functionen sind dagegen die zwei Elementarformen wesentlich unterschieden. Ich darf mich auf die ersteren beschränken.

Die Formel

$$\Lambda(z_1, z_2; x_1, x_2) = \frac{1}{\overline{P}(zx)} \cdot \frac{\overline{P}(xy)}{\overline{P}(zy)} \cdot \frac{\overline{P}(za_1)}{\overline{P}(xa_1)} \frac{\overline{P}(za_2)}{\overline{P}(xa_2)} \cdot e^{k\bar{w}^{zx}}$$

mit den Bedingungsgleichungen:

$$\overline{W}^{a_1} + \overline{W}^{a_2} = (N\omega + N'\omega') + \overline{W}^{y} + \overline{W}^{z},$$
$$k = N\eta + N'\eta'$$

ergiebt, wenn ich

$$\overline{W}^{y} = 0, \quad \overline{W}^{a_1} = v_1, \quad \overline{W}^{a_2} = v_2$$

setze,

$$\Lambda(w, u) = \frac{\sigma(w - v_1)\,\sigma(w - v_2)}{\sigma(w - u)\,\sigma w} \cdot \frac{\sigma u}{\sigma(u - v_1)\,\sigma(u - v_2)},$$

wobei

$$v_1 + v_2 = u$$

ist.

Dies ist aber nichts anderes, als eine gewöhnliche doppelt periodische Function von w, welche an der Stelle $w = u$ mit dem Coefficienten $+1$, an der Stelle $w = 0$ mit dem Coefficienten -1 einfach unendlich wird, nämlich die Function

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(w - u) - \frac{\sigma'}{\sigma}(w) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v_2) = \frac{1}{2}\frac{\wp' w + \wp' u}{\wp w - \wp u} - \frac{1}{2}\frac{\wp' v_1 - \wp' v_2}{\wp v_1 - \wp v_2}.$$

Der von w unabhängigen Grösse $-\frac{1}{2}\frac{\wp' v_1 - \wp' v_2}{\wp v_1 - \wp v_2}$ kann man durch geeignete Wahl von v_1, v_2 jeden beliebigen Werth ertheilen.

Die Elementarfunction erster Art stimmt also bis auf eine willkürliche Constante mit der bekannten doppeltperiodischen Function $\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp' w + \wp' u}{\wp w - \wp u}$ überein.

Die Elementarfunction zweiter Art gewinnt man in unserm Falle, indem man in der Elementarfunction erster Art w und u miteinander vertauscht. Man bekommt also:

$$\Lambda(u, w) = \frac{\sigma(u - v_1)\,\sigma(u - v_2)}{\sigma(u - w)\,\sigma u} \cdot \frac{\sigma w}{\sigma(w - v_1)\,\sigma(w - v_2)},$$

$$v_1 + v_2 = w$$

oder

$$\Lambda(u, w) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u - w) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v_2).$$

Dies wird erst dadurch eine wohlbestimmte Function von w, dass man für v_1, v_2 irgend zwei bestimmte aber ganz willkürliche Functionen von w einsetzt, welche nur der Bedingung $v_1 + v_2 = w$ genügen müssen.

Insbesondere geht die Elementarfunction zweiter Art in das Integral zweiter Gattung

$$-Y_u^{w,0} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u - w) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u)$$

über, wenn man v_1, v_2 folgenden Gleichungen gemäss bestimmt:

$$v_1 + v_2 = w,$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(v_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v_2) = 0,$$

welche man bequemer auch folgendermassen ausdrücken kann:

$$\frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{w}{2},$$

$$\wp\left(\frac{w_1 - w_2}{2}\right) = \wp\left(\frac{w}{2}\right) + \frac{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}{2\frac{\sigma'}{\sigma}\left(\frac{w}{2}\right)}.$$

§ 15.

Normirung der Elementarformen.

Wie wir im letzten Paragraphen sahen, kann man die Elementarfunctionen zweiter Art so einrichten, dass sie Integrale 2. Gattung werden, dass sie also als Formen ihres zweiten Argumentpaares nur an der durch das erste Argumentpaar gegebenen Stelle b unendlich werden. Ob dies allgemein, auch für $\delta \gtrless 0$, möglich ist, lasse ich hier dahingestellt. Dafür benutze ich die Willkürlichkeit in den Functionen $a_1, a_2, \ldots a_{p+\sigma}$ in anderer Richtung, nämlich zur *Normirung der Elementarform*.

Es seien $w', w'', \ldots w^{|\sigma|}$ solche σ Punkte, an welchen keine ganze multiplicative Form $f(z_1, z_2)$ verschwindet, $u', u'', \ldots u^{|\sigma'|}$ solche σ' Punkte, an welchen keine ganze Form $f'(x_1, x_2)$ des reciproken Systems verschwindet (wie oben die Punkte $y', y'', \ldots, y^{|\sigma'|}$).

Ich verstehe nun unter der normirten ganzen Elementarform $\mathfrak{f}_\mu(z_1, z_2)$ *diejenige ganze multiplicative Form, welche an allen Stellen* $w', w'', \ldots, w^{|\sigma|}$ *mit Ausnahme der Stelle* $w^{|\mu|}$ *verschwindet, und welche an der Stelle* $w_1^{|\mu|}, w_2^{|\mu|}$ *den Werth* 1 *besitzt. Analoge Bedeutung in Bezug auf die Stellen* $u', u'', \ldots u^{|\sigma'|}$ *haben die normirten ganzen Elementarformen* $\mathfrak{f}_\mu'(x_1, x_2)$ *des reciproken Systems.*

Dass man solche Formen construiren kann, folgt daraus, dass in den ganzen Formen $f(z_1, z_2)$ gerade $\sigma - 1$, in den Formen $f'(x_1, x_2)$ $\sigma' - 1$ Nullpunkte willkürlich sind.

Die normirten ganzen Elementarformen sind durch die Wahl der Punkte $w', w'', \ldots w^{|\sigma|}$ *eindeutig bestimmt.*

Denn wären nach Festlegung der $\sigma - 1$ ersten Nullstellen die übrigen nicht eindeutig bestimmt, so bildeten sie eine ∞^1 Mannigfaltigkeit, und man könnte noch eine Nullstelle beliebig wählen, etwa $= w^{|\mu|}$. Dann würde die so gewonnene ganze Form aber an allen Stellen w verschwinden, entgegen der Voraussetzung. Die willkürliche multiplicative Constante ferner ist durch das Verhalten in $w^{|\mu|}$ eindeutig gegeben.

Endlich ist leicht zu zeigen, dass die gewonnenen $\mathfrak{f}_\mu(z_1, z_2)$ in der That linear unabhängig von einander sind. Denn bestände eine lineare Relation:

$$C_1\mathfrak{f}_1(z_1, z_2) + C_2\mathfrak{f}_2(z_1, z_2) + \cdots + C_\sigma\mathfrak{f}_\sigma(z_1, z_2) = 0$$

und wäre hierin etwa $C_1 \gtrless 0$, so müsste, da $\mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \ldots \mathfrak{f}_\sigma$ sämmtlich an der Stelle w' verschwinden, auch $\mathfrak{f}_1$ an dieser Stelle verschwinden entgegen der Voraussetzung.

Ganz dasselbe gilt für die reciproken Formen $\mathfrak{f}_\mu'(x_1, x_2)$.

Ich behaupte nun:

Jede ganze Form $f(z_1, z_2)$ *bezw.* $f'(x_1, x_2)$ *hat den Ausdruck:*

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma} f(w_1^{|\mu|}, w_2^{|\mu|}) \cdot \mathfrak{f}_\mu(z_1, z_2),$$

$$f'(x_1, x_2) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma'} f'(u_1^{|\mu|}, u_2^{|\mu|}) \cdot \mathfrak{f}_\mu'(x_1, x_2).$$

Denn setzt man in dem allgemeinen Ausdruck

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma} B_\mu \cdot \mathfrak{f}(z_1, z_2)$$

$z_1 = w_1^{|\mu|}$, $z_2 = w_2^{|\mu|}$ ein, so verschwinden alle $\mathfrak{f}$ bis auf $\mathfrak{f}_\mu$, welches $= 1$ wird, und man erhält:

$$f(w_1^{|\mu|}, w_2^{|\mu|}) = B_\mu.$$

Vermittelst derselben Punktsysteme $w', w'', \ldots w^{|\sigma|}$; $u', u'', \ldots u^{|\sigma|}$ — von denen ich zudem voraussetze, dass sie keinen Punkt gemeinsam haben — normire ich auch die gebrochenen Elementarformen.

Ich setze in dem allgemeinen Ausdruck I des § 13 für $y', y'', \ldots y^{|\sigma'|}$ die Punkte $u', u'', \ldots u^{|\sigma'|}$. Ferner bedenke ich, dass man von den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_{p+\sigma}$ jedenfalls σ Punkte willkürlich annehmen darf; damit jedoch die Elementarform nicht in eine (mit einer unendlich kleinen Constanten dividirte) ganze Form ausartet, müssen diese Punkte so gewählt sein, dass es keine an denselben verschwindende ganze Form giebt. Dieser Bedingung genügt aber die Festsetzung:

$$a_{p+1} = w', \quad a_{p+2} = w'', \quad \ldots \quad a_{p+\sigma} = w^{|\sigma|}.$$

Ich verstehe also unter der normirten gebrochenen Elementarform die Form:

$$\Lambda(z_1, z_2; x_1, x_2) = \frac{1}{\overline{P}(zx)} \cdot \frac{\overline{P}(xu') \ldots \overline{P}(xu^{|\sigma'|})}{\overline{P}(zu') \ldots \overline{P}(zu^{|\sigma'|})} \cdot \frac{\overline{P}(zw') \ldots \overline{P}(zw^{|\sigma|})}{\overline{P}(xw') \ldots \overline{P}(xw^{|\sigma|})} \cdot \frac{\overline{P}(za_1) \ldots \overline{P}(za_p)}{\overline{P}(xa_1) \ldots \overline{P}(xa_p)} \cdot e^{\sum_\alpha k_\alpha \bar{v}'_\alpha},$$

wo

$$\overline{W}_\alpha^{a_1} + \cdots + \overline{W}_\alpha^{a_p} = \sum_\varkappa (h_\varkappa \omega_{\alpha\varkappa} + h'_\varkappa \omega'_{\alpha\varkappa})$$

$$+ \left(\overline{W}_\alpha^{u'} + \cdots + \overline{W}^{u^{|\sigma'|}}\right) - \left(\overline{W}_\alpha^{w'} + \cdots + \overline{W}_\alpha^{w^{|\sigma|}}\right) + \overline{W}_\alpha^{x},$$

$$k_\alpha = \sum_\varkappa (h_\varkappa \eta_{\alpha\varkappa} + h'_\varkappa \eta'_{\alpha\varkappa})$$

sein muss.

Ich behaupte nun:

Die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_p$ sind hier derartig eindeutig als Functionen von x bestimmt, dass niemals einer derselben mit x zusammenrücken kann.

Denn wären sie nicht eindeutig bestimmt, so bildeten sie eine ∞^1 Schaar, und man könnte einen davon beliebig annehmen, etwa $= x$. Dann müssten nach früheren Ueberlegungen σ' weitere Punkte mit $u', u'', \ldots u^{|\sigma'|}$ zusammenfallen, und der von z abhängige Theil von Λ ginge in eine ganze Form von z_1, z_2 über, welche an den sämmtlichen Stellen $w', w'', \ldots w^{|\sigma|}$ verschwände, entgegen der Voraussetzung.

Danach müssen bei einem geschlossenen Umlauf von x_1, x_2 auch die $a_1, a_2, \ldots a_p$ wieder in sich selbst übergehen. Die Elementarform kann sich also nur mit einer Constanten multipliciren. Man hat

daher, wenn ich jetzt alles zusammenfasse, folgende schönen Sätze über die normirten Elementarformen:

Es giebt bei gegebenem Grad und Multiplicatorsystem und bei bestimmter Wahl der σ Punkte w und der σ' Punkte u nur eine einzige normirte gebrochene Elementarform. Dieselbe ist in beiden Argumentpaaren multiplicativ, und zwar besitzt sie als Form von z_1, z_2 die variable Unendlichkeitsstelle x, die festen Unendlichkeitsstellen $u', u'', \ldots u^{|\sigma'|}$ und die festen Nullstellen $w', w'', \ldots w^{|\sigma|}$, dagegen als Form von x_1, x_2 die variable Unendlichkeitsstelle x_1, x_2, die festen Unendlichkeitsstellen $w', w'', \ldots w^{|\sigma|}$, und die festen Nullstellen $u', u'', \ldots u^{|\sigma'|}$. Die Elementarformen der beiden Arten sind trotz der Verschiedenheit des Ausdrucks, abgesehen vom Vorzeichen, identisch:

$$\Lambda(z_1, z_2; x_1, x_2) = -\Lambda(x_1, x_2; z_1, z_2).$$

Der allgemeine Ausdruck einer multiplicativen Form von z_1, z_2, welche an den Stellen $x', x'', \ldots x^{|\sigma|}$ je mit dem Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_\sigma$ unendlich wird, bezw. einer reciproken Form von x_1, x_2, welche an den Stellen $z', z'', \ldots z^{|\sigma'|}$ je mit dem Coefficienten $A_1', A_2', \ldots A_{\sigma'}'$ unendlich wird, lautet:

$$F(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma} A_\nu \Lambda(z_1, z_2; x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|}) + \sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma} F(w_1^{|\mu|}, w_2^{|\mu|}) \cdot \mathfrak{f}_\mu(z_1, z_2),$$

$$F'(x_1, x_2) = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma'} A_\nu' \Lambda(z_1^{|\nu|}, z_2^{|\nu|}; x_1, x_2) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma'} F'(u_1^{|\mu|}, u_2^{|\mu|}) \cdot \mathfrak{f}_\mu'(x_1, x_2).$$

Im Falle der multiplicativen elliptischen Functionen ist die in § 14 aufgestellte Elementarform ohne weiteres normirt.

Eine normirte Elementarform der gewöhnlichen elliptischen Functionen erhält man, wenn man in der Elementarform $\Lambda(w, u)$ des § 14 für v_1 einen bestimmten Werth setzt, für v_2 also $u - v_1$:

$$\Lambda(w, u) = \frac{\sigma'}{\sigma}(w - u) - \frac{\sigma'}{\sigma}(w) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - v_1) = \frac{1}{2}\frac{\wp' w + \wp' u}{\wp w - \wp u} + \frac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp' v_1}{\wp u + \wp v_1}.$$

Hiermit schliesse ich meine Betrachtungen über allgemeine multiplicative Formen auf einem algebraischen Gebilde ab, um im Folgenden noch die Anwendung dieser Theorie auf die Lehre von den automorphen Formen eines beliebigen Geschlechtes zu geben.

III. Theil.

Die automorphen Formen beliebigen Geschlechts.

§ 16.

Fundamentalbereich und Gruppe einer automorphen Function.

Wegen der *allgemeinen Begriffsbestimmungen* über den Fundamentalbereich einer automorphen Function kann ich mich auf die Entwicklungen beziehen, welche Herr Klein in seiner Abhandlung: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie" (Math. Ann. Bd. 21. 1882) und in der Arbeit: „Ueber den Begriff des functionentheoretischen Fundamentalbereichs" (Math. Ann. Bd. 40. 1891) in dieser Richtung gegeben hat, sowie wegen der Fundamentalbereiche der *eindeutigen* automorphen Functionen auf die Untersuchungen von Hrn. Poincaré.

Man kann den Fundamentalbereich jeder automorphen Function auf eine bestimmte *kanonische Gestalt* bringen, denn die hierauf bezüglichen Betrachtungen von Hrn. Klein in § 9—10 der genannten Arbeit sind ganz unabhängig sowohl von der Voraussetzung der Eindeutigkeit der betreffenden automorphen Functionen, wie von der Voraussetzung der Existenz eines Hauptkreises.

Ich kann also den allgemeinsten automorphen Fundamentalbereich nach Art der nebenstehenden Fig. 11 construirt denken, welche sich von der Fig. 8 der Klein'schen Abhandlung nur durch die Benennung der Ufer und der zugehörigen Substitutionen unterscheidet. Die Figur ist nur schematisch zu verstehen, so dass *nur die Aufeinanderfolge der einzelnen Randstücke das Wesentliche ist.* Der allgemeinste Bereich von demselben Schema kann sich selbst theilweise mehrfach, überdecken — nur besitzt er keine Windungspunkte im Innern —; auch brauchen die einzelnen Randcurven durchaus nicht immer als einheitliche Kreisbogen sich darstellen zu lassen.

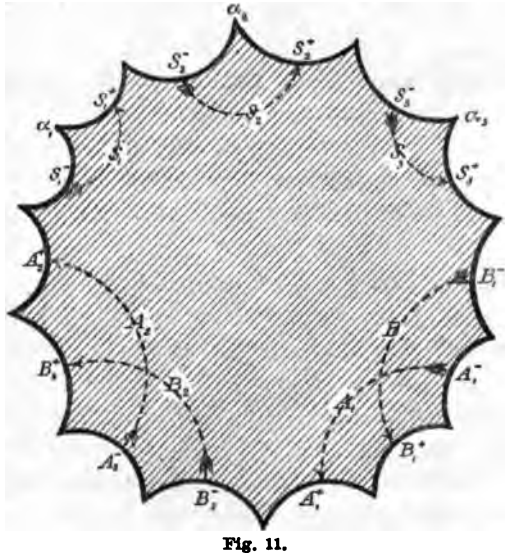


Fig. 11.

Biegt man den Bereich zur geschlossenen Fläche zusammen, so entsprechen den einzelnen Randstücken die positiven und negativen Ufer eines Systems von $2p$ Rückkehr- und von n Einschnitten, welche von einem nicht singulären Punkte 0 in der Anordnung der Fig. 12 auslaufen, und welche die Fläche in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück zerschneiden.

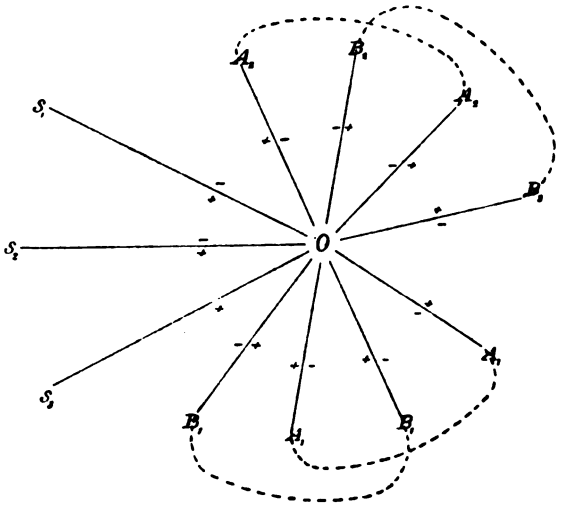


Fig. 12.

Die „erzeugenden Substitutionen" A_x, B_x, S_i erfüllen die Relation:

$$S_1 S_2 \ldots S_n \cdot B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_1 \cdot B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} A_2 \ldots B_p A_p^{-1} B_p^{-1} A_p = 1.$$

Als Beispiel für die Umformung eines in anderer Weise gegebenen Fundamentalbereiches in einen kanonischen Fundamentalbereich möge

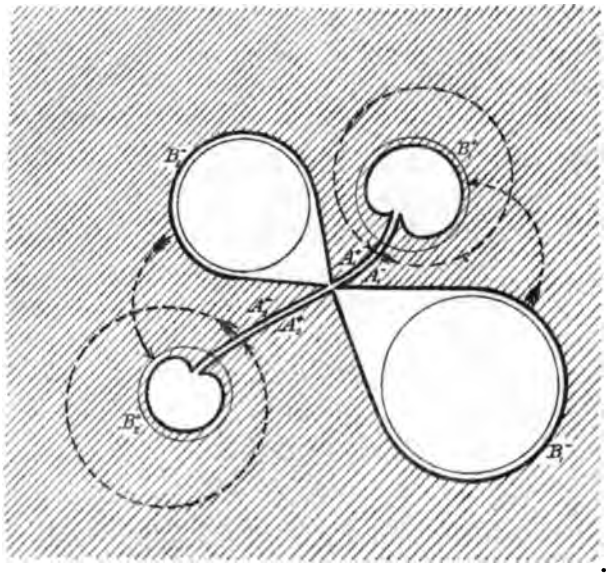


Fig. 13.

der in Fig. 13 dargestellte kanonische Fundamentalbereich dienen, welcher der (mit schwachen Linien eingezeichneten) Fig. 14 bei

Herrn Klein in Math. Ann. Bd. 21 genau äquivalent ist. Es reduciren sich in dem dargestellten speciellen Falle die Substitutionswege*) A_1, A_2 auf geschlossene Umläufe in der Ebene des Fundamentalbereichs. Man sieht an dem Beispiel bei Vergleichung meiner kanonischen Kantenanordnung mit der nicht kanonischen der Klein'schen Figur zugleich, dass der kanonische Fundamentalbereich durchaus nicht immer der im speciellen Falle einfachste sondern nur der durch seine allgemeine Anwendbarkeit für meine allgemeinen Betrachtungen zweckmässigste ist.

Ich mache nun, — wie in meiner Arbeit über $p = 0$ (Math-Ann. 41) — die Ebene des Fundamentalbereiches zur Trägerin einer Variablen ζ. Eine *algebraisch automorphe Function von* ζ — vergl. Math. Ann. Bd. 41, S. 5. Anm. — ist dann eine solche Function von ζ, welche auf dem Fundamentalbereiche unverzweigt ist, auf demselben nur eine endliche Anzahl algebraischer Unendlichkeitsstellen besitzt, und in entsprechenden Stellen des Randes je dieselben Werthe annimmt.

Eine solche ist offenbar dann und nur dann eine eindeutige Function von ζ, *wenn die Gesammtheit der Fundamentalbereiche, die aus dem gegebenen durch wiederholte Anwendung der erzeugenden Substitutionen* S_i, $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ *und der inversen Operationen erhalten werden, die Ebene* ζ *nirgends mehrfach überdeckt.*

Dazu ist vor allen Dingen nothwendig, dass alle Substitutionen S_i entweder elliptische Substitutionen mit einer Amplitude $\frac{2\pi}{l_i}$ oder parabolische Substitutionen sind. Natürlich reichen diese Bedingungen ebenso wenig, wie im Falle $p=0$ aus. Im Allgemeinen müssen die Coefficienten der erzeugenden Substitutionen noch „gewissen Ungleichungen" genügen, oder auch gewissen Gleichungen von der Form

$$\Pi(S_i, A_\varkappa, B_\varkappa) = 1,$$

den „secundären Relationen".

Für mich sind zunächst nur die *Gleichungen* wesentlich, welchen die Erzeugenden genügen. Diese constituiren die Gruppe im Sinne von Herrn Dyck**). Ich unterscheide sie in *„primäre und secundäre Relationen":*

$$\left.\begin{aligned} S_1 S_2 \ldots S_n B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_1 \ldots B_p A_p^{-1} B_p^{-1} A_p &= 1 \\ S_i^{l_i} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ primäre Relationen.}$$

$$\left.\Pi(S_{i_\nu}, A_{\varkappa_\nu}, B_{\varkappa_\nu}) = 1\right\} \text{ secundäre Relationen.}$$

*) Die Substitutionswege sind in allen meinen Figuren für Fundamentalbereiche mit gestrichelten Linien eingezeichnet, und die Benennung derselben ist stets so zu verstehen, dass $A_\varkappa$ von üem Ufer $A_\varkappa^-$ zum Ufer $A_\varkappa^+$; $B_\varkappa$ von $B_\varkappa^-$ zu $B_\varkappa^+$ führt.

**) Gruppentheoretische Studien, Math. Ann. 20.

Secundäre Relationen existiren immer dann und nur dann, wenn das von der Gesammtheit der Fundamentalbereiche überdeckte Gebiet der ζ-Ebene mehrfachen Zusammenhang besitzt, — wobei etwaige isolirte Häufungsstellen der Bereiche als Oeffnungen zu zählen sind —, aber immer giebt es, weil die Zahl der Erzeugenden endlich vorausgesetzt ist, nur eine endliche Anzahl von unabhängigen secundären Relationen.

Nenne ich die Gruppen ohne secundäre Relationen *„allgemeine Gruppen"*, diejenigen mit secundären Relationen dagegen *„specielle Gruppen"*, so ist klar, *dass alle Gruppen mit gleichen Zahlen p, n, l_i mit einander homomorph sind, die allgemeinen Gruppen unter einander isomorph, die speciellen Gruppen zu den allgemeinen polymonomorph.**)

Alle mit einander isomorphen Gruppen gehören zu demselben *„Typus"* (nach Klein, Math. Ann. 21). *Die Gruppen eines Typus sind also, sofern die Erzeugenden zweckmässig ausgewählt sind, durch die gleiche Gestalt aller Relationen zwischen den Erzeugenden charakterisirt.*

Ich schreibe die erzeugenden Substitutionen ausführlich:

$$S_i)\quad \frac{\zeta'-\alpha_i}{\zeta'-\beta_i} = e^{\frac{2i\pi}{l_i}} \cdot \frac{\zeta-\alpha_i}{\zeta-\beta_i},\ \text{bezw.}\ \frac{1}{\zeta'-\alpha_i} = \gamma_i + \frac{1}{\zeta-\alpha_i},$$

$$A_\varkappa)\quad \frac{\zeta'-\alpha_\varkappa}{\zeta'-\beta_\varkappa} = \varrho_\varkappa{}^2 \cdot \frac{\zeta-\alpha_\varkappa}{\zeta-\beta_\varkappa},\qquad B_\varkappa)\quad \frac{\zeta'-\alpha'_\varkappa}{\zeta'-\beta'_\varkappa} = \varrho_\varkappa{}'^2 \cdot \frac{\zeta-\alpha'_\varkappa}{\zeta-\beta'_\varkappa}.$$

Dabei sind die Zahlen l_i ganze reelle Zahlen, $\varrho_\varkappa$, $\varrho_\varkappa'$ dagegen beliebige complexe Grössen. *Die Punkte α_i sind Ecken des Fundamentalbereichs,* die Punkte β_i nur dann, wenn auch S_i^{-1} eine Erzeugende S_j der Gruppe ist *Die Punkte $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$; $\alpha_\varkappa'$, $\beta_\varkappa'$ gehören niemals einem Bereiche an*, sondern sind entweder Grenzpunkte des Polygonnetzes, oder liegen ganz ausserhalb desselben, in welch letzterem Falle übrigens $\varrho_\varkappa$ die Gestalt $\varrho_\varkappa = e^{\frac{i\pi}{r_\varkappa}}$ haben muss.

§ 17.

Spaltung der linearen Substitutionen von ζ in ganze binäre Substitutionen.

Da ich, wie im Falle $p = 0$, statt mit automorphen Functionen von ζ mich vielmehr mit automorphen Formen von zwei homogenen Variablen ζ_1, ζ_2 beschäftigen will, so habe ich die vorgelegte Gruppe von gebrochenen linearen Substitutionen der Variablen ζ in eine Gruppe

*) Wegen dieser Benennungen vergl. Math. Ann. 41, S. 22 Anmerkung.

ganzer binärer Substitutionen von ζ_1, ζ_2 zu spalten. *Unter den unbegrenzt vielen möglichen Spaltungen bietet sich wieder die Spaltung in unimodulare Substitutionen, welche zur nichthomogenen Gruppe monodimorph ist, als die zweckmässigste dar.*

Als erzeugende Substitutionen der unimodularen homogenen Gruppe dienen die folgenden:

$$\mathbf{S}_i) \quad \begin{matrix} (\zeta'\alpha_i) = e^{+\frac{i\pi}{l_i}} \cdot (\zeta\alpha_i), \\ (\zeta'\beta_i) = e^{-\frac{i\pi}{l_i}} \cdot (\zeta\beta_i), \end{matrix} \quad \text{bezw.} \quad \begin{matrix} (\zeta'\alpha_i) = (\zeta\alpha_i), \\ (\zeta'\beta_i) = 2i\pi \cdot (\zeta\alpha_i) + (\zeta\beta_i), \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_\varkappa) \quad \begin{matrix} (\zeta'\alpha_\varkappa) = \varrho_\varkappa^{+1} \cdot (\zeta\alpha_\varkappa), \\ (\zeta'\beta_\varkappa) = \varrho_\varkappa^{-1} \cdot (\zeta\beta_\varkappa), \end{matrix} \qquad \mathbf{B}_\varkappa) \quad \begin{matrix} (\zeta'\alpha'_\varkappa) = \varrho'^{+1}_\varkappa \cdot (\zeta\alpha'_\varkappa), \\ (\zeta'\beta'_\varkappa) = \varrho'^{-1}_\varkappa \cdot (\zeta\beta'_\varkappa). \end{matrix}$$

Das Vorzeichen der Grössen $\varrho_\varkappa$, $\varrho'_\varkappa$ bleibt vor der Hand noch willkürlich. Sollte eine der Substitutionen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ parabolisch sein, so kann man ebenfalls vorläufig irgend eine der beiden möglichen unimodularen Spaltungen als Substitution $\mathbf{A}_\varkappa$, $\mathbf{B}_\varkappa$ annehmen.

Es handelt sich nun um die Frage, was beim Uebergang zu den homogenen Substitutionen aus den Relationen wird, denen die nichthomogenen Erzeugenden genügen.

Zunächst ist sofort ersichtlich dass die Relationen

$$S_i^{l_i} = 1$$

übergehen in

$$\mathbf{S}_i^{l_i} = -1,$$

indem ich unter -1 die simultane Multiplication von ζ_1, ζ_2 mit -1 verstehe. Was aber wird aus der Relation

$$S_1 S_2 \ldots S_n B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_1 \ldots B_p A_p^{-1} B_p^{-1} A_p = 1?$$

geht die rechte Seite in $+1$ oder in -1 über?

Da diese Relation sowohl, wie die Einführung der $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{A}_\varkappa$, $\mathbf{B}_\varkappa$ von der Voraussetzung schlichter Ueberdeckung der ζ-Ebene mit Fundamentalbereichen unabhängig ist, so kann man den Fundamentalbereich unbeschadet der gesuchten Relation irgendwie ausarten lassen, z. B. so, dass sich die Substitutionswege $A_\varkappa$ sämmtlich auf einfache Umläufe (in der Fig. 14 nicht eingezeichnet) reduciren, — so wie es in Fig. 13 der Fall war. Die Relation der nichthomogenen Substitutionen artet aus in

$$S_1 S_2 \ldots S_n = 1,$$

dem Umstande entsprechend, dass in dem ausgearteten Fundamental-

bereiche (Fig. 14) die Kanten $S_i^{\pm}$ für sich einen geschlossenen Curvenzug bilden, welcher ein Polygon mit $2p$ den Kanten $B_\varkappa^{\pm}$ entsprechenden Oeffnungen begrenzt.

Auch in der gesuchten Relation der homogenen Erzeugenden heben sich die $\mathbf{A}_\varkappa$, $\mathbf{B}_\varkappa$ im Ausartungsfalle gegenseitig auf, ohne Einfluss auf die rechte Seite der Relation. Es bleibt also nur zu bestimmen, ob $\mathbf{S}_1 . \mathbf{S}_2 \ldots \mathbf{S}_n = +1$ oder $= -1$ wird? Dies ist nun genau dieselbe Frage, wie im Falle $p = 0$; man findet den Werth der rechten Seite $= (-1)^n$, also, wenn wir wieder zum ursprünglichen Bereich zurückgehen, ganz allgemein:

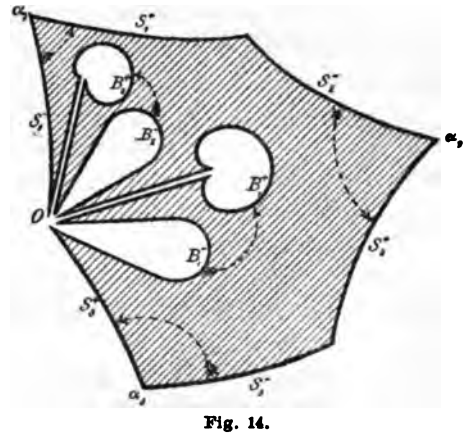


Fig. 14.

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \ldots \mathbf{S}_n \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{B}_p \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{B}_p^{-1} \mathbf{A}_p = (-1)^n.$$

Was aus den secundären Relationen wird, ist in jedem Falle besonders zu untersuchen. Immer erhält man Relationen der Gestalt:

$$\Pi(\mathbf{S}_{i_\nu}, \mathbf{A}_{\varkappa_\nu}, \mathbf{B}_{\varkappa_\nu}) = (-1)^{m_\nu}.$$

Ich fasse also zusammen:

Den primären und secundären Relationen zwischen den Erzeugenden der nichthomogenen Gruppe entsprechen folgende Relationen zwischen den Erzeugenden der unimodularen homogenen Gruppe

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \ldots \mathbf{S}_n \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{B}_p \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{B}_p^{-1} \mathbf{A}_p = (-1)^n,$$

$$\mathbf{S}_i^{l_i} = -1,$$

$$\Pi(\mathbf{S}_{i_\nu}, \mathbf{A}_{\varkappa_\nu}, \mathbf{B}_{\varkappa_\nu}) = (-1)^{m_\nu},$$

wobei die m_ν in jedem einzelnen Falle besonders zu bestimmende ganze Zahlen sind.

§ 18.

Die Multiplicatorsysteme der eindeutigen automorphen Formen.

Unter einer „*automorphen Form*“ von ξ_1, ξ_2 versteht man eine solche homogene Function von ξ_1, ξ_2, welche sich nur mit gewissen Constanten multiplicirt, wenn man ξ_1, ξ_2 in stetiger Weise so variirt, dass diese Variablen eine Substitution der unimodularen homogenen Gruppe erleiden, und dass der Weg von ξ ganz im Innern des Polygonnetzes verläuft, natürlich vom Ausgangspunkte zu einem mit ihm congruenten Punkt.

Von hieraus schliessen wir sofort:

Eine automorphe Form kann nur dann eindeutig sein, wenn

1) *die Mannigfaltigkeit der Fundamentalbereiche die ζ-Ebene nirgends mehrfach überdeckt,*
2) *der Grad R der Form eine ganze Zahl ist,*
3) *die den Erzeugenden $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{A}_\varkappa$, $\mathbf{B}_\varkappa$ der unimodularen Gruppe entsprechenden Multiplicatoren gewissen Relationen genügen.*

In betreff 3) ergeben sich nun dieselben beiden Sätze, wie im Falle $p = 0$, nämlich:

Die Multiplicatoren für ungerade Formen müssen denselben Relationen genügen, wie die Substitutionen der unimodularen homogenen Gruppe, die Multiplicatoren für gerade Formen denselben Relationen, wie die Substitutionen der nichthomogenen Gruppe.

Man sieht, dass die primären Relationen der Erzeugenden nur Relationen für die den $\mathbf{S}_i$ entsprechenden Multiplicatoren ergeben, die den $\mathbf{A}_\varkappa$, $\mathbf{B}_\varkappa$ entsprechenden Multiplicatoren dagegen noch völlig beliebig lassen.

Des näheren sind die den $\mathbf{S}_i$ entsprechenden Multiplicatoren ϱ_i, wenn ich jetzt von secundären Relationen absehe, den Bedingungen unterworfen:

$$\text{für } R \equiv 1 \pmod 2 \quad \varrho_i^{l_i} = -1 \qquad \prod_{i=1}^{i=n} \varrho_i = (-1)^n,$$

$$\text{für } R \equiv 0 \pmod 2 \quad \varrho_i^{l_i} = 1 \qquad \prod_{i=1}^{i=n} \varrho_i = 1$$

oder, indem ich diese Angaben für geradzahlige, wie für ungeradzahlige R in gemeinsame Formeln zusammenfasse:

$$\varrho_i^{l_i} = (-1)^R, \qquad \prod_{i=1}^{i=n} \varrho_i = (-1)^{R \cdot n}.$$

Wir können unser Resultat also so zusammenfassen:

Die den $\mathbf{S}_i$ entsprechenden Multiplicatoren müssen die Gestalt haben:

$$\varrho_i = e^{i\pi \frac{\lambda_i}{l_i}},$$

wobei die ganzen Zahlen λ_i folgenden Congruenzen unterworfen sind:

$$\lambda_i + R \equiv 0 \pmod 2, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{l_i} + Rn \equiv 0 \pmod 2. \tag{2}$$

Ist die Substitution S_i eine parabolische, so tritt an Stelle des Bruches $\frac{\lambda_i}{l_i}$ eine Grösse λ_i', welche nur der Bedingung (2) unterworfen

ist, sonst aber beliebig rational oder irrational, reell oder complex sein darf (irrational oder complex natürlich nur dann, wenn es mehrere parabolische Erzeugende giebt). Verlangt man aber eigentlich algebraisches Verhalten der Form in der parabolischen Ecke, so muss das betreffende λ_i' nothwendig reell und rational sein.

Die Multiplicatoren $\varrho_\varkappa$, $\varrho_\varkappa'$, welche den Substitutionen $\mathbf{A}_\varkappa$, $\mathbf{B}_\varkappa$ entsprechen, können, sofern sie nicht durch secundäre Relationen eingeschränkt sind, beliebig reell oder complex, rational oder irrational sein. Es wird für später zweckmässig sein, sie in der Gestalt zu schreiben:

$$\varrho_\varkappa = e^{2i\pi\sigma_\varkappa}, \qquad \varrho_\varkappa^{\nu} = e^{2i\pi\sigma_\varkappa'}.$$

Im Uebrigen mögen noch folgende Sätze hier Platz finden:

Zwischen den verschiedenen möglichen Multiplicatorsystemen bestehen dieselben Beziehungen, wie für $p = 0$ (vgl. Bd. 41, S. 36—38).

Jedes Multiplicatorsystem für Formen von ungeradzahligem Grade liefert eine zur nicht homogenen Gruppe isomorphe homogene Gruppe und umgekehrt.

Um zu entscheiden, ob eine isomorphe Spaltung der Gruppe möglich ist, braucht man bei Abwesenheit secundärer Relationen nur die Substitutionen S_i zu berücksichtigen, und die Kriterien sind dann dieselben, wie im Falle $p = 0$ (vergl. Bd. 41, S. 34 und S. 36).

§ 19.

Existenz der automorphen Functionen. Uebergang zur geschlossenen Riemann'schen Fläche.

Die Existenz der eigentlich automorphen Functionen eines gegebenen Fundamentalbereichs ist innig verknüpft mit der Existenz gewisser logarithmischer Potentiale in der $\zeta = \xi + i\eta$ Ebene, welche längs der Ränder des Fundamentalbereichs bestimmten Grenzbedingungen genügen.

Für unser Ziel genügt folgender Satz:

Falls der Fundamentalbereich nicht unzulässige Ausartungen aufweist, so existirt ein logarithmisches Potential $P(\xi, \eta)$, welches auf dem Fundamentalbereiche eindeutig und nur an einer Stelle ζ_∞ unstetig ist, wie $\Re\left(\frac{1}{(\zeta - \zeta_\infty)}\right) = \frac{\cos\varphi}{r}$, und welches längs der Begrenzung des Bereichs solchen Grenzbedingungen genügt, dass seine analytische Fortsetzung in congruenten Punkten der ζ-Ebene je dieselben Werthe besitzt.

Der Beweis dieses Satzes geht denselben Gang, wie der entsprechende Beweis in § 1 meiner Arbeit über $p = 0$; ich brauche mich daher hier nicht dabei aufzuhalten.

Zulässig sind gewiss alle Fundamentalbereiche, deren Rand in der in Math. Ann. Bd. 41, Seite 10 angegebenen Weise mit einer endlichen Anzahl von Kreisscheiben überdeckt werden kann.

Zu dem nach dem Schwarz-Neumann'schen Verfahren gefundenen Potential $P(\xi, \eta)$ bildet man in bekannter Weise *das conjugirte Potential* $Q(\xi, \eta)$. Dieses ist ebenso wie $P(\xi, \eta)$ im Fundamentalbereich eindeutig und stetig, mit Ausnahme des Punktes ξ_∞, wo es unstetig wird, wie $-\frac{\sin\varphi}{r}$; beim Uebergang von einem Punkte des Ausgangsbereiches zu einem congruenten Punkte reproducirt sich aber $Q(\xi, \eta)$ im Allgemeinen nicht unverändert, wie es $P(\xi, \eta)$ thut, sondern es wächst um einen bestimmten Periodicitätsmodul. Und zwar entspricht jeder der Erzeugenden $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ ein solcher Periodicitätsmodul, während bei Anwendung der Substitutionen S_i auch $Q(\xi, \eta)$ sich reproducirt.

$$\Phi(\zeta) = P(\xi, \eta) + iQ(\xi, \eta)$$

ist daher eine analytische Function der complexen Variablen ζ, welche nur an der Stelle ζ_∞ und den congrunten Stellen je einfach ∞ wird, und welche bei Anwendung der Substitutionen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ auf die Variable sich um rein imaginäre Periodicitätsmoduln vermehrt, bei Anwendung von S_i dagegen sich unverändert reproducirt.

$\Phi(\zeta)$ *ist daher für den automorphen Fundamentalbereich**) *dasselbe, wie für eine gewöhnliche Riemann'sche Fläche ein Abel'sches Integral* 2. *Gattung.*

Die automorphen Functionen, die ja unser Ziel sind, entsprechen also den algebraischen Functionen. Zu diesen kann man von den Integralen auf verschiedene Weise gelangen. Z. B. auf folgende Weise:

Bildet man für denselben Fundamentalbereich irgend zwei Functionen $\Phi_1(\zeta)$, $\Phi_2(\zeta)$ mit verschiedenen Unendlichkeitspunkten, so ist, wie leicht zu sehen,

$$Z(\zeta) = \frac{d\Phi_1(\zeta)}{d\Phi_2(\zeta)}$$

eine eigentlich automorphe Function des Bereichs.

Die so gefundene specielle automorphe Function nimmt, wenn $\Phi_1(\zeta)$ und $\Phi_2(\zeta)$ nicht besonders ausgewählt sind, jeden ihrer Werthe in jedem Fundamentalbereiche $(2p+2)$-mal an, d. h. $Z(\zeta)$ *ist im Allgemeinen eine* $(2p+2)$*-werthige automorphe Function.*

Ich deute nun Z als unabhängige Variable in einer Z-Ebene. Jedem Punkte der Z-Ebene entsprechen dann je $2p+2$ Systeme congruenter Stellen in der ζ-Ebene, von denen nur für besondere isolirte Werthe von Z zwei oder mehrere zusammenrücken. Ueber der Z-Ebene denke ich mir eine $(2p+2)$-blättrige Riemann'sche Fläche ausgebreitet, derart, dass jedem der $2p+2$ einem Werthe von Z entsprechenden Systeme congruenter Stellen ζ je eine der über Z

*) So will ich allgemein den in der ζ-Ebene gelegenen Fundamentalbereich mit seiner linearen Kantenzuordnung nennen.

liegenden getrennten Stellen der Riemann'schen Fläche entspricht. Die Blätter dieser Riemann'schen Fläche hängen an denjenigen Stellen der Z-Ebene in Verzweigungspunkten zusammen, für welche mehrere der sonst getrennten Systeme congruenter Stellen der ζ-Ebene in ein System zusammenrücken. Jedem Punkte des ζ-Fundamentalbereichs entspricht dann ein und nur ein Punkt der Riemann'schen Fläche über der Z-Ebene, jedem Punkte der Riemann'schen Fläche ein und, wenn man congruente Randpunkte nicht als verschieden ansieht, nur ein Punkt des ζ-Fundamentalbereichs. Die Riemann'sche Fläche hat daher dasselbe Geschlecht, wie der Fundamentalbereich. Zugleich ist die Abbildung der ζ-Ebene auf die Z-Ebene (mit Ausnahme der Ecken α_i des Fundamentalbereichs und mit Ausnahme der Verzweigungsstellen der Riemann'schen Fläche) conform.

Die Function $Z(\zeta)$ bildet die in abstractem Sinne geschlossene Mannigfaltigkeit des automorphen Fundamentalbereichs ein-eindeutig und conform auf eine $(2p+2)$-blättrige räumlich geschlossene Riemann'sche Fläche vom selben Geschlechte ab.

Solchen Wegen der ζ-Ebene, welche von irgend einem Ausgangspunkte zu einem congruenten Punkte verlaufen, entsprechen geschlossene Wege auf der Riemann'schen Fläche und umgekehrt. Daraus folgt, dass jede m-werthige eigentliche automorphe Function des Fundamentalbereiches eine auf der Riemann'schen Fläche eindeutige und m-werthige Function ist und umgekehrt. Also:

Die Gesammtheit der eigentlich automorphen Functionen des Fundamentalbereiches ist identisch mit der Gesammtheit der algebraischen Functionen der Riemann'schen Fläche.

Ferner:

Die Gesammtheit der uneigentlich automorphen Functionen des Fundamentalbereichs ist identisch mit der Gesammtheit derjenigen multiplicativen Functionen der Riemann'schen Fläche, welche nur in denjenigen Punkten verzweigt sind, die den Ecken α_i des Fundamentalbereichs entsprechen.

Damit wird die Theorie der automorphen Functionen des Bereiches auf die Theorie der multiplicativen Functionen der Riemann'schen Fläche zurückgeführt; es wird die Aufgabe der folgenden Paragraphen sein, auch die automorphen Formen von ζ_1, ζ_2 auf die im vorigen Theile meiner Arbeit ausführlich behandelten multiplicativen Formen der Riemann'schen Fläche zu beziehen.

Nun ist zwar die Theorie sowohl der multiplicativen Functionen als der multiplicativen Formen von der speciellen Darstellung des algebraischen Gebildes im Wesentlichen unabhängig; d. h. dieselben Dienste, wie die $(2p+2)$-blättrige Fläche über der Z-Ebene würde

uns jede andere zu demselben algebraischen Gebilde gehörende Fläche leisten. Für viele Zwecke, und um die Begriffe zu fixiren, ist es aber bequem, eine *kanonische Fläche* zu Grunde zu legen, und dies soll fortan geschehen.

Die unabhängige Variable der kanonischen Fläche, eine m-werthige eigentlich automorphe Function des Fundamentalbereichs, heisse fortan z.

Auf der kanonischen Riemann'schen Fläche existiren nun alle die Functionen, Integrale, Formen, welche im ersten und zweiten Theil dieser Arbeit untersucht sind; alle die dort gebrauchten Bezeichnungen sollen jetzt einfach übertragen werden.

Dabei soll zur Definition der Ausgangszweige der Integrale und der Primformen dasjenige Querschnittsystem benutzt werden, welches bei der conformen Abbildung des ζ-Polygons auf die Riemann'sche Fläche z den Ufern $A_\varkappa^{\pm}$, $B_\varkappa^{\pm}$ des Fundamentalbereichs entspricht. Hiermit tritt deutlich hervor, warum ich immer einen kanonischen Fundamentalbereich auswähle; einem solchen entspricht nämlich auf der Riemann'schen Fläche ein kanonisches Schnittsystem, so dass alle früheren Betrachtungen ohne Modification zu übertragen sind.

Den Periodenwegen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ auf der Riemann'schen Fläche entsprechen dann einzeln die gleichbenannten Substitutionen der Variablen ζ, den Umläufen von z um die den Ecken α_i entsprechenden Punkte e_i die Substitutionen S_i der Variablen ζ.

Insbesondere haben wir die Sätze:

In der Umgebung einer Stelle e_i besteht die Entwicklung

$$\frac{(\zeta\alpha_i)}{(\zeta\beta_i)} = (z-e_i)^{\frac{1}{l_i}}\left(a_0 + a_1\mathfrak{P}(z-e_i)\right),$$

oder wenn die zugehörige Substitution eine parabolische ist:

$$\frac{(\zeta\beta_i)}{(\zeta\alpha_i)} = \log(z-e_i) + \mathfrak{P}(z-e_i).$$

An jeder andern Stelle verhält sich ζ regulär, d. h. es bildet die volle Umgebung der Stelle auf der Riemann'schen Fläche auf die einfach überdeckte Umgebung der Stelle ζ ab.

§ 20.

Die automorphen Variablen ζ_1, ζ_2 als Formen der algebraischen Variablen z_1, z_2.

Es sollen die Formen von ζ_1, ζ_2 in Beziehung zu den Formen von z_1, z_2 gesetzt werden. Zu dem Zwecke muss zwischen der Spaltung von ζ in ζ_1 und ζ_2 und der Spaltung von z in z_1 und z_2, die ja an

sich ganz unabhängig von einander sind, eine solche Beziehung festgesetzt werden, dass ζ_1, ζ_2 Formen von z_1, z_2 und umgekehrt sind.

An diese Festsetzung wird man folgende Forderungen zu stellen haben:

1) *Erlaubten Werthsystemen von z_1, z_2 sollen nur erlaubte Werthsysteme von ζ_1, ζ_2 entsprechen und umgekehrt.*

2) *Auf der Riemann'schen Fläche geschlossenen Wegen von z_1, z_2 sollen ganze binäre homogene Substitutionen von ζ_1, ζ_2 entsprechen.*

Zu 1) ist noch zu bemerken, dass man die Forderung nicht mehr aufrecht erhalten kann, sobald ζ sich einem Grenzpunkte des Polygonnetzes z. B. dem Fixpunkte einer parabolischen Substitution unbegrenzt nähert, zu 2), dass man auf die Forderung unimodularer Substitutionen zu Gunsten von 1) verzichten muss.

Wir stellen nun folgende Ueberlegung an:

Wenn ζ_1, ζ_2 irgend eine ganze binäre Substitution erleidet, so multiplicirt sich

$$(\zeta, d\zeta) = \zeta_1 d\zeta_2 - \zeta_2 d\zeta_1$$

nur mit der Determinante der Substitution.

Folglich muss $\frac{(\zeta, d\zeta)}{d\omega_z}$ eine multiplicative Form der Riemann'schen Fläche, und also durch ein Product von multiplicativen Primformen ausdrückbar sein.

Um nun diesen Ausdruck durch Primformen wirklich aufzustellen, hat man den Quotienten $\frac{(\zeta, d\zeta)}{d\omega_z}$ an den verschiedenen Stellen der Riemann'schen Fläche über der z-Ebene auf sein Verschwinden und Unendlichwerden zu untersuchen. Dabei kann wegen der gegenüber linearer Transformation invarianten Bedeutung von $(\zeta, d\zeta)$ das Unendlichferne der ζ-Ebene keine besondere Rolle spielen, und weil die Bedeutung von $d\omega_z$ von der Auswahl der betreffenden Riemann'schen Fläche unabhängig ist, so sind auch die unendlich fernen Punkte und die Verzweigungspunkte der von uns gewählten Riemann'schen Fläche mit jedem gewöhnlichen Punkte derselben für unsere Betrachtung gleichwerthig. Ich brauche mich daher nur auf endliche schlichte Stellen der Riemann'schen Fläche zu beschränken, welche zugleich nur endlichen Stellen des ζ Bereichs entsprechen, und habe nur zu unterscheiden, ob die betreffende Stelle einem nichtsingulären Punkte oder einer singulären Ecke α_i des Fundamentalbereichs der ζ-Ebene entspricht.

Für einen nichtsingulären Punkt ist in dem Ausdruck

$$\frac{(\zeta, d\zeta)}{d\omega_z} = -\zeta_2^{\,2} z_2^{-2} \cdot G(z_1, z_2) \cdot \frac{d\zeta}{dz}$$

$\frac{d\zeta}{dz}$ endlich und von 0 verschieden, ebenso z_2, $G(z_1, z_2)$ und wegen der Forderung 1) auch ζ_2. Infolgedessen hat man den Satz:

Die multiplicative Form $\frac{(\zeta, d\zeta)}{d\omega_s}$ ist an jeder Stelle der Riemann'schen Fläche, welche keiner singulären Ecke α_i des Fundamentalbereichs entspricht, endlich und von 0 verschieden.

An einem Fixpunkt α_i der elliptischen Substitution S_i muss $(\zeta\alpha_i)$ verschwinden, also $(\zeta\beta_i)$ von 0 verschieden und endlich sein. Sei e_i der entsprechende Werth von z; so verhält sich dort

$$(\zeta, d\zeta) = -\frac{(\zeta\beta_i)^2}{(\alpha_i\beta_i)} \cdot d\left(\frac{(\zeta\alpha_i)}{(\zeta\beta_i)}\right) \text{ wie } -\frac{(\zeta\beta_i)^2}{(\alpha_i\beta_i)} \cdot (z-e_i)^{\frac{1}{l_i}-1} \cdot dz.$$

$d\omega_s$ ist nun von dz nur um einen an der betr. Stelle endlichen und nicht verschwindenden Factor verschieden, der Quotient $\frac{(\zeta, d\zeta)}{d\omega_s}$ wird also an der Stelle e_i von der Ordnung $\left(1-\frac{1}{l_i}\right)$ unendlich. Man hat also das Resultat:

$\frac{(\zeta, d\zeta)}{d\omega_s}$ ist eine multiplicative Form von z_1, z_2, welche überall endlich und von Null verschieden ist, mit Ausnahme der Stellen e_i, wo sie von der Ordnung $\left(1-\frac{1}{l_i}\right)$ unendlich wird.

Folgende Gleichung giebt also in allgemeinster Weise die gewünschte Beziehung zwischen den automorphen und algebraischen Variablen:

$$(\zeta, d\zeta) = -\prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{-\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot e^{2c_0+\sum_\alpha 2c_\alpha \overline{W}_\alpha^z} \cdot d\omega_s$$

Hieraus folgen dann vermöge der Identitäten

$$\zeta_1 = \zeta\sqrt{-\frac{(\zeta, d\zeta)}{d\zeta}}, \qquad \zeta_2 = \sqrt{-\frac{(\zeta, d\zeta)}{d\zeta}},$$

die gesuchten analytischen Ausdrücke für ζ_1, ζ_2 als Formen von z_1, z_2:

$$\zeta_1 = \zeta \cdot \left(\frac{d\zeta}{d\omega_s}\right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot e^{c_0+\sum_\alpha c_\alpha \overline{W}_\alpha^z}$$

$$= \zeta \cdot \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot \frac{z_2}{\sqrt{G(z_1, z_2)}} \cdot e^{c_0+\sum_\alpha c_\alpha \overline{W}_\alpha^z},$$

$$\zeta_2 = \left(\frac{d\zeta}{d\omega_s}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot e^{c_0+\sum_\alpha c_\alpha \overline{W}_\alpha^z}$$

$$= \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot \frac{z_2}{\sqrt{G(z_1, z_2)}} \cdot e^{c_0+\sum_\alpha c_\alpha \overline{W}_\alpha^z}.$$

Die allgemeinste den gestellten Forderungen entsprechende Spaltung von ζ ist durch die vorstehenden Formeln gegeben.

Die Variablen ξ_1, ξ_2 sind in den multiplicativen Primformen vom Grade $q = -p + 1 - \sum_i \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right)$, in z_1, z_2 vom Grade $\frac{q}{m}$.

Für das folgende soll der Einfachheit halber immer

$$c_0 = 0, \qquad c_\alpha = 0$$

gesetzt sein.

Aus dem bekannten Verhalten von ζ findet man, dass sich in der Umgebung einer Stelle e_i verhalten

$$\begin{aligned} (\zeta\alpha_i) &\quad \text{wie} \quad (z - e_i)^{\frac{1}{l_i}} \Psi_1(z_1, z_2), \\ (\zeta\beta_i) &\quad \text{„} \qquad\quad \Psi_2(z_1, z_2), \end{aligned}$$

bezw. wenn α_i eine parabolische Ecke ist:

$$\begin{aligned} (\zeta\alpha_i) &\quad \text{wie} \quad \Psi(z_1, z_2), \\ (\zeta\beta_i) &\quad \text{„} \quad \Psi(z_1, z_2) \cdot \log(z - e_i) + \Phi(z_1, z_2), \end{aligned}$$

worin unter Ψ, Ψ_1, Ψ_2 je eine an der Stelle e_i weder verschwindende noch unendlich werdende, unter Φ eine an e_i nicht unendlich werdende Form von z_1, z_2 verstanden ist.

Hieraus folgt, dass bei einem positiven Umlauf von z_1, z_2 um den Punkt e_i die Variablen ξ_1, ξ_2 folgende homogene Substitutionen erfahren:

$$\begin{aligned} (\zeta'\alpha_i) &= e^{\frac{2i\pi}{l_i}} (\zeta\alpha_i), \\ (\zeta'\beta_i) &= \quad (\zeta\beta_i), \end{aligned}$$

bezw. in einer parabolischen Ecke:

$$\begin{aligned} (\zeta'\alpha_i) &= \quad (\zeta\alpha_i), \\ (\zeta'\beta_i) &= 2i\pi \cdot (\zeta\alpha_i) + (\zeta'\beta_i). \end{aligned}$$

Bei einem positiven Umlauf von z_1, z_2 um den Punkt e_i erleiden also die Variablen ξ_1, ξ_2 die Substitution $\mathbf{S}_i$, verbunden mit einer simultanen Multiplication mit $e^{\frac{i\pi}{l_i}}$, wobei für eine parabolische Ecke $l_i = \infty$ zu setzen ist.

Um das Verhalten von ξ_1, ξ_2 gegenüber einem Periodenwege von z_1, z_2 anzugeben, ist erst noch genauer festzusetzen, welche der beiden möglichen unimodularen Spaltungen der Substitutionen $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ man mit $\mathbf{A}_\varkappa$, $\mathbf{B}_\varkappa$ bezeichnen will. Wir verabreden in dieser Hinsicht:

$\mathbf{A}_\varkappa$, $\mathbf{B}_\varkappa$ *sollen diejenigen unimodularen Substitutionen bedeuten, welche die Formen*

$$Z_1 = \zeta \cdot \left(\frac{d\zeta}{d\omega_z}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad Z_2 = \left(\frac{d\zeta}{d\omega_z}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

längs der primitiven Periodenwege A_x, B_x erleiden.

Dann folgt aber sofort aus dem bekannten Verhalten der mit Z_1 und Z_2 multiplicirten Primformen:

Längs eines geschlossenen Periodenweges A_x und B_x von z_1, z_2 erleiden ζ_1, ζ_2 die Substitutionen $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{B}_x$ in Verbindung mit einer Multiplication beider Grössen mit den Factoren

$$e^{\sum_\alpha \eta_{\alpha x} \sum_i \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right) \overline{w}_\alpha^{e_i}} \quad \text{bezw.} \quad e^{\sum_\alpha \eta'_{\alpha x} \sum_i \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right) \overline{w}_\alpha^{e_i}}.$$

Man sieht also:

Längs geschlossener Umläufe von z_1, z_2 auf der Riemann'schen Fläche erleiden die Variablen ζ_1, ζ_2 zwar ganze binäre lineare, aber im Allgemeinen nicht unimodulare Substitutionen.

Und als Umkehrung hierzu:

z_1, z_2 verhalten sich unimodularen Substitutionen der ζ_1, ζ_2 gegenüber als uneigentlich automorphe Formen vom Grade $\frac{m}{q}$, und zwar entsprechen den Erzeugenden $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{B}_x$ die folgenden Multiplicatoren von z_1, z_2, die bei z_1 und z_2 jedesmal gleichzeitig zutreten:

$$e^{-\frac{m}{q}\cdot\frac{i\pi}{l_i}}, \quad e^{-\frac{m}{q}\sum_\alpha \eta_{\alpha x} \sum_i \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right) \overline{w}_\alpha^{e_i}}, \quad e^{-\frac{m}{q}\sum_\alpha \eta'_{\alpha x} \sum_i \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right) \overline{w}_\alpha^{e_i}}.$$

Hierzu kann noch wegen des gebrochenen Grades eine simultane Multiplication mit $e^{N\cdot\frac{m}{q}\cdot 2i\pi}$ hinzutreten; doch können wir diese hier ausser Acht lassen, da wir später doch nur solche Formen zu betrachten haben werden, welche in ξ_1, ξ_2 von ganzzahligem Grade sind.

Für manche Zwecke ist es nützlich, das Anfangsglied der Reihenentwicklung von $(\zeta\xi)$ nach Potenzen von (zx) bezw. $\overline{P}(zx)$ zu kennen.

Man findet dasselbe aus der Definition von ζ_1, ζ_2 und dem bekannten Verhalten von $(\zeta - \xi)$. Merkwürdigerweise ist der Coefficient des ersten Gliedes von $(\zeta\xi)$ von dem Coefficienten des ersten Gliedes von $(\zeta - \xi)$ unabhängig. Man findet:

Wenn ξ keine der Ecken α_i des Fundamentalbereichs ist, so gelten an der Stelle ξ die Entwicklungen:

$$(\zeta\xi) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} a_\lambda \cdot \left(\frac{\overline{P}(zy)}{\overline{P}(xy)}\right)^{q-\lambda} \cdot \overline{P}(zx)^\lambda, \quad a_1 = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(xe_i)^{-\left(1-\frac{1}{l_i}\right)},$$

$$(\zeta\xi) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} b_\lambda \cdot \left(\frac{(zy)}{(xy)}\right)^{\frac{q}{m}-\lambda} \cdot (zx)^\lambda, \qquad b_1 = \frac{1}{G(x_1,x_2)} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(xe_i)^{-\left(1-\frac{1}{l_i}\right)}.$$

Ist dagegen ξ der Fixpunkt α_i der elliptischen Substitution S_i, so ist

$$(\xi\alpha_i) = \left(\frac{\overline{P}(zy)}{\overline{P}(e_i y)}\right)^{-\frac{1}{l_i}} \overline{P}(ze_i)^{\frac{1}{l_i}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} a_\lambda' \left(\frac{\overline{P}(zy)}{\overline{P}(e_i y)}\right)^{q-\lambda} \overline{P}(ze_i)^\lambda,$$

$$a_0' = l_i \prod_{\nu \gtrless i}' \overline{P}_i(e_i e_\nu)^{-\left(1-\frac{1}{l_i}\right)},$$

$$(\zeta\alpha_i) = \left(\frac{(zy)}{(e_i y)}\right)^{-\frac{1}{l_i}} (ze_i)^{\frac{1}{l_i}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} b_\lambda' \left(\frac{(zy)}{(e_i y)}\right)^{\frac{q}{m}-\lambda} (ze_i)^\lambda,$$

$$b_0' = \frac{l_i}{G(e_{i1}, e_{i2})^{\frac{1}{l_i}}} \cdot \prod_{\nu \gtrless i}' \overline{P}(e_i e_\nu)^{-\left(1-\frac{1}{l_i}\right)}.$$

§ 21.

Darstellung der automorphen Formen von ζ_1, ζ_2 als multiplicative Formen von z_1, z_2.

Eine Form, welche sich gegenüber unimodularen Substitutionen von ξ_1, ξ_2 multiplicativ verhält, muss natürlich auch gegenüber den nicht unimodularen Substitutionen, welche geschlossenen Umläufen von z_1, z_2 entsprechen, multiplicatives Verhalten zeigen, und umgekehrt. D. h.

Die Gesammtheit aller automorphen Formen des ξ-Bereichs stimmt mit der Gesammtheit aller multiplicativen Formen der zugehörigen Riemann'schen Fläche überein.

Wir wollen aber wesentlich mit den eindeutigen automorphen Formen uns beschäftigen. Vor allen Dingen müssen diese in der ξ-Ebene unverzweigt*) sein.

Man sieht nun sofort:

Die Gesammtheit der in der ξ-Ebene unverzweigten automorphen Formen ist identisch mit der Gesammtheit derjenigen multiplicativen Formen der zugehörigen Riemann'schen Fläche, welche höchstens in den Punkten e_i und zwar mit der Multiplicität l_i (oder einem Theiler von l_i) verzweigt sind.

Entspricht e_i einer parabolischen Ecke α_i, so ist die Verzweigung der multiplicativen Formen daselbst von beliebig hoher Ordnung.

Die einfachsten unverzweigten automorphen Formen sind diejenigen, welche nur in den Punkten eines Systems congruenter Stellen der

*) Vergl. Math. Ann. Bd. 41, Seite 30ff.

ζ-Ebene je einfach verschwinden. *Ich nenne solche Formen „automorphe Primformen".*

Bezüglich des Ausdrucks derselben durch ε_1, ε_2 muss man einen Unterschied machen, ob die Verschwindungsstellen nichtsinguläre Stellen der einzelnen Fundamentalbereiche sein sollen, oder ob in ihnen immer mehrere Bereiche mit je einer Ecke α_i zusammenstossen. Ich sage:

Die automorphe Primform für eine nicht singuläre Stelle ζ des Fundamentalbereichs ist:

$$Z = P(\varepsilon x),$$

für eine elliptische Ecke α_i:

$$Z_i = P(\varepsilon e_i)^{\frac{1}{l_i}},$$

für eine parabolische Ecke α_i:

$$Z_i = \log P(\varepsilon e_i),$$

unter $P(\varepsilon x)$ u. s. w. immer die allgemeinste an der Stelle x verschwindende multiplicative Primform unserer Riemann'schen Fläche

$$P(\varepsilon x) = \overline{P}(\varepsilon x) \cdot e^{a_0 + \sum_\alpha c_\alpha \overline{w}_\alpha^\varepsilon}.$$

verstanden.

Diejenigen automorphen Primformen, welche zu nicht singulären Punkten oder elliptischen Ecken gehören, sind automorphe Formen im gewöhnlichen Sinne, die zu parabolischen Ecken gehörenden dagegen verhalten sich bei den Substitutionen der Gruppe additiv; multiplicativ jedoch und ebenfalls unverzweigt verhält sich in einer parabolischen Ecke jede Potenz

$$P(\varepsilon e_i)^{a_i'}$$

mit beliebigem rationalem oder irrationalem, reellem oder complexem Exponenten.

Der Grad der automorphen Primformen in Bezug auf ζ_1, ζ_2 ist in den 3 Fällen beziehungsweise $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q l_i}$ oder logarithmisch.

Da der Grad im Allgemeinen nicht ganzzahlig ist, so sind die automorphen Primformen, allgemein zu reden, obwohl unverzweigte, dennoch mehrdeutige Formen von ζ_1, ζ_2.

Die „automorphen Primformen" sind die Verallgemeinerung derjenigen Formen, welche ich im Falle $p = 0$ Grundformen*) genannt hatte. Diesen Namen habe ich jedoch aufgegeben und dafür den Namen „automorphe Primformen" eingeführt wegen der innigen Verwandtschaft, ja Identität mit den „multiplicativen Primformen", und

*) Math. Ann. Bd. 41, Seite 41 ff.

das um so lieber, als ich so auch mit der von Hrn. Schlesinger*) im Falle $p = 0$ gebrauchten Terminologie mich in Einklang befinde.

Die allgemeinste unverzweigte automorphe Form ist ein Product solcher automorphen Primformen, also ein Ausdruck folgender Art:

$$F(\zeta_1, \zeta_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z c_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot \frac{\overline{P}(z a_1)\overline{P}(z a_2)\dots\overline{P}(z a_{\delta+\varepsilon})}{\overline{P}(z b_1)\overline{P}(z b_2)\dots\overline{P}(z b_\varepsilon)} \cdot e^{k_0 + \sum_\alpha k_\alpha \overline{W}_\alpha^z}.$$

Der Grad derselben in ζ_1, ζ_2 ist:

$$R = \frac{1}{q}\left(\delta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varepsilon_i}{l_i}\right)$$

und den Erzeugenden $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{A}_\varkappa$, $\mathbf{B}_\varkappa$ der unimodularen Gruppe entsprechen die Multiplicatoren:

$$e^{2i\pi\left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} - \frac{R}{2 l_i}\right)},$$

$$e^{\sum_\alpha \left\{ \omega_{\alpha\varkappa} k_\alpha - \eta_{\alpha\varkappa}\left[\sum_a \overline{W}_\alpha^a - \sum_b \overline{W}_\alpha^b + \sum_i \left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{R}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right)\right)\overline{W}_\alpha^{e_i}\right]\right\}},$$

$$e^{\sum_\alpha \left\{ \omega'_{\alpha\varkappa} k_\alpha - \eta'_{\alpha\varkappa}\left[\sum_a \overline{W}_\alpha^a - \sum_b \overline{W}_\alpha^b + \sum_i \left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{R}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right)\right)\overline{W}_\alpha^{e_i}\right]\right\}}.$$

Dazu kann noch in Folge von simultanen Umläufen von ζ_1, ζ_2 um 0 ein Multiplicator $e^{N \cdot R \cdot 2\pi i}$ hinzutreten, unter N eine beliebige ganze Zahl verstanden.

Ist α_i eine parabolische Ecke, so tritt an Stelle des Exponenten $\frac{\varepsilon_i}{l_i}$ eine beliebige rationale oder irrationale reelle oder complexe Zahl ε_i'.

Damit nun die unverzweigte automorphe Form $F(\zeta_1, \zeta_2)$ zugleich eine eindeutige Form sei, muss

1) *der Grad R eine ganze Zahl sein,*

2) *das Multiplicatorsystem den in* § 18 *angegebenen Bedingungen genügen.*

Es sei der Grad R und das Multiplicatorsystem

$$\varrho_i = e^{i\pi\frac{\lambda_i}{l_i}}, \qquad \varrho_\varkappa = e^{2i\pi\sigma_\varkappa}, \qquad \varrho_\varkappa' = e^{2i\pi\sigma'_\varkappa}$$

einer eindeutigen automorphen Form vorgegeben.

Dann sind die Zahlen ε_i, δ und die Punkte a und b offenbar folgenden Gleichungen und Congruenzen entsprechend zu bestimmen:

*) Ueber die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretenden Primformen (Crelle's Journ. Bd. 110),

$$\delta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varepsilon_i}{l_i} = R \cdot q = -R(p-1) - \frac{R}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \left(1 - \frac{1}{l_i}\right),$$

$$\frac{\varepsilon_i}{l_i} - \frac{R}{2l_i} \equiv \frac{\lambda_i}{2l_i} \pmod 1,$$

$$\omega_{\alpha\varkappa} k_\alpha - \eta_{\alpha\varkappa} \left[\sum_a \overline{W}_a^a - \sum_b \overline{W}_a^b + \sum_i \left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{R}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right)\right) \overline{W}_\alpha^{e_i} \right]$$
$$= -h'_\varkappa \equiv \sigma_\varkappa \pmod 1,$$

$$\omega'_{\alpha\varkappa} k_\alpha - \eta'_{\alpha\varkappa} \left[\sum_a \overline{W}_a^a - \sum_b \overline{W}_a^b + \sum_i \left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{R}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right)\right) \overline{W}_\alpha^{e_i} \right]$$
$$= +h_\varkappa \equiv \sigma'_\varkappa \pmod 1.$$

Die Zahlen $\frac{\varepsilon_i}{l_i}$ kann ich hier, indem ich eventuell e_i unter die Punkte a oder b ein oder mehrere Mal aufnehme, immer so einrichten, dass

$$0 \leqq \frac{\varepsilon_i}{l_i} < 1$$

ist. Für eine parabolische Ecke soll festgesetzt werden, dass

$$\begin{array}{lll} \text{wenn} & R \geqq 0 & \text{ist,} \quad 0 \leqq \Re(\varepsilon_i') < 1, \\ \text{wenn} & R \leqq -2 & \text{ist,} \quad 0 < \Re(\varepsilon_i') \leqq 1 \end{array}$$

sein soll. Für $R = -1$ will ich mir für den einzelnen Fall die Entscheidung vorbehalten, ob ich $\Re(\varepsilon_i')$ gleich 0 oder $= 1$ setzen will.

Es bedeute nun $E[\alpha]$ die grösste in α enthaltene reelle ganze Zahl. Dann ergeben sich durch Auflösung der obigen Gleichungen und Congruenzen die in nachfolgendem Satze angegebenen Gleichungen:

Der allgemeinste Ausdruck einer eindeutigen automorphen Form vom Grade R und dem Multiplicatorsystem

$$\varrho_i = e^{i\pi \frac{\lambda_i}{l_i}} \quad \text{bezw. } e^{i\pi\lambda_i'}, \quad \varrho_\varkappa = e^{2i\pi\sigma_\varkappa}, \quad \varrho'_\varkappa = e^{2i\pi\sigma'_\varkappa}$$

lautet:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot \frac{\overline{P}(z a_1)\,\overline{P}(z a_2) \ldots \overline{P}(z a_{\delta+\varepsilon})}{\overline{P}(z b_1)\,\overline{P}(z b_2) \ldots \overline{P}(z b_\varepsilon)} \cdot e^{k_0 + \sum_\alpha k_\alpha \overline{W}_\alpha^z},$$

wobei die Zahlen ε_i, ε_i', δ durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\frac{\varepsilon_i}{l_i} = \frac{\lambda_i + R}{2l_i} - E\left[\frac{\lambda_i + R}{2l_i}\right], \qquad \varepsilon_i' = \frac{1}{2}\lambda_i' - E\left[\frac{1}{2}\lambda_i'\right],$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{i=n} E\left[\frac{\lambda_i + R}{2 l_i}\right] - R(p-1) - \frac{Rn + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{l_i}}{2},$$

und die Punkte a und b so zu bestimmen sind, dass

$$\sum_a \overline{W}_a^a - \sum_b \overline{W}_a^b = K_a$$

$$= -\sum_x (h_x \omega_{ax} + h'_x \omega'_{ax}) - \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{R}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right)\right) \overline{W}_a^{e_i},$$

$$k_a = -\sum_x (h_x \eta_{ax} + h'_x \eta'_{ax}).$$

Dabei ist für eine parabolische Ecke, bei rein imaginärem Werthe von λ_i',

$$\text{wenn } R \geqq 0 \text{ ist}, \quad E\left[\tfrac{1}{2}\lambda_i'\right] = 0,$$

$$\text{wenn } R \leqq -2 \text{ ist}, \quad E\left[\tfrac{1}{2}\lambda_i'\right] = -1$$

zu setzen.

Da zufolge § 18

$$R + \lambda_i \equiv 0 \pmod 2$$

ist, so ergeben sich aus den vorstehenden Formeln immer ganzzahlige Werthe von ε_i, und da

$$Rn + \sum \frac{\lambda_i}{l_i} \equiv 0 \pmod 2$$

ist, auch immer ganzzahlige Werthe von δ. Da endlich auch die Congruenzen für die Punkte a und b bei hinreichend gross gewählter Anzahl ε immer lösbar sind, so ist folgender Satz richtig:

Es giebt zu jedem zulässigen Multiplicatorsysteme zugehörige eindeutige automorphe Formen.

Für den Grad δ der im allgemeinen Ausdruck enthaltenen unverzweigten multiplicativen Form lässt sich leicht eine untere und eine obere Grenze angeben.

Es ist nämlich

$$0 \leqq \frac{\varepsilon_i}{l_i} \leqq 1 - \frac{1}{l_i},$$

also, da

$$\delta = R \,.\, q - \sum \frac{\varepsilon_i}{l_i}$$

und

$$\sum\left(1-\frac{1}{l_i}\right)=-2p+2-2q$$

ist,

$$(R+2)q+2p-2\leqq\delta\leqq Rq.$$

Sehe ich von den Fällen $p=0$, und dem Falle $p=1$ ohne singuläre Ecken —, welcher auf die gewöhnlichen elliptischen Functionen führt, — ab, so ist stets

$$q<0.$$

Daraus folgt:

Wenn $R>0$ ist, so ist stets $\delta<0$, wenn $R<-2$ ist, so ist stets $\delta>2p-2$.

Da ferner rechts das Gleichheitszeichen nur dann auftritt, wenn alle $\frac{\varepsilon_i}{l_i}=0$, und links nur, wenn alle $\frac{\varepsilon_i}{l_i}=1-\frac{1}{l_i}$ sind, so findet man:

Wenn $R=0$ ist, so ist $\delta=0$, wenn alle $\varrho_i=1$,
$\delta<0$, wenn nicht alle $\varrho_i=1$ sind,
wenn $R=-2$ ist, so ist $\delta=2p-2$, wenn alle $\varrho_i=1$,
$\delta>2p-2$, wenn nicht alle $\varrho_i=1$ sind.

Ferner zeigt man genau wie im Falle $p=0$*) die Richtigkeit folgenden Satzes:

Stehen die Grade R, R' sowie die den Erzeugenden $\mathbf{S}_i$ entsprechenden Multiplicatoren ϱ_i, ϱ_i' zweier automorphen Formen F, F' in der Beziehung:

$$R+R'=-2,\qquad \varrho_i\varrho_i'=1,$$

so ist

$$\delta+\delta'=2p-2,\qquad \frac{\varepsilon_i}{l_i}+\frac{\varepsilon_i'}{l_i}=1-\frac{1}{l_i}.$$

Stehen nicht nur die den $\mathbf{S}_i$ entsprechenden, sondern alle Multiplicatoren in der Beziehung

$$\varrho\cdot\varrho'=1$$

und ist

$$R+R'=-2,$$

so sind die von den Verzweigungsfactoren befreiten Theile beider Formen reciproke multiplicative Formen; denn die Grade stehen in der Beziehung:

$$\delta+\delta'=2p-2$$

und die Grössen K_α und k_α ergänzen sich zu Perioden erster und zweiter Gattung

*). Math. Ann. Bd. 41, S. 45.

$$K_\alpha + K'_\alpha = \sum_\varkappa (N_\varkappa \omega_{\alpha\varkappa} + N'_\varkappa \omega'_{\alpha\varkappa}),$$

$$k_\alpha + k'_\alpha = \sum_\varkappa (N_\varkappa \eta_{\alpha\varkappa} + N'_\varkappa \eta'_{\alpha\varkappa}).$$

Ich übertrage nun diese Benennung auch auf die automorphen Formen, und sage:

Ich nenne zwei automorphe Formen „reciproke Formen", wenn die Grade R und R' und die denselben Substitutionen entsprechenden Multiplicatoren ϱ und ϱ' in der Beziehung stehen:

$$R + R' = -2, \qquad \varrho\varrho' = 1.$$

Die unverzweigten Theile im Ausdruck zweier reciproken automorphen Formen durch z_1, z_2 sind reciproke multiplicative Formen, die Verzweigungsfactoren ergänzen sich zu

$$\prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{1-\frac{1}{l_i}}.$$

Das Product irgend zweier reciproken automorphen Formen ist eine eigentlich automorphe Form vom Grade -2.

Jede dieser Eigenschaften, z. B. die letzte, kann man auch zur Definition der reciproken automorphen Formen benutzen.

Besondere Wichtigkeit besitzen die *eigentlich automorphen Formen vom Grade -2*, welche den Formen $\Phi(z_1, z_2)$ vom Grade $2p-2$, die auf der kanonischen Fläche algebraisch sind, genau entsprechen; *ihr allgemeiner Ausdruck lautet*

$$F_{-2}(\xi_1, \xi_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{1-\frac{1}{l_i}} \cdot \Phi(z_1, z_2).$$

Es gilt von ihnen natürlich folgender Satz:

Es giebt p linear unabhängige ganze eigentlich automorphe Formen vom Grade -2, welche den p linear unabhängigen ganzen auf der kanonischen Fläche algebraischen Formen φ vom Grade $2p-2$ proportional sind.

Berücksichtigt man, dass

$$(\xi, d\xi) = -\prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(ze_i)^{-\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot d\omega_z$$

ist, so findet man

$$-\int F_{-2}(\xi_1, \xi_2) \cdot (\xi, d\xi) = \int \Phi(z_1, z_2) \cdot d\omega_z.$$

Die Integrale der eigentlich automorphen Formen vom Grade -2 sind die Abel'schen Integrale der Riemann'schen Fläche.

Insbesondere sind die Integrale der ganzen eigentlich automorphen Formen vom Grade -2 die p überall endlichen Integrale w_α^z.

§ 22.

Von der Anzahl der willkürlichen Constanten in den automorphen Formen und den Coefficienten ihres Unendlichwerdens.

Es sei

$$F(\xi_1, \xi_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(\varepsilon e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot U(z_1, z_2)$$

eine eindeutige automorphe Form vom Grade R und bestimmtem Multiplicatorsystem, $U(z_1, z_2)$ also eine unverzweigte multiplicative Form von z_1, z_2 von ebenfalls wohl bestimmtem Multiplicatorsysteme, deren Grad ich mit δ benenne. ξ_1', ξ_2'; ξ_1'', ξ_2''; ... $\xi_1^{|\varepsilon|}, \xi_2^{|\varepsilon|}$ seien die im Fundamentalbereiche gelegenen Unendlichkeitsstellen von $F(\xi_1, \xi_2)$ — wobei ein $(ml_i - \varepsilon_i)$-faches Unendlichwerden in einer Ecke α_i als m-faches Unendlichwerden zu zählen ist —. Hiermit sind die Unendlichkeitsstellen x_1', x_2'; x_1'', x_2''; ... $x_1^{|\varepsilon|}, x_2^{|\varepsilon|}$ der multiplicativen Form $U(z_1, z_2)$ bestimmt.

Die Anzahl der noch willkürlichen linearen Constanten in $F(\xi_1, \xi_2)$ stimmt nun offenbar mit der Anzahl der willkürlichen Constanten in der Form $U(z_1, z_2]$ überein, ist also gleich

$$\varepsilon + \delta - p + 1 + \tau',$$

unter τ' die Anzahl der linear unabhängigen an den Stellen $x', x'', \ldots x^{|\varepsilon|}$ verschwindenden ganzen zu $U(z_1, z_2)$ reciproken multiplicativen Formen $u'(z_1, z_2)$ verstanden. Nun entspricht aber jeder solchen Form $u'(z_1, z_2)$ eine an den Stellen $\xi', \xi'', \ldots \xi^{|\varepsilon|}$ des Fundamentalbereichs verschwindende ganze zu $F(\xi_1, \xi_2)$ reciproke automorphe Form

$$f'(\xi_1, \xi_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(\varepsilon e_i)^{\frac{\varepsilon_i'}{l_i}} \cdot u'(z_1, z_2).$$

Der *Riemann-Roch'sche Satz* lässt sich also für automorphe Formen folgendermassen aussprechen:

Es giebt $\varepsilon + \delta - p + 1 + \tau'$ linear unabhängige automorphe Formen vom Grade R und bestimmtem Multiplicatorsystem, welche an ε vorgegebenen incongruenten Stellen unendlich werden dürfen, unter τ' die Anzahl derjenigen linear unabhängigen ganzen reciproken automorphen Formen verstanden, welche an den ε gegebenen Stellen verschwinden.

Für ganze Formen lautet der Satz:

Ist R der Grad eines Systems automorpher Formen $F(\xi_1, \xi_2)$, δ der Grad der zugehörigen unverzweigten multiplicativen Formen $U(z_1, z_2)$, σ die Anzahl der in dem System enthaltenen linear unabhängigen ganzen

Formen, und sind R', δ', σ' die entsprechenden Zahlen für das reciproke System, so ist

$$\sigma = \delta - p + 1 + \sigma',$$
$$\sigma' = \delta' - p + 1 + \sigma.$$

Wenn eine automorphe Form $F(\xi_1, \xi_2)$ an einer Stelle ξ des Fundamentalbereichs (welche der Einfachheit halber keine singuläre Ecke sein möge) unendlich wird wie

$$A \cdot \left(\frac{(\xi\eta)}{(\xi\eta)}\right)^{R+1} \cdot (\xi\xi)^{-1},$$

so wird nach der am Schluss von § 20 gegebenen Formel dieselbe Form als Form von z_1, z_2 unendlich wie

$$A \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(x e_i)^{1-\frac{1}{l_i}} \cdot \left(\frac{\overline{P}(z y)}{\overline{P}(x y)}\right)^{R\varrho+1} \cdot \overline{P}(z x)^{-1},$$

also da

$$1 - \frac{1}{l_i} - \frac{s_i}{l_i} = \frac{s_i'}{l_i}$$

ist, $U(z_1, z_2)$, wie

$$A \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(x e_i)^{\frac{s_i'}{l_i}} \cdot \left(\frac{\overline{P}(z y)}{\overline{P}(x y)}\right)^{\delta+1} \cdot \overline{P}(z x)^{-1}.$$

Es werde nun $F(\xi_1, \xi_2)$ an den Stellen $\xi', \xi'', \ldots \xi^{|\varepsilon|}$ des Fundamentalbereichs mit den Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_\varepsilon$ je einfach unendlich; dann wird die multiplicative Form $U(z_1, z_2)$ an den Stellen $x', x'', \ldots x^{|\varepsilon|}$ mit den Coefficienten

$$A_\nu \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(x^{|\nu|} e_i)^{\frac{s_i'}{l_i}} \qquad \nu = 1, 2, \ldots \varepsilon$$

je einfach unendlich. Bezeichnet nun $u'(z_1, z_2)$ irgend eine der σ' linear unabhängigen ganzen zu $U(z_1, z_2)$ reciproken multiplicativen Formen, so ist also nach § 11

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\varepsilon} A_\nu \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(x^{|\nu|} e_i)^{\frac{s_i'}{l_i}} \cdot u'(x_1^{|\nu|}, x_2^{|\nu|}) = 0.$$

Nun sind aber die Formen

$$\prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{\frac{s_i'}{l_i}} u'(z_1, z_2)$$

gerade die σ' linear unabhängigen zu $F(\xi_1, \xi_2)$ reciproken ganzen automorphen Formen $f_1'(\xi_1, \xi_2), f_2'(\xi_1, \xi_2), \cdots f_{\sigma'}'(\xi_1, \xi_2)$.

Also genügen die Coefficienten der incongruenten Unendlichkeitsstellen einer automorphen Form den Bedingungen:

$$\begin{aligned}
&A_1 f_1'(\xi_1', \xi_2') + A_2 f_1'(\xi_1'', \xi_2'') + \cdots + A_\varepsilon f_1'(\xi_1^{|\varepsilon|}, \xi_2^{|\varepsilon|}) = 0,\\
&A_1 f_2'(\xi_1', \xi_2') + A_2 f_2'(\xi_1'', \xi_2'') + \cdots + A_\varepsilon f_2'(\xi_1^{|\varepsilon|}, \xi_2^{|\varepsilon|}) = 0,\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
&A_1 f_{\sigma'}'(\xi_1', \xi_2') + A_2 f_{\sigma'}'(\xi_1'', \xi_2'') + \cdots + A_\varepsilon f_{\sigma'}'(\xi_1^{|\varepsilon|}, \xi_2^{|\varepsilon|}) = 0,
\end{aligned}$$

wo $f_1', f_2', \ldots f_{\sigma'}'$ die σ' linear unabhängigen ganzen reciproken automorphen Formen vorstellen.

Für die eigentlich automorphen Formen vom Grade -2 specialisiren sich die Formeln zu folgender:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_\varepsilon = 0,$$

d. h. *die Summe der Coefficienten der Unendlichkeitsstellen einer eigentlich automorphen Form vom Grade -2 ist $= 0$.*

Ebenso, wie die bisherigen, lassen sich auch die Sätze über die Mindestanzahl der Unendlichkeitsstellen übertragen. Der wichtigste ist:

Die Mindestanzahl allgemein gelegener Unendlichkeitsstellen einer automorphen Form ist um 1 grösser, als die Zahl der linear unabhängigen ganzen reciproken automorphen Formen.

Die weitaus meisten, und gerade die vermittelst der Poincaré'schen Reihen zugänglichen Fälle $R \leqq -4$ und $R \geqq 2$ der automorphen Formen entsprechen dem „allgemeinen Falle" der multiplicativen Formen, für welchen sich die angegebenen Resultate zum Theil etwas vereinfachen.

So gelten für $R < -2$ und für diejenigen Formen vom Grade $R = -2$, welche nicht mit eigentlich automorphen Formen verwandt sind, folgende Sätze:

Die Anzahl der linear unabhängigen ganzen Formen ist

$$\sigma = \delta - p + 1.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen Formen, welche an ε vorgegebenen Stellen unendlich werden dürfen, ist

$$\varepsilon + \delta - p + 1.$$

Die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen sind keinen Bedingungen unterworfen.

Es giebt immer Formen mit einer einzigen frei beweglichen Unendlichkeitsstelle.

Für die Fälle $R > 0$ und für diejenigen automorphen Functionen, $R = 0$, die nicht mit eigentlich automorphen Functionen verwandt sind, lauten dagegen die entsprechenden Sätze:

Es giebt keine ganzen Formen.

Eine Form, welche an ε vorgegebenen Stellen unendlich werden darf, besitzt

$$\varepsilon + \delta - p + 1 + \tau'$$

willkürliche lineare Constanten, unter τ' die Anzahl der linear unabhängigen ganzen reciproken automorphen Formen verstanden, welche an den gegebenen Unendlichkeitsstellen verschwinden.

Die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen sind $\sigma' - \tau'$ linear unabhängigen homogenen linearen Gleichungen unterworfen.

Die Mindestanzahl frei beweglicher Unendlichkeitsstellen ist $p - \delta$.

Die Mindestanzahl fester Unendlichkeitsstellen ist $\frac{p-\delta}{2}$, vorausgesetzt, dass $p - \delta$ eine gerade Zahl, und $\delta \geqq -p$ ist.

Die Mindestanzahl einfach beweglicher Unendlichkeitsstellen ist $\frac{p-\delta+1}{2}$, vorausgesetzt, dass $p-\delta$ eine ungerade Zahl, und $\delta \geqq -(p+1)$ ist.

Die Mindestanzahl zweifach beweglicher Unendlichkeitsstellen ist $\frac{p-\delta+2}{2}$, vorausgesetzt, dass $p-\delta$ eine gerade Zahl, und $\delta \geqq -(p+2)$ ist.

Für specielle Constanten der Gruppe, sowie für specielle Multiplicatorsysteme kann die Mindestanzahl der Unendlichkeitsstellen von beschränkter Beweglichkeit sich übrigens noch weiter erniedrigen.

Unter diesen Angaben nicht einbegriffen sind, abgesehen von $R = -1$, die eigentlich automorphen Formen vom Grade 0 und -2.

Für die ersteren gelten statt der angegebenen Sätze die für algebraische Functionen geltenden bekannten Sätze, für die eigentlich automorphen Formen vom Grade -2 modificiren sich die für uneigentlich automorphe Formen gemachten Angaben folgendermassen:

Es giebt p (statt $(p-1)$) *linear unabhängige ganze eigentlich automorphe Formen vom Grade -2.*

Die Mindestanzahl wirklicher Unendlichkeitsstellen ist 2 (statt 1).

Auf $R = -1$ will ich nicht näher eingehen.

§ 23.

Die automorphen Elementarformen.

Auch die auf den Sätzen über die Unendlichkeitsstellen beruhende Theorie der Elementarformen muss sich von den multiplicativen auf die automorphen Formen übertragen lassen.

Es sei $F(\zeta_1, \zeta_2)$ eine Form eines Systems automorpher Formen vom Grade R und den Multiplicatoren $\varrho_\varkappa$, $U(z_1, z_2)$ eine Form des zugehörigen Systems unverzweigter multiplicativer Formen, so dass

$$F(\zeta_1, \zeta_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{\frac{s_i}{l_i}} \cdot U(z_1, z_2)$$

ist. Es bedeute σ die Anzahl linear unabhängiger ganzer Formen in dem System der $F(\xi_1, \xi_2)$ bezw. der $U(z_1, z_2)$, σ' dieselbe Anzahl für das reciproke System.

Dann definire ich:

Unter den ganzen Elementarformen $f_\mu(z_1, z_2)$ $(\mu = 1, 2, \ldots \sigma)$ *des Systems der* $F(\xi_1, \xi_2)$ *verstehe ich irgend* σ *linear unabhängige ganze Formen des Systems.*

Unter einer gebrochenen Elementarform $\Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ *des Systems verstehe ich eine zum System gehörige automorphe Form von* ξ_1, ξ_2, *welche nur an* σ' *allgemein gelegenen festen Stellen* $\eta', \eta'', \ldots \eta^{|\sigma'|}$ *und an einer variablen Stelle* ξ *des Fundamentalbereichs je einfach unendlich wird, und zwar an der variablen Stelle mit dem Coefficienten* $+1$.

Diese „automorphen Elementarformen" des Systems der $F(\xi_1, \xi_2)$ lassen sich in sehr einfacher Weise durch die früher besprochenen „multiplicativen Elementarformen" des System der $U(z_1, z_2)$ ausdrücken. Es seien $u_\mu(z_1, z_2)$ $(\mu = 1, 2, \ldots \sigma)$ die σ ganzen, $U(z_1, z_2; x_1, x_2)$ die gebrochene Elementarform des Systems der $U(z_1, z_2)$. Dann hat man den einfachen Satz:

Die ganzen automorphen Elementarformen heissen:

$$f_\mu(\xi_1, \xi_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot u_\mu(z_1, z_2),$$

die gebrochene automorphe Elementarform:

$$\Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2) = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot \overline{P}(x e_i)^{\frac{\varepsilon_i'}{l_i}} \cdot U(z_1, z_2; x_1, x_2),$$

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{\varepsilon_i'}{l_i} = 1 - \frac{1}{l_i}\right).$$

Dass die Formen $f_\mu(\xi_1, \xi_2)$ in der That σ linear unabhängige ganze automorphe Formen sind, folgt unmittelbar aus der Definition.

Ebenso ist unmittelbar klar, dass $\Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ eine automorphe Form von ξ_1, ξ_2 vom Grade R und den Multiplicatoren $\varrho_\varkappa$ ist, und dass es an den festen Stellen $\eta', \eta'', \ldots \eta^{|\sigma'|}$ und der variablen Stelle ξ, welche den Unendlichkeitsstellen $y', y'', \ldots y^{|\sigma'|}$ und x der Form $U(z_1, z_2; x_1, x_2)$ entsprechen, je einfach unendlich wird.

Es ist noch zu beweisen, dass $\Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ an der variablen Unendlichkeitsstelle ξ in der That als Form von ξ_1, ξ_2 den Coefficienten 1 besitzt. Dies geschieht folgendermassen:

An der Stelle x verhält sich

$$U(z_1, z_2; x_1, x_2) \quad \text{wie} \quad +1 \cdot \left(\frac{\overline{P}(zy)}{\overline{P}(xy)}\right)^{\delta+1} \overline{P}(zx)^{-1},$$

also, wegen $\frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{\varepsilon_i'}{l_i} = 1 - \frac{1}{l_i}$,

$$\prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(z\,e_i)^{\frac{s_i}{l_i}}\,\overline{P}(x e_i)^{\frac{s_i'}{l_i}} \cdot U(z_1, z_2; x_1, x_2)$$

wie

$$\prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(x e_i)^{1-\frac{1}{l_i}} \cdot \left(\frac{\overline{P}(z\,y)}{\overline{P}(x\,y)}\right)^{Rq+1} \cdot \overline{P}(z\,x)^{-1}.$$

Nun verhält sich aber

$$(\xi\xi) \quad \text{wie} \quad \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(x e_i)^{-\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot \left(\frac{\overline{P}(z\,y)}{\overline{P}(x\,y)}\right)^{q-1} \cdot \overline{P}(z\,x)^{+1},$$

und also

$$\Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2) \quad \text{wie} \quad +1 \cdot \left(\frac{(\xi\,\eta)}{(\xi\,\eta)}\right)^{R+1} \cdot (\xi\xi)^{-1}.$$

Damit ist bewiesen, dass die dargestellte Form allen Forderungen der Definition genügt. Umgekehrt sieht man leicht, dass wenn $\Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ der allgemeinen Definition der automorphen Elementarform genügt, dass dann auch $U(z_1, z_2; x_1, x_2)$ der Definition der multiplicativen Elementarform genau entspricht. Es ist daher die dargestellte Form nicht nur immer eine automorphe Elementarform, sondern auch die allgemeinste automorphe Elementarform.

Es lassen sich folgende weitern Eigenschaften der automorphen Elementarform ebensowohl aus der unmittelbaren Definition, wie aus den entsprechenden Eigenschaften der multiplicativen Elementarform $U(z_1, z_2; x_1, x_2)$ ableiten; ich will mich bei dieser Ableitung, welche keine Schwierigkeiten bietet, nicht aufhalten, und nur die Sätze selbst zusammenstellen:

Die Elementarform ist, wenn sie im ersten Argumentpaar ξ_1, ξ_2 den Grad R besitzt, im zweiten Argumentpaar vom Grade der reciproken automorphen Formen:.

$$R' = -R - 2.$$

Sie wird als Form von ξ_1, ξ_2 an der Stelle ξ des Fundamentalbereichs mit den Coefficienten $+1$, an den congruenten Stellen $\xi^{(\varkappa)}$ mit den Coefficienten $\varrho_\varkappa$ unendlich, als Form von ξ_1, ξ_2 dagegen an der Stelle ζ des Fundamentalbereichs mit dem Coefficienten -1, an den congruenten Stellen $\zeta^{(\varkappa)}$ mit den Coefficienten $-\varrho_\varkappa^{-1}$.

Sie genügt als Form ihres ersten, bezw. ihres zweiten Argumentpaares den Functionalgleichungen:

$$\Delta(\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}; \xi_1, \xi_2) - \varrho_\varkappa\, \Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2) = 0,$$

$$\Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}) - \varrho_\varkappa^{-1}\, \Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma} H_\mu^{(\varkappa)}(\xi_1, \xi_2) \cdot f_\mu(\xi_1, \xi_2),$$

worin übrigens die Formen $H_\mu^{(\varkappa)}(\xi_1, \xi_2)$ nicht mit den Formen $H_\mu^{(\varkappa)}(x_1, x_2)$ auf Seite 329 identisch sind, sondern sich von ihnen um den Factor

$$\varrho_\varkappa^{-1} \cdot r_\varkappa \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \overline{P}(x e_i)^{\frac{e_i'}{l_i}}$$

unterscheiden, unter $r_\varkappa$ den Multiplicator verstanden, den die Formen $U(z_1, z_2)$ längs des betreffenden geschlossenen Umlaufs von z_1, z_2 erhalten.

Die automorphe Elementarform dient in gleicher Weise zur Darstellung der Formen $F(\xi_1, \xi_2)$ wie der Formen $F'(\xi_1, \xi_2)$ des reciproken Systems:

$$F(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma} A_\nu \Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1^{|\nu|}, \xi_2^{|\nu|}) + \sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma} B_\mu f_\mu(\xi_1, \xi_2),$$

$$F'(\xi_1, \xi_2) = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma'} A_\nu' \Delta(\xi_1^{|\nu|}, \xi_2^{|\nu|}; \xi_1, \xi_2) + \sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma'} B_\mu' f_\mu'(\xi_1, \xi_2).$$

Ferner gelten alle über die Beziehung der Elementarformen erster und zweiter Art bei den multiplicativen Formen ausgesprochenen Sätze in ganz gleicher Weise für die automorphen Elementarformen.

Obwohl ich auf die Darstellungen durch Poincaré'sche Reihen in dieser Arbeit principiell nicht eingehe, so muss ich doch hinzufügen, dass diejenigen Elementarformen, welche sich durch solche Reihen darstellen lassen, zwar unter den obigen Formeln enthalten, doch sicher nicht die allgemeinsten Elementarformen sind.

Denn abgesehen davon, dass man durch Poincaré'sche Reihen nur solche Elementarformen darstellen kann, deren Grad in ξ_1, ξ_2 eine hinreichend grosse negative Zahl ist, so wird doch die Poincaré'sche Reihe

$$\sum \varrho_\varkappa^{-1} \frac{\mathrm{Rat}_{R+1}(\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)})}{(\zeta^{(\varkappa)} \xi) \, \mathrm{Rat}_{R+1}(\xi_1, \xi_2)} \cdot$$

als Form von ξ_1, ξ_2 ausser an den periodisch gelegenen Stellen $\zeta^{(\varkappa)}$ nur noch an einer endlichen Zahl von Stellen der ζ-Ebene unendlich. Dies ist aber bei der allgemeinsten Elementarform durchaus nicht nothwendig der Fall, wie das Beispiel der normirten Elementarformen zeigt, welche noch an σ Systemen von unendlich vielen periodisch gelegenen Stellen unendlich werden. Um die auch als Function ihrer Unendlichkeitsstelle allgemeinste Elementarform zu bekommen, müsste man zur Bildung der Poincaré'schen Reihen auch transcendente Formen heranziehen.

Aber ich behaupte:

Die Integrale zweiter Gattung sind, falls die Poincaré'schen Reihen vom Grade — 2 convergiren, sicher immer durch Poincaré'sche Reihen darstellbar.

Es ist dann nämlich

$$J_\zeta^{\xi,\eta} = A(\overset{-2}{\widehat{\xi_1, \xi_2}};\ \overset{0}{\widehat{\xi_1, \xi_2}}) = \sum_x \frac{(\xi\eta)}{(\zeta^{(x)}\xi)(\zeta^{(x)}\eta)}$$

wo die Summation über alle mit ζ congruenten Stellen $\zeta^{(x)}$ zu erstrecken ist, das gewünschte Integral.

In der That zeigt man, dass die Differenz

$$A(\xi_1, \xi_2;\ \xi_1^{(\lambda)}, \xi_2^{(\lambda)}) - A(\xi_1, \xi_2;\ \xi_1, \xi_2)$$

von ξ_1, ξ_2 unabhängig ist. Es ist nämlich

$$A(\xi_1, \xi_2;\ \xi_1^{(\lambda)}, \xi_2^{(\lambda)}) = \sum_x \frac{(\xi^{(\lambda)}\eta)}{(\zeta^{(x)}\xi^{(\lambda)})(\zeta^{(x)}\eta)} = \sum \frac{(\xi\eta^{(-\lambda)})}{(\zeta^{(x,-\lambda)}\xi)(\zeta^{(x,-\lambda)}\eta^{(-\lambda)})}$$

$$= \sum_x \frac{(\xi\eta^{(-\lambda)})}{(\zeta^{(x)}\xi)(\zeta^{(x)}\eta^{(-\lambda)})}$$

und also

$$A(\xi_1, \xi_2;\ \xi_1^{(\lambda)}, \xi_2^{(\lambda)}) - A(\xi_1, \xi_2;\ \xi_1, \xi_2 = \sum_x \frac{(\xi\eta)(\zeta^{(x)}\eta^{(-\lambda)}) - (\xi\eta^{(-\lambda)})(\zeta^{(x)}\eta)}{(\zeta^{(x)}\xi)(\zeta^{(x)}\eta)(\zeta^{(x)}\eta^{(-\lambda)})}$$

$$= \sum_x \frac{(\eta^{(-\lambda)}\eta)}{(\zeta^{(x)}\eta)(\zeta^{(x)}\eta^{(-\lambda)})}.$$

Hierin kommt in der That ξ_1, ξ_2 nicht mehr vor, und die Functionen $H_{(\mu}^{x)}(\xi_1, \xi_2)$ müssen sich also auf Constanten reduciren, so dass die Elementarform wirklich ein Integral zweiter Gattung ist.

Herr W. Burnside*) hat die vorstehende Reihe für eine specielle Art von Gruppen behandelt, nämlich für die Fundamentalbereiche ohne singuläre Ecken, bei denen sich die Substitutionen A_x auf geschlossene Umläufe in der ζ-Ebene reduciren (wie in Fig. 13).

Die Folge davon ist dass die dargestellte Reihe im Falle der Convergenz, weil in der ξ-Ebene eindeutig, ein *normirtes Integral zweiter Gattung*, seine Perioden also die *normirten* φ-*Formen* und deren Integrale die *Normalintegrale erster Gattung* sind. Diese hier aus den allgemeinen Principien folgenden Resultate werden dort im Einzelnen aus der Reihendarstellung hergeleitet.

Ich bemerke hier zugleich, dass man in analoger Weise die Appell'schen Integrale 2. Gattung durch Poincaré'sche Reihen als Elementarformen zweiter Art darstellen kann, wofern nur die Reihen vom Grade — 2 für das betreffende Multiplicatorsystem convergiren.

*) W. Burnside: On a class of automorphic functions. Proceed. of the London Math. Society Vol. XXIII, Nos 433—435. 1892.

Schlussbemerkung.

Nachdem ich nunmehr die Aufgabe, die ich mir in meiner Arbeit in Bd. 41 dieser Annalen gestellt hatte, nämlich die glänzenden Entdeckungen Herrn Poincaré's im Gebiete der automorphen Functionen, diese unendliche Fülle neuer Sätze und mannigfaltigster Beziehungen, von einem allgemeinern Standpunkte aus zu überblicken, als es der specielle Ausgang von den Poincaré'schen Reihendarstellungen gestattete, zu einem ersten gewissen Abschluss gebracht habe, sei es mir gestattet, mit einigen wenigen Worten das Verhältniss meiner Ausführungen zu den Untersuchungen des französischen Meisters zu beleuchten.

Ein wesentlicher Unterschied liegt darin, dass ich im Sinne der von Herrn Klein in Bd. 21 der Math. Ann. entwickelten Ideen die Existenz der automorphen Functionen statt auf die Poincaré'schen Reihendarstellungen ganz allgemein auf die functionentheoretischen an Riemann anknüpfenden Methoden von Schwarz und Neumann gründe.

Der Uebergang Poincarés von den automorphen Functionen zu den Θ-Functionen leitete mich von den automorphen Functionen zu den automorphen Formen, indem ich hierin dem von Herrn Klein im Schlusskapitel von Bd. I der Modulfunctionen ausgesprochenen und in seiner Vorlesung vom W. S. 1890/91 genauer dargelegten Gedankengang folgte. Dabei fand ich, dass die Poincaré'schen Θ-Functionen, eben die automorphen Formen, in zweifacher Hinsicht einer Verallgemeinerung fähig waren: ich betrachtete auch multiplicativ automorphe Formen, und auch solche von ungeradzahligem Grade.

Wie man nun die automorphen Functionen als algebraische Functionen auf einer geschlossenen Riemann'schen Fläche darstellen und überschauen kann, so lag es nahe, auch die automorphen Formen als Formen auf einer Riemann'schen Fläche darzustellen, und so ihre Beziehungen zu einander zu erforschen. Dies bot im Falle $p = 0$ nur geringe Schwierigkeiten, und ist von mir in Math. Ann. Bd. 41 ausgeführt worden. Für höheres Geschlecht war die Idee, überhaupt Formen auf Riemann'schen Flächen zu betrachten, zuerst von Klein in Math. Ann. 36 eingeführt worden; derselbe Gedanke durchzieht die „Modulfunctionen" von Klein und Fricke, wo denn auch in Bd. II in allerdings particulärer Form der Versuch gemacht wird, die Modulformen mit den Formen auf der Riemann'schen Fläche in Beziehung zu setzen. Aber alle diese vorliegenden Ausführungen genügten für meine Zwecke noch nicht, wesentlich aus dem Grunde, weil in ihnen in Folge einer Anlehnung an die bekannte Theorie der ganzen algebraischen Functionen die algebraischen Formen eine unzweckmässige Sonderstellung einnehmen und das ganze Interesse absorbiren. Für die Theorie der automorphen Formen war es vielmehr nöthig, auf

der in Math. Ann. 36 von Klein gegebenen Grundlage eine allgemeine Theorie der *multiplicativen Formen* auf einer Riemann'schen Fläche zu schaffen, die den zweiten Theil der vorliegenden Arbeit bildet. Aber so sehr sich diese Theorie nun selbständig gestaltet hat, so ist es doch immer die Rücksicht auf die Poincaré'sche Theorie der automorphen Functionen gewesen, die mir als Leitfaden in der Aufstellung meiner Sätze gedient hat. Gerade für die interessantesten und fruchtbarsten Begriffsbestimmungen über die multiplicativen Formen, für den Begriff der reciproken Formen, für den verallgemeinerten Riemann-Roch'schen Satz, für die Elementarformen fand ich die ersten Ansätze, wenn auch zum Theil versteckt und sehr specialisirt, in den Poincaré'schen Betrachtungen vor. Wenn jetzt die allgemeine Theorie der multiplicativen Formen mit Nothwendigkeit zu jenen Sätzen führt und sie bequem zu überschauen gestattet, so gehörte zweifellos ein um so grösserer Scharfsinn Herrn Poincaré's dazu, dieselben schon in der speciellen Form, wie sie sich ihm darstellen mussten, versteckt unter verhüllenden Besonderheiten seiner Darstellungsweise, richtig herauszufinden und zu seinen Zwecken zu verwerthen.

Wenn in meiner Darstellung die Poincaré'schen Reihen ganz zurücktreten, so ist das eine natürliche Folge meines allgemeinen Ausgangspunktes. Es ist selbstverständlich, dass für die Beziehungen der Functionen und Formen eines bestimmten Bereiches zu einander die besondere Art der expliciten Darstellung unwesentlich ist. Dagegen bleibt der besondern Betrachtung dieser Reihen ein weites, noch fast ganz unerforschtes Gebiet nach zwei Richtungen hin offen: Erstens handelt es sich um die Abhängigkeit der automorphen Functionen, und damit der Moduln des algebraischen Gebildes von den Constanten der Gruppe; dazu wird es freilich erst nöthig sein, die Gruppe arithmetisch zu beherrschen, wie man es bei der Modulgruppe längst versteht. Zweitens ist die Abhängigkeit der durch Poincaré'sche Reihen dargestellten Functionen von der Gestalt und den Constanten der zur Reihenbildung benutzten rationalen Formen ein dankenswerthes Feld der Untersuchung. Denn wenn auch Herr Poincaré gezeigt hat, dass man die allgemeinste automorphe Function bezw. Form durch seine Reihen darstellen kann, so gilt das nur, insofern man diese Functionen als Functionen der laufenden Variablen ansieht. Als Functionen der Constanten, z. B. der Unendlichkeitsstellen, haben die Poincaré'schen Reihen einen ganz speciellen Charakter, der wohl verdient, noch näher untersucht zu werden; ich erinnere nur an das Beispiel der durch Poincaré'sche Reihen definirten Elementarformen vom Grade -2, welche als Function ihrer Unendlichkeitsstelle Integrale zweiter Gattung sind.

Für derartige, die Poincaré'schen Reihen speciell betreffende Untersuchungen hoffe ich, wie ich schon in der Einleitung aussprach, den Weg einigermassen frei gemacht zu haben, indem ich zunächst alle diejenigen Dinge vorweggenommen habe, welche mit den Reihen als solchen nichts zu thun haben.

Waltershausen in Thüringen, Ende Juli 1893.

Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde.

Von

Franz London in Breslau.

Die trilineare Beziehung dreier einstufiger Grundgebilde ist schon wiederholt Gegenstand der Untersuchungen der Geometer gewesen. Zum ersten Male wurde die genannte Beziehung von Herrn August verwendet, der in seiner Dissertation 3 trilinear — oder, wie er sich ausdrückt, duploprojectiv — bezogene Ebenenbüschel zur Erzeugung der Flächen III. O. benützte und auf diese Entstehungsart die Theorie der 27 Graden der Fläche gründete*). Von Herrn Rosanes wurde sodann, gelegentlich einer Untersuchung über abhängige Punktsysteme, die trilineare Verwandtschaft, wenn auch nur beiläufig, behandelt, und wesentliche Eigenschaften derselben zuerst abgeleitet**). Die erste systematische Behandlung unserer Beziehung verdankt man Herrn Schubert, welcher zuerst diese Beziehung „als ein neues Forschungsmittel der synthetischen Geometrie" betrachtete***), und auch seine Methoden der abzählenden Geometrie zur Bestimmung der auftretenden Anzahlen verwandte†). Ziemlich gleichzeitig fällt der Beginn einer grösseren Reihe von Untersuchungen von Herrn Le Paige — zum Theil in Gemeinschaft mit Herrn Folie —††), welche zumeist die invarianten-

*) cf. August: Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis. Diss. inaug. Berol. 1862.

**) cf. Rosanes: Ueber linear-abhängige Punktsysteme (1879) Crelle's Journ. Bd. 88.

***) cf. Schubert: Die trilineare Beziehung zwischen 3 einstufigen Grundgebilden (1880) Math. Ann. Bd. 17.

†) cf. Schubert: Lösung des auf die trilineare Beziehung ausgedehnten Projectivitätsproblems. Hamburg 1882.

††) Von den zahlreichen Arbeiten von Le Paige über diesen Gegenstand, welche in den Schriften der verschiedensten Akademien und anderer gelehrten Gesellschaften sich vorfinden, seien hier nur die beiden zusammenfassenden Arbeiten erwähnt: Essais de géom. supér. du IIIième ordre, Mém. de la société roy. des sciences de Liège II Ser. Tome X 1883; sowie: Le Paige et M. F. Folie: Mémoire

theoretische Untersuchung der trilinearen Formen, aber auch wichtige geometrische Anwendungen zum Gegenstand haben. In neuerer Zeit hat Herr G. Hauck*), welcher sich mit der trilinearen Beziehung ebener Systeme, namentlich für die Zwecke der darstellenden Geometrie, beschäftigte, auch der trilinearen Beziehung dreier einstufiger Grundgebilde eine Arbeit gewidmet.

In den nachfolgenden Untersuchungen wird versucht, tiefer in die *Natur der zweifachen Mannigfaltigkeit* von Tripeln trilinear entsprechender Elemente, welche Mannigfaltigkeit wir als „*Tripelfeld*" bezeichnen, einzudringen, und besonders deren Beziehungen zu den *einfachen* Tripelmannigfaltigkeiten, *den Tripelreihen*, aufzudecken. Nachdem im ersten Paragraphen die wichtigsten Grundeigenschaften der trilinearen Beziehung zusammengestellt wurden, ist der zweite der Beziehung des Tripelfeldes zu den einfachsten Tripelreihen, den sogenannten *unicursalen Tripelreihen*, welche von den Tripeln entsprechender Elemente dreier projectiver Grundgebilde gebildet werden, gewidmet und die bemerkenswerthe Theorie der in einem Tripelfelde enthaltenen unicursalen Tripelreihen entwickelt. Im dritten Abschnitt sind die wichtigsten Constructionen des Tripelfeldes geleistet, vor allem die aus 7 gegebenen Tripeln, welche auf die einfachsten Constructionen der Projectivität zurückgeführt werden. Der letzte Paragraph behandelt als Anwendung der vorangeschickten Theorie die Erzeugnisse dreier trilinearer Ebenenbüschel; es wird gezeigt, dass dieselben — je nach der Lage ihrer Axen, oder der speciellen Beschaffenheit der trilinearen Beziehung — alle Arten von Flächen III. O., die allgemeinen, sowie die mit 1, 2, 3, 4 Doppelpunkten, die Regelflächen und Kegel III. O. erzeugen; auch die reduciblen Flächen III O. finden auf diese Weise ihre Entstehung, so dass man auch zu einer sehr verwendbaren Erzeugung der Fläche II. O., sowie einer directen Construction derselben aus 9 ihrer Punkte geführt wird. Eine demnächst folgende Untersuchung wird diejenigen Tripelreihen zum Gegenstand haben, welche aus den gemeinsamen Tripeln zweier Tripelfelder bestehen, und welche in der Theorie der ebenen, wie räumlichen elliptischen Curven eine grundlegende Rolle spielen.

---

sur les courbes de troisième ordre, Mém. de l'acad. roy. de Belg. Tome 43 u. 45, wo sich auch weitere Citate über die sonstigen Untersuchungen des Verf. über diesen Gegenstand vorfinden.

*) cf. Hauck: Die trilineare Beziehung zwischen 3 einstufigen Grundgebilden, Crelle's Journ. Bd. 108.

§ 1.

Die singulären Elemente und die Abbildung des Tripelfeldes.

1) Wir bezeichnen durch Ξ, H, Z drei einstufige Grundgebilde (gerade Punktreihen, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel) und durch ξ die Elemente von Ξ, durch η, ζ die von rsp. H, Z; in jedem der 3 Grundgebilde sei ein binäres Coordinatensystem gewählt, und seien ξ_1, ξ_2; η_1, η_2; ζ_1, ζ_2 die homogenen Coordinaten von resp. ξ, η, ζ. Wählt man aus jedem der 3 Grundgebilde je ein Element ξ, η, ζ, so sollen 3 solche Elemente *ein Tripel* genannt werden; die Gesammtheit aller Tripel bildet *eine dreifache Mannigfaltigkeit*. Besteht zwischen den 3 Variablensystemen ξ_1, ξ_2; η_1, η_2; ζ_1, ζ_2 eine homogene *trilineare* — d. h. in jedem der *drei* Variablensysteme *lineare* — Gleichung:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{ikl} a_{ikl}\xi_i\eta_k\zeta_l = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2),$$

so giebt es eine zweifache Mannigfaltigkeit von Tripeln ξ, η, ζ, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen. Durch die trilineare Gleichung wird also zwischen den Elementen der 3 Grundgebilde eine Beziehung constituirt, welche man nach Herrn Schubert*) als *„trilineare Beziehung dreier einstufiger Grundgebilde"* oder nach Herrn Le Paige**) als *„Homographie dritter Ordnung zweiten Ranges"* zu bezeichnen pflegt. Je 3 Elemente ξ, η, ζ, welche in dieser Beziehung einander entsprechen, sollen ein Tripel entsprechender Elemente, oder kürzer, da ihre Coordinaten die trilineare Form $f(\xi, \eta, \zeta)$ annulliren, ein *Nulltripel****) der trilinearen Verwandtschaft bilden. Die Gesammtheit der ∞^2 Nulltripel einer trilinearen Verwandtschaft soll *ein Tripelfeld* genannt und durch F_T bezeichnet werden. Zwei beliebige Elemente auf zwei der drei Grundgebilde werden durch ein eindeutig bestimmtes Element des dritten Grundgebildes zu einem Tripel des Tripelfeldes F_T ergänzt. Zu einem beliebigen Elemente gehört also eine einfache Mannigfaltigkeit von Elementepaaren, welche dasselbe zu einem Tripel von F_T ergänzen; diese Elementepaare bilden entsprechende Elemente *projectiver* Grundgebilde, da ihre Coordinaten einer binären bilinearen Gleichung genügen. Also gilt: *Jedem Elemente eines der drei Grundgebilde wird durch die trilineare Verwandtschaft eine projective Beziehung der beiden andern Grundgebilde*

*) cf. Schubert: Die trilineare Beziehung zwischen 3 einstufigen Grundgebilden, Math. Ann. Bd. XVII, p. 457—472.

**) cf. Le Paige: Essais de géométrie supérieure du troisième ordre. Mém. de la soc. roy. de Liège II Sér. Tome X. 1883.

***) cf. Rosanes: Cr. Journ. Bd. 88, p. 289.

zugeordnet, deren Paare entsprechender Elemente gebildet werden durch die Paare, welche das in Rede stehende Element zu einem Nulltripel ergänzen.

Ist P_ξ die dem Elemente ξ zugeordnete Projectivität, so bildet die Gesammtheit der Projectivitäten P_ξ, welche den einzelnen Elementen ξ von Ξ zugehören, ein lineares System 1ter Stufe, *einen Büschel. Durch die trilineare Beziehung werden demnach die Elemente eines jeden der* 3 *Grundgebilde projectivisch bezogen auf die Elemente eines Projectivitätenbüschels.*

Ordnet man die Elemente des einen Grundgebildes projectiv zu den Projectivitäten eines Büschels, dessen Träger die beiden andern Grundgebilde sind, so bilden die ∞^2 Tripel, welche von einem Elemente des ersten Grundgebildes und einem Paare entsprechender Elemente der diesem zugeordneten Projectivität gebildet werden, ein Tripelfeld. Auf diese Weise lässt sich rein geometrisch jedes Tripelfeld erzeugen.

2) Sind 2 Tripelfelder F_T und F_T' gegeben durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i,k,l} a_{ikl}\, \xi_i \eta_k \zeta_l = 0, \\ f'(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i,k,l} a'_{ikl}\, \xi_i \eta_k \zeta_l = 0 \end{aligned}\right\} (i, k, l = 1, 2),$$

so besitzen diese eine einfache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Tripel; jedes dieser Tripel ist auch jedem Tripelfelde des Büschels $kf + k'f' = 0$ angehörig. Jedes Element eines der 3 Grundgebilde z. B. ξ von Ξ wird durch 2 Elementepaare $\eta'\zeta'$, $\eta''\zeta''$ zu einem gemeinsamen Tripel von F_T und F_T' ergänzt, nämlich durch diejenigen beiden Elementepaare, welche den beiden Projectivitäten P_ξ und P_ξ' gemeinsam sind, welche dem Elemente ξ in F_T und F_T' entsprechen. Eine einfache Mannigfaltigkeit von Tripeln soll fortan *„eine Tripelreihe"* heissen. Die von den gemeinsamen Tripeln von F_T und F_T' gebildete Tripelreihe ist so beschaffen, dass jedes Element durch *zwei* Elementepaare zu einem Tripel der Tripelreihe ergänzt wird; durchläuft also z. B. ξ das zugehörige Grundgebilde Ξ, so durchlaufen die Elementepaare η, ζ, welche mit ξ zusammen ein gemeinsames Tripel von F_T und F_T' bilden, die beiden zugehörigen Grundgebilde H, Z *zweimal;* aus diesem Grunde wollen wir *die Gesammtheit der gemeinsamen Tripel zweier Tripelfelder* als *bicursale Tripelreihe* bezeichnen, und einer solchen das Zeichen R_T^2 beilegen. Durch das Attribut *„bicursal"* bezeichnen wir die Eigenschaft, dass jedes Element durch *zwei* Elementenpaare zu einem Tripel der Tripelreihe ergänzt wird. Bei einer *unicursalen Tripelreihe* (bezeichnet durch R_T^1) wird demnach jedes Element nur durch ein

einziges Paar zu einem Tripel ergänzt werden; dies tritt ein bei den Tripeln entsprechender Elemente dreier projectiv bezogener Grundgebilde, und — wie man leicht erkennt — nur bei diesen; wir definiren demnach: *Unter einer unicursalen Tripelreihe* (R_T^1) *verstehen wir die Gesammtheit der Tripel entsprechender Elemente dreier projectiver einstufiger Grundgebilde.*

Durch 3 *Tripel ist eine* R_T^1 *eindeutig bestimmt. Eine* R_T^2 *ist durch* 6 *Tripel eindeutig bestimmt. Ein Tripelfeld* F_T *ist durch* 7 *Tripel eindeutig bestimmt*, denn die Gleichung von F_T enthält 8 homogene Coefficienten, welche durch 7 Tripel eindeutig bestimmt werden; durch 6 Tripel wird ein Büschel von F_T bestimmt, dessen gemeinsame Tripel eine R_T^1 bilden, die also ebenfalls durch die 6 Tripel bestimmt wird. Dabei sind die Tripel linear-unabhängig vorausgesetzt; die dazu nothwendigen und hinreichenden Bedingungen werden später angegeben werden.

3) Durch die trilineare Beziehung $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ werde das Tripelfeld F_T dargestellt; dann wird jedem Elemente ξ von Ξ eine Projectivität P_ξ nach dem Vorigen zugeordnet. Alle diese Projectivitäten P_ξ bilden einen Büschel; in diesem Projectivitätenbüschel existiren zwei ausgeartete Individuen, welche den Elementen α_1, α_2 von Ξ zugehören mögen, und die daher durch P_{α_1}, P_{α_2} zu bezeichnen sind. Die Ausartung von P_{α_1} besteht darin, dass 2 Elemente, (β_2 in H), (γ_2 in Z) existiren, deren entsprechende Elemente in Bezug auf P_{α_1} unbestimmt werden, während den übrigen Elementen von H das Element γ_2, den übrigen Elementen von Z das Element β_2 in Bezug auf P_{α_1} entspricht. Analytisch äussert sich die Degeneration von P_{α_1} darin, dass die bilineare Gleichung von $P_{\alpha_1}: f(\alpha_1 \eta \zeta) = 0$ eine verschwindende Determinante besitzt, daher ihre linke Seite das Product zweier linearer Factoren wird. Analoges gilt für P_{α_2}; die Elemente, deren entsprechende Elemente in Bezug auf P_{α_2} unbestimmt werden, seien β_1 (in H) und γ_1 (in Z). Gleichzeitig haben die 4 Elemente β_1, γ_1; β_2, γ_2 bekanntlich noch die weitere ausgezeichnete Eigenschaft, dass die beiden Paare β_1, γ_2; β_2, γ_1 gemeinsame Paare aller Projectivitäten P_ξ des Büschels sind. Wir bezeichnen diejenigen Elemente, deren zugeordnete Projectivität degenerirt, als *die singulären Elemente* von F_T. Nach dem vorigen *existiren auf jedem der* 3 *Grundgebilde zwei singuläre Elemente von* F_T. Die auf Ξ befindlichen singulären Elemente waren α_1, α_2; auf H und Z sind es offenbar die oben durch β_1, β_2; γ_1, γ_2 bezeichneten Elemente; denn β_1 z. B. ist singulär, da die zugehörige Projectivität P_{β_1} degenerirt, indem $\beta_1 \gamma_2$ gemeinsames Paar aller Projectivitäten P_ξ ist, und daher in P_{β_1} dem Element γ_2 alle Elemente ξ von Ξ entsprechen. In den 6 Elementen α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 besitzen wir also bereits die sämmtlichen singulären Elemente. —

Zwei singuläre Elemente auf verschiedenen Grundgebilden mit verschiedenem Index z. B. α_1, β_2 werden durch jedes beliebige Element ζ von Z zu einem Tripel von F_T ergänzt, da $\beta_2\zeta$ ein Paar von P_{α_1} bildet, also $\alpha_1\beta_2\zeta$ für jedes ζ ein Tripel von F_T ist.

Wir nennen 2 Elemente, für welche dasjenige Element, welches sie zu einem Tripel von F_T ergänzt, unbestimmt wird, ein *singuläres Paar* von F_T. *Zwei singuläre Elemente auf verschiedenen Grundgebilden mit verschiedenem unteren Index bilden ein singuläres Paar.* Andern singuläre Paare giebt es offenbar nicht, so dass wir in $\alpha_1\beta_2$, $\beta_1\gamma_2$, $\gamma_1\alpha_2$; $\alpha_2\beta_1$, $\beta_2\gamma_1$, $\gamma_2\alpha_1$ sämmtliche singuläre Paare besitzen. Also gilt: *Jedes Tripelfeld besitzt* 6 *singuläre Paare.*

Zwei Tripelfelder, welche die 6 *singulären Elemente und ein beliebiges Tripel gemein haben, sind identisch.* Denn 2 solche Tripelfelder besitzen 7 gemeinsame Tripel, da die 6 gemeinsamen singulären Elemente 6 gemeinsame Tripel involviren, nämlich:

$$\alpha_1\beta_2\gamma_1,\ \beta_1\gamma_2\alpha_1,\ \gamma_1\alpha_2\beta_1;\quad \alpha_2\beta_1\gamma_2,\ \beta_2\gamma_1\alpha_2,\ \gamma_2\alpha_1\beta_2.$$

— Aus der von uns gegebenen geometrischen Definition der singulären Elemente ergiebt sich unmittelbar die wichtige Darstellung der trilinearen Form:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = k_1(\alpha_1\xi)(\beta_1\eta)(\gamma_1\zeta) + k_2(\alpha_2\xi)(\beta_2\eta)(\gamma_2\zeta),$$

wo:

$$(\alpha_1\xi) = \alpha_{11}\xi_2 - \alpha_{12}\xi_1$$

gesetzt ist, und α_{11}, α_{12} die Coordinaten von α_1 bedeuten.*) —

4) Das singuläre Tripelfeld. Ist das Büschel projectiver Beziehungen, welches den Elementen eines der 3 Grundgebilde zugeordnet ist — z. B. das den Elementen ξ von Ξ zugeordnete Büschel P_ξ — so beschaffen, dass die beiden, allen Projectivitäten des Büschels gemeinsamen Paare entsprechender Elemente — $\beta_1\gamma_2$, $\beta_2\gamma_1$ — zusammenfallen, so existirt nur eine einzige ausgeartete Projectivität in dem Büschel, und daher auf dem dritten Grundgebilde — Ξ — nur ein einziges singuläres Element. In diesem Falle vereinigen sich also α_1 und α_2, aber gleichzeitig auch, wie die Entstehung dieser Singularität lehrt, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2. Es existiren in diesem Falle also nur 3 *singuläre Elemente*, auf jedem Grundgebilde eins; diese 3 singulären Elemente seien mit α, β, γ bezeichnet. Man erkennt unmittelbar, dass irgend 2 der 3 singulären Elemente ein singuläres Paar bilden, so dass in diesem Falle nur 3 *singuläre Paare* vorhanden sind. Das Tripel α, β, γ der 3 singulären Elemente soll *das singuläre Tripel* genannt werden, und die in dieser Weise specialisirte trilineare Be-

*) cf. Le Paige, l. c. p. 19. Schubert, l. c. p. 458ff. Bei Herrn Le Paige findet sich eine ausführliche analytische Behandlung der singulären Elemente. —

ziehung soll als *singulär-trilineare Beziehung*, das von ihren Nulltripeln gebildete Tripelfeld, als *singuläres Tripelfeld* bezeichnet werden.

Eine singulär trilineare Beziehung ist durch das singuläre Tripel und drei weitere Tripel eindeutig bestimmt; denn, da das singuläre Tripel $\alpha\beta\gamma$ vier Nulltripel der Beziehung involviert, nämlich, wenn ξ, η, ζ drei beliebige Elemente von resp. Ξ, H, Z bezeichnen: α, β, γ; β, γ, ξ; γ, α, η; α, β, ζ, so werden durch das singuläre Tripel und 3 weitere Tripel im Ganzen 7 Nulltripel der Beziehung gegeben sein, wodurch dieselbe eindeutig bestimmt ist. Daraus ergiebt sich:

*Zwei singuläre Tripelfelder, welche das singuläre Tripel und drei weitere Tripel gemeinsam haben, sind identisch**). —

5) *Trilineare Grundgebilde in reducirter Lage.* Die einfachste trilineare Beziehung von 3 in derselben Ebene gelegenen geraden Punktreihen wird hervorgerufen durch die Tripel von je 3 Punkten, welche in einer Geraden g liegen. Diese trilineare Beziehung dreier gerader Punktreihen wird von Herrn Schubert**) als *geradlinigte* trilineare Beziehung bezeichnet. —

Die einfachste trilineare Beziehung dreier gerader Punktreihen, deren Träger beliebige Geraden des Raumes sind, wird hervorgerufen durch die Tripel von je 3 Punkten, deren Ebene durch einen gegebenen Punkt des Raumes geht.

Die einfachste trilineare Beziehung dreier in derselben Ebene gelegenen Strahlenbüschel wird gebildet durch die Gesammtheit der Tripel von je drei Strahlen, welche sich in einem Punkte schneiden.

Die einfachste trilineare Beziehung dreier Ebenenbüschel mit beliebig im Raume gelegenen Axen wird erhalten durch die Gesammtheit der Tripel von je 3 Ebenen, deren Schnittpunkt auf einer festen Ebene sich befindet. Drei trilineare Ebenenbüschel von solcher Beschaffenheit nennt Herr August***) in *perspectiver Lage* befindlich.

Wir wollen zusammenfassend 3 einstufige Grundgebilde, deren Elemente durch eine der vier eben charakterisirten einfachsten trilinearen Beziehungen verbunden sind, als *in reducirter Lage* befindlich oder kurz als *reducirt-trilineare Grundgebilde* bezeichnen.

6) *Die Abbildung des Tripelfeldes auf die Punkte eines ebenen Punktfeldes.* Es seien Ξ, H, Z drei trilineare Grundgebilde und es mögen die

---

*) Diese Ausartung des Tripelfeldes wurde zuerst von Herrn Schubert, Math. Ann. Bd. XVII, p. 470, behandelt. Eine ausführliche analytische Behandlung findet sich bei Herrn Le Paige, l. c. sowie in der Arbeit der Herren Folie und Le Paige: Sur les courbes de III ordre, Mémoires de l'académie royale de Belgique 1882. Auch die übrigen Ausartungen des Tripelfeldes sind in den citirten Arbeiten behandelt, weshalb wir hier nur auf diese verweisen.

**) l. c. p. 458.

***) August: Disquisitiones de superfic. II ordinis; Inaug.-Diss. Berlin 1862.

Elemente ξ von Ξ projectiv bezogen sein auf die Elemente ξ' eines neuen einstufigen Grundgebildes Ξ', und ebenso die Elemente von H und Z resp. auf die von H', Z', dann bilden die Tripel ξ', η', ζ', welche den Nulltripeln ξ, η, ζ unserer trilinearen Beziehung in der geschilderten Weise projectivisch zugeordnet sind, ebenfalls die Nulltripel einer trilinearen Beziehung der 3 Grundgebilde Ξ', H', Z', ihre Gesammtheit constituirt, ebenso wie die der Tripel ξ, η, ζ, ein Tripelfeld F_T'. Auf diesem Wege kann man aus jedem Tripelfeld F_T neue Tripelfelder F_T' herleiten; jedem Tripel von F_T entspricht ein Tripel von F_T' und umgekehrt, so dass F_T und F_T' umkehrbar eindeutig auf einander bezogen erscheinen. Wir wollen F_T' das transformirte Tripelfeld von F_T nennen, und wir werden erkennen, dass jedes nicht singuläre Tripelfeld F_T' aus irgend einem solchen F_T durch derartige Transformation erhalten werden kann. Dazu untersuchen wir, ob es möglich ist, ein gegebenes Tripelfeld F_T so zu transformiren, dass das transformirte Tripelfeld sich *in reducirter Lage* befindet. Hier sei nur der folgende Fall ins Auge gefasst, auf den sich alle übrigen reduciren lassen. Gegeben sind 3 trilineare Grundgebilde Ξ, H, Z, deren Tripel entsprechender Elemente das Tripelfeld F_T constituiren, ferner 3 in derselben Ebene gelegene Strahlenbüschel Ξ', H', Z', deren Scheitel resp. $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$ seien, und welche sich in *reducirt-trilinearer* Beziehung befinden, so dass drei Strahlen ξ', η', ζ', welche durch einen Punkt gehen, ein Tripel entsprechender Strahlen bilden; das von allen Strahlentripeln ξ', η', ζ' gebildete Tripelfeld sei durch F_T' bezeichnet. Es sollen die Grundgebilde Ξ, Ξ'; H, H'; Z, Z' in solche projective Beziehung gesetzt werden, dass stets 3 Elementen ξ, η, ζ, welche ein Tripel von F_T bilden, 3 Strahlen ξ', η', ζ' entsprechen, die durch einen Punkt gehen, die also ein Tripel von F_T' bilden. Dann ergiebt sich zunächst, dass irgend einem singulären Element von F_T ein singuläres Element von F_T' zuzuordnen ist. Bezeichnen wir den gemeinsamen Strahl $S_{\eta'}, S_{\xi'}$ der beiden Strahlenbüschel H', Z' als Strahl von H' durch β_1', als Strahl von Z' durch P_2', ebenso $S_{\xi'} S_{\eta'}$ als Strahl von Z' durch γ_1', als Strahl von Ξ' durch α_2', und $S_{\xi'} S_{\eta'}$ als Strahl von Ξ' durch α_1', als Strahl von H' durch β_2', so sind α_1', α_2'; β_1', β_2'; γ_1', γ_2' die 6 singulären Strahlen der 3 in reducirter Lage befindlichen trilinearen Strahlenbüschel Ξ', H', Z'. Sind nun α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 die singulären Elemente von F_T und α, β, γ ein beliebiges Tripel von F_T, α', β', γ' ein solches von F_T', dann beziehen wir die Elemente von Ξ und Ξ', H und H', Z und Z' projectivisch resp. so, dass:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \ldots) \barwedge (\alpha_1', \alpha_2', \alpha', \ldots),$$
$$(\beta_1, \beta_2, \beta, \ldots) \barwedge (\beta_1', \beta_2', \beta', \ldots),$$
$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma, \ldots) \barwedge (\gamma_1', \gamma_2', \gamma', \ldots).$$

Den Elementen ξ, η, ζ eines jeden Tripels von F_T entsprechen dann in Bezug auf diese 3 projectiven Beziehungen 3 Strahlen ξ', η', ζ' derart, dass die Gesammtheit aller dieser Tripel ξ', η', ζ' ein Tripelfeld constituiren, welches mit dem in reducirter Lage befindlichen Tripelfeld F'_T (nach 3)) identisch ist, da beide Tripelfelder die singulären Elemente und ein Tripel α', β', γ' gemeinsam haben. Mithin sind die Grundgebilde Ξ, Ξ'; H, H'; Z, Z' in der gewünschten Weise projectivisch auf einander bezogen, so dass die gegebene trilineare Beziehung in die reducirt-trilineare Beziehung der 3 Strahlenbüschel transformirt ist. Also gilt: *Die Tripel eines jeden Tripelfeldes F_T lassen sich umkehrbar eindeutig transformiren in die Tripel desjenigen Tripelfeldes F'_T, dessen Tripel gebildet werden von je* 3 *Strahlen ξ', η', ζ', welche durch einen Punkt gehen, und rsp. den* 3 *in derselben Ebene gelegenen Strahlenbüscheln Ξ', H', Z' angehören.* Damit ergiebt sich auch unmittelbar, dass irgend 2 nicht singuläre Tripelfelder in einander transformirbar sind. — Ferner folgt, dass jedem Tripel ξ', η', ζ' eindeutig der Schnittpunkt P' dieser 3 Strahlen zugeordnet ist und umgekehrt, so dass die Tripel ξ', η', ζ' umkehrbar eindeutig auf die Punkte P' einer Ebene bezogen sind; nur in den Punkten $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$, den Scheiteln der 3 Strahlenbüschel, hört die Eindeutigkeit der Beziehung auf, da diesen Punkten unendlich viele Tripel entsprechen. Mithin lassen sich auch die Tripel ξ, η, ζ eines beliebigen (nicht singulären). Tripelfeldes F_T umkehrbar eindeutig auf die Punkte P' eines ebenen Punktfeldes abbilden. Ist es gelungen ein Tripelfeld F_T auf diese Weise auf die Punkte einer Ebene abzubilden, so lässt sich unmittelbar die Gesammtheit aller Tripel von F_T construiren und zu jedem Elementenpaar das dritte Element hinzufinden, welches dasselbe zu einem Tripel von F_T ergänzt. —

Jeder Curve der Ebene von Ξ', H', Z' entspricht eine Tripelreihe, welche dem Tripelfelde angehört. Den Punkten der 3 Geraden $S_{\eta'}S_{\xi'}$, $S_{\zeta'}S_{\xi'}$, $S_{\xi'}S_{\eta'}$ entsprechen diejenigen Tripel, welche aus einem der 3 singulären Paare α_1, β_2; β_1, γ_2; γ_1, α_2 und einem beliebigen Elemente des dritten Grundgebildes bestehen. Den Geraden durch einen der 3 Punkte $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$ entsprechen diejenigen Tripelreihen, deren Tripel gebildet werden aus einem Elemente des einen Grundgebildes und denjenigen Elementenpaaren der beiden andern, die dasselbe zu einem Tripel von F_T ergänzen. Die Tripelreihen, welche den anderen Geraden, sowie sonstigen Curven der Ebene entsprechen, werden wir später zu betrachten haben.

7) *Die Abbildung des singulären Tripelfeldes.* Die im Vorigen gezeigte Abbildung der Tripel eines Tripelfeldes F_T auf die Punkte einer Ebene gilt nur für nicht singuläre Tripelfelder, da die 3 reducirt-trilinearen Strahlenbüschel Ξ', H', Z' so lange ihre Scheitel $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$

nicht in gerader Linie liegen, nicht singulär sind. Liegen aber S_ξ, S_η, S_ζ in gerader Linie, so wird nunmehr die zugehörige reducirt-trilineare Beziehung eine singuläre, da die beiden singulären Strahlen in jedem Strahlenbüschel in die Verbindungslinie der 3 Scheitel S_ξ, S_η, S_ζ zusammenfallen; wir wollen diese Verbindungslinie, welche jedem der 3 Strahlenbüschel angehört, als Strahl von Ξ' mit α', als solchen von H', Z' resp. mit β', γ' bezeichnen. Sind Ξ, H, Z 3 zu resp. Ξ', H', Z' projective Grundgebilde; so sind die Tripel ξ, η, ζ, welche den Tripeln ξ', η', ζ' von 3 Strahlen durch einen Punkt P' entsprechen, die Nulltripel einer singulär-trilinearen Beziehung der 3 Grundgebilde Ξ, H, Z; die 3 Elemente α, β, γ, welche resp. den in der Geraden $S_\xi S_\eta S_\zeta$ vereinigten Elementen α', β', γ' entsprechen, bilden das singuläre Tripel dieser Beziehung, so dass wir auf diesem Wege zur Erzeugung singulär-trilinearer Grundgebilde gelangen. Wir fragen nun umgekehrt: Wenn eine beliebige singulär-trilineare Beziehung der 3 Grundgebilde Ξ, H, Z gegeben ist, lassen sich 3 in derselben Ebene gelegene zu resp. Ξ, H, Z projective Strahlenbüschel Ξ', H', Z', deren Scheitel S_ξ, S_η, S_ζ in gerader Linie liegen, auffinden, so dass stets 3 Strahlen ξ', η', ζ', welche einem Nulltripel ξ, η, ζ der singulär-trilinearen Beziehung entsprechen, durch einen Punkt P' ihrer Ebene gehen? Wir nehmen die beiden Strahlenbüschel Ξ', H' mit den Scheiteln S_ξ, S_η beliebig in derselben Ebene an, und bezeichnen durch ξ_1', ξ_2', ξ_3' und η_1', η_2', η_3' je drei beliebige Strahlen von resp. Ξ', H', durch P_1', P_2', P_3' resp. die Schnittpunkte von ξ_1' und η_1', ξ_2' und η_2', ξ_3' und η_3'; zwischen den Elementen von Ξ, Ξ', wie denen von H, H' setzen wir nun je eine beliebige projective Beziehung fest, bei welcher α, α' resp. β, β' Paare entsprechender Elemente sein sollen, wo wieder $\alpha = S_\xi S_\eta$, $\beta = S_\eta S_\xi$ sei. Bezeichnen wir mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 die entsprechenden Elemente von ξ_1', ξ_2', ξ_3', mit η_1, η_2, η_3 die von η_1', η_2', η_3' und seien ζ_1, ζ_2, ζ_3 diejenigen Elemente von Z, welche resp. $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$, $\xi_3\eta_3$ zu einem Tripel der gegebenen singulär-trilinearen Beziehung von Ξ, H, Z ergänzen, so können wir stets *linear* einen Punkt S_ζ auf $S_\xi S_\eta$ so construiren, dass:

$$S_\zeta (S_\xi, P_1', P_2', P_3') \barwedge (\gamma, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3).$$

Ist Z' das Strahlenbüschel, welches S_ζ zum Scheitel hat, und in derselben Ebene, wie Ξ', H', gelegen ist, so beziehen wir die 3 Strahlenbüschel S_ξ, S_η, S_ζ projectivisch auf die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z so, dass:

$$(\alpha', \xi_1', \xi_2', \xi_3', \ldots) \barwedge (\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots),$$
$$(\beta', \eta_1', \eta_2', \eta_3', \ldots) \barwedge (\beta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots),$$
$$(\gamma', \zeta_1', \zeta_2', \zeta_3', \ldots) \barwedge (\gamma, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots),$$

wo $\zeta_1' = S_\zeta P_1'$, $\zeta_2' = S_\zeta P_2'$, $\zeta_3' = S_\zeta P_3'$ gesetzt ist, und $\gamma' = S_\zeta S_\xi$.

Dann bilden die Tripel ξ, η, ζ, welche den Tripeln von 3 Strahlen ξ', η', ζ' durch einen Punkt P' entsprechen, die Nulltripel einer singulären-trilinearen Beziehung, welche mit der gegebenen singulär-trilinearen Beziehung der 3 Geraden Ξ, H, Z das singuläre Tripel α, β, γ und die 3 Tripel ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3 gemein hat, also nach 4) mit ihr identisch ist. Es ergiebt sich also, dass wir jedem Tripel ξ, η, ζ des gegebenen singulären Tripelfeldes ein Strahlentripel ξ', η', ζ' der 3 Strahlenbüschel Ξ', H', Z' zuordnen können, dessen 3 Strahlen sich in einem Punkte P' schneiden. Mithin ist jedem Tripel ξ, η, ζ ein Punkt P' der Ebene zugeordnet und umgekehrt, so dass wir folglich auch die Tripel eines singulären Tripelfeldes auf die Punkte eines ebenen Punktfeldes abbilden können. —

§ 2.

Das Tripelfeld und seine Beziehung zu den unicursalen Tripelreihen.

1) Sind die Elemente von 3 einstufigen Grundgebilden Ξ, H, Z projectivisch auf einander bezogen, so ist jedem Elemente irgend eines der 3 Grundgebilde in jedem der beiden andern Grundgebilde ein bestimmtes Element eindeutig zugeordnet. Die Gesammtheit der Tripel von je 3 derartig zugeordneten Elementen bildet eine einfache Mannigfaltigkeit und wurde von uns (§ 1, 2) als *unicursale Tripelreihe* bezeichnet; wir wollen ihr das Zeichen R_T^1 beilegen.

Durch 3 Tripel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ ist eine unicursale Tripelreihe eindeutig bestimmt, da sich die beiden einem beliebigen Elemente ξ von Ξ entsprechenden Elemente η, ζ aus der Doppelverhältnissgleichheit:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi) \barwedge (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \eta) \barwedge (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \zeta)$$

ergeben.

Wählen wir das Coordinatensystem auf Ξ so, dass die 3 Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rsp. die Coordinaten $1, 0$; $0, 1$; $1, 1$ erhalten und analog für die beiden andern Grundgebilde, so wird R_T^1 dargestellt durch die Gleichungen:

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$$

oder durch die 3 bilinearen Gleichungen:

$$\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1 = 0, \quad \zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1 = 0, \quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0,$$

von denen aber jede eine Folge der beiden anderen ist. —

Seien die 3 Grundgebilde durch die trilineare Gleichung

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl}\xi_i\eta_k\zeta_l = 0$$

in trilineare Beziehung gesetzt, so fragen wir nach den gemeinsamen Tripeln des von den Nulltripeln dieser Beziehung gebildeten Tripelfeldes F_T und einer unicursalen Tripelreihe R_T^1 auf denselben Grundgebilden. Denken wir uns, wie oben das Coordinatensystem gewählt, so dass:

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$$

die Gleichungen von R_T^1 sind, dann erhalten wir die gemeinsamen Tripel von F_T und R_T^1, wenn wir in $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$,

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$$

setzen; dann wird:

$$\sum_{k,l} a_{kl}\, \xi_k \xi_l \xi_l = a_{111}\xi_1^3 + (a_{112}+a_{121}+a_{211})\xi_1^2\xi_2 + (a_{221}+a_{212}+a_{122})\xi_1\xi_2^2 + a_{222}\xi_2^3 = 0.$$

Sind ξ_1', ξ_2'; ξ_1'', ξ_2''; ξ_1''', ξ_2''' die 3 Wurzeln dieser cubischen Gleichung, und ist:

$$\frac{\xi_1'}{\xi_2'} = \frac{\eta_1'}{\eta_2'} = \frac{\zeta_1'}{\zeta_2'};\quad \frac{\xi_1''}{\xi_2''} = \frac{\eta_1''}{\eta_2''} = \frac{\zeta_1''}{\zeta_2''};\quad \frac{\xi_1'''}{\xi_2'''} = \frac{\eta_1'''}{\eta_2'''} = \frac{\zeta_1'''}{\zeta_2'''},$$

dann sind $\xi', \eta' \zeta'$; ξ'', η'', ζ''; $\xi''', \eta''', \zeta'''$ die gemeinsamen Tripel von F_T und R_T^1; die Anzahl derselben ist also im Allgemeinen 3, die jedoch eventuell sämmtlich oder theilweise zusammenfallen können. Also gilt: *Ein Tripelfeld und eine unicursale Tripelreihe haben im Allgemeinen drei gemeinsame Tripel.* Gleichzeitig erkennt man: *Ein Tripelfeld F_T, welches mit einer unicursalen Tripelreihe R_T^1 mehr als drei Tripel gemein hat, enthält alle Tripel von R_T^1*; wir sagen, dass in diesem Falle *die R_T^1 in dem Tripelfeld F_T enthalten ist.* —

2) *Die in einem Tripelfeld enthaltenen unicursalen Tripelreihen.* Wir fragen nunmehr, ob in einem gegebenen Tripelfeld F_T stets unicursale Tripelreihen R_T^1 enthalten sind. Ist R_T^1 in F_T enthalten, so ist jedes Tripel von R_T^1 auch Tripel von F_T. Sind nun, wie früher (cf. § 1, 3), die singulären Elemente von F_T: α_1, α_2; $\beta_1 \cdot \beta_2$; γ_1, γ_2, so dass $\alpha_1\beta_2$, $\beta_1\gamma_2$, $\gamma_1\alpha_2$; $\alpha_2\beta_1$, $\beta_2\gamma_1$, $\gamma_2\alpha_1$ die 6 singulären Paare bilden, so wollen wir dasjenige Elementepaar aus H, Z betrachten, welches mit α_1 zusammen ein Tripel von R_T^1 bildet. Da dieses Paar α_1 auch zu einem Tripel von F_T ergänzt, alle Elementepaare aber, welche mit dem singulären Elemente α_1 ein Tripel von F_T bilden, entweder das Element β_2 oder das Element γ_2 enthalten, so wird demjenigen Tripel von R_T^1, welchem auf Ξ das Element α_1 angehört, entweder auf H das Element β_2, *oder* auf Z das Element γ_2 angehören, so dass *entweder* α_1, β_2 und ein bestimmtes (von γ_2 verschiedenes)

Element von Z, *oder* α_1, γ_2 und ein bestimmtes (von β_2 verschiedenes) Element von H dasjenige Tripel von R_T^1 bilden, dessen Element auf Ξ das singuläre Element α_1 ist. Dem Element α_1 ist demnach in einer in F_T enthaltenen R_T^1 jedenfalls das eine oder andere derjenigen Elemente (β_2, γ_2) zugeordnet, welche mit α_1 zusammen ein singuläres Paar bilden. Wir wollen den Fall in's Auge fassen, dass das Element α_1 durch β_2 und ein bestimmtes (von γ_2 verschiedenes) Element von Z zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt wird. Dann wird ebenfalls entweder β_1 oder γ_1 unter denjenigen beiden Elementen enthalten sein, welche α_2 zu einem Tripel von R_T^1 ergänzen. Fassen wir den Fall in's Auge, dass α_2 durch β_1 und ein bestimmtes (von γ_1 verschiedenes) Element von Z zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt wird, dann wird die projective Beziehung, welche in Folge von R_T^1 zwischen den Elementen von Ξ und H besteht, die Paare α_1, β_2 und α_2, β_1 als Paar entsprechender Elemente enthalten; diese projective Beziehung wird also demjenigen Büschel angehören, dessen Projectivitäten P_ζ in F_T den Elementen ζ von Z zugeordnet sind; denn wir erkannten cf. § 1. 1, dass durch F_T die Elemente ζ von Z projectiv zugeordnet werden den Projectivitäten P_ζ, welche die Elementepaare α_1, β_2 und α_2, β_1 gemein haben, cf. § 1. 3, und welche ein Büschel bilden. Es wird daher auch ein Element ζ_0 von Z existiren, welchem in F_T die in Rede stehende projective Beziehung entspricht, welche in Folge von R_T^1 die Elemente von Ξ und H verknüpft; es wird demnach ζ_0 die sämmtlichen Paare dieser Projectivität zu einem Tripel von F_T ergänzen; da nun andererseits auch derjenige Punkt auf Z, welcher ein Paar unserer Projectivität zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt, dasselbe Paar zu einem Tripel von F_T ergänzen muss, weil alle Tripel von R_T^1 auch solche von F_T sein sollen, so fallen alle diese Punkte mit ζ_0 zusammen, so dass wir erkennen, dass die projective Beziehung, in welche Ξ, Z und ebenso H, Z durch R_T^1 gesetzt werden, bei unserer Annahme eine *ausgeartete* Projectivität wird. Also ergiebt sich, *dass bei der Annahme, dass in der (in F_T enthaltenen) R_T^1 dem Elemente α_1 das Element β_2, und dem Elemente α_2 das Element β_1 entspreche, die unicursale Tripelreihe R_T^1 gebildet wird von der Gesammtheit solcher Tripel von F_T, für welche das auf Z befindliche Element ζ_0 für alle Tripel dasselbe ist.* Solche ausgeartete unicursale Tripelreihen wollen wir aber fortan von der Betrachtung ausschliessen, und nur *eigentliche* R_T^1 betrachten, d. h. solche bei denen 2 beliebige Tripel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ aus 6 distincten Elementen bestehen. —

Damit nun F_T eine eigentliche R_T^1 enthalte, dürfen also den Elementen α_1 und α_2 in R_T^1 *nicht* gleichzeitig resp. die Elemente β_2 und β_1 entsprechen; nehmen wir daher an, es entspreche in R_T^1 dem Elemente α_1 das Element β_2 von H, dann bleibt nur noch die Annahme übrig, dass dem Elemente α_2 das Element γ_1 von Z entspreche,

da wir sahen, dass unter den Elementen, welche in R_T^1 das Element α_2 zu einem Tripel ergänzen, entweder β_1, oder γ_1 auftreten mussten. Es entspricht somit bei der Annahme, dass in R_T^1 dem Elemente α_1 auf H das Element β_2 entspricht, dem Elemente γ_1 das Element α_2. Um die Zuordnung der singulären Elemente von F_T vollständig zu erhalten, haben wir noch das Element β_1 zu untersuchen; diesem muss in R_T^1 entweder auf Z das Element γ_2 oder auf Ξ das Element α_2 entsprechen, das letztere haben wir, falls R_T^1 eine *eigentliche* unicursale Tripelreihe sein soll, als unzulässig erkannt, also ist dem Element β_1 das Element γ_2 auf Z in R_T^1 zugeordnet. Daraus ergiebt sich: Ist R_T^1 eine in F_T enthaltene unicursale Tripelreihe, und ist dem singulären Elemente α_1 das singuläre Element β_2 auf H in Bezug auf R_T^1 zugeordnet, so ist dem Elemente β_1 das Element γ_2 auf Z, dem Element γ_1 das Element α_2 auf Ξ zugeordnet.

Oder: *Ist α_1, β_2 ein Paar entsprechender Elemente in derjenigen projectiven Beziehung, welche — in Folge der in F_T enthaltenen R_T^1 — die Elemente von Ξ und* H *verknüpft, so sind auch β_1, γ_2 und γ_1, α_2 Paare entsprechender Elemente in den analogen zwischen* H, Z *und* Z, Ξ *bestehenden Projectivitäten.* —

Vollständig analoges gilt auch für den anderen bisher nicht berücksichtigten Fall, dass dem singulären Elemente α_1 das singuläre Element γ_2 von Z in Bezug auf die in F_T enthaltene R_T^1 entspricht; in diesem Falle müssen auch α_2, β_1; β_2, γ_1 entsprechende Elementepaare derjenigen projectiven Beziehungen sein, welche die Elemente von Ξ, H resp. von H, Z in Folge von R_T^1 verknüpfen. Demnach ergiebt sich: *Ist eine unicursale Tripelreihe R_T^1 in einem Tripelfelde F_T enthalten, so müssen in den* 3 *projectiven Beziehungen, durch welche — vermittels R_T^1 — die Elemente von* Ξ, H; H, Z; Z, Ξ *verknüpft sind, entweder rsp. die singulären Paare α_1, β_2; β_1, γ_2; γ_1, α_2, oder rsp. die singulären Paare α_2, β_1; β_2, γ_1; γ_2, α_1 entsprechende Paare bilden.* Wir haben also 2 verschiedene Arten von in F_T enthaltenen R_T^1 zu unterscheiden; *erstens* solche, bei denen α_1, β_2; β_1, γ_2; γ_1, α_2 rsp. entsprechende Paare der obigen projectiven Beziehungen sind; *zweitens* solche, bei denen α_2, β_1; β_2, γ_1; γ_2, α_1 rsp. entsprechende Paare dieser 3 Projectivitäten sind. Eine R_T^1 der ersten Art soll als eine (1, 2)-R_T^1, eine solche der zweiten Art soll als (2, 1)-R_T^1 bezeichnet werden. — Wir können nunmehr aber auch erkennen, dass jedes Tripelfeld F_T unicursale Tripelreihen R_T^1 enthält, und es gelingt die Gesammtheit der in F_T enthaltenen R_T^1 in unzweideutiger Weise herauszuheben. Sind nämlich ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 irgend 2 Tripel von F_T, so fragen wir, ob es eine unicursale Tripelreihe R_T^1 giebt, welche die beiden Tripel ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 enthält, und welche dem Tripelfelde F_T angehört; wir untersuchen zunächst, ob es eine solche

R_T^1 von der (1, 2)-Art giebt. Falls eine solche R_T^1 existirt, so müssen nach dem Vorigen in derjenigen Projectivität, durch welche mittels R_T^1 die Elemente von Ξ und H verknüpft sind, die 3 Elemente ξ_1, ξ_2, α_1 resp. den 3 Elementen η_1, η_2, β_2 entsprechen, wodurch also diese projective Beziehung festgelegt ist. Ebenso müssen in der analogen projectiven Beziehung der Elemente von H zu den von Z die Elemente η_1, η_2, β_1 den Elementen $\zeta_1, \zeta_2, \gamma_2$ entsprechen, und analog in der projectiven Beziehung von Z und Ξ die Elemente ξ_1, ζ_2, γ_1 den Elementen ξ_1, ξ_2, α_2. Bezeichnen wir nun durch ξ_{12} und ζ_{12} diejenigen Elemente von Ξ resp. Z, welche durch die Doppelverhältnissgleichheiten:

$$(\xi_1, \xi_2, \alpha_1, \xi_{12}) \barwedge (\eta_1, \eta_2, \beta_2, \beta_1) \barwedge (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_{12}, \gamma_2)$$

eindeutig bestimmt sind, so sind die 4 Tripel:

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \quad \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \quad \alpha_1, \beta_2, \zeta_{12}; \quad \xi_{12}, \beta_1, \gamma_2$$

wegen der obigen Doppelverhältnissgleichheit derselben unicursalen Tripelfelde R_T^1 angehörig, sie sind aber offenbar auch Nulltripel von F_T, also besitzen F_T und R_T^1 vier gemeinsame Tripel, also ist R_T^1 dem Tripelpaare F_T angehörig; diese in F_T enthaltene R_T^1 ist offenbar von der (1, 2)-Art und, wie ihre Construction lehrt, die *einzige* dieser Art, welche die beiden gegebenen Tripel ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 enthält, also: Es existirt eine eindeutig bestimmte unicursale Tripelreihe der (1, 2)-Art, welche 2 beliebige Tripel von F_T enthält, und welche dem Tripelfelde F_T angehört. Ganz analog ergiebt sich, dass *genau eine* R_T^1 der (2, 1)-Art existirt, welche die beiden Tripel ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 enthält und dem Tripelfelde angehört, so dass wir folgenden Satz aussprechen können:

Sind ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 zwei beliebige Tripel eines Tripelfeldes F_T, so existiren genau 2 unicursale Tripelreihen, welchen die Tripel ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 angehören, und die in dem Tripelfeld enthalten sind, und zwar ist stets die eine derselben von der (1, 2)-Art, die andere von der (2, 1)-Art. — Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar, dass die Gesammtheit aller in F_T enthaltenen R_T^1 *zwei zweifache Mannigfaltigkeiten* bilden; in der einen dieser zweifachen Mannigfaltigkeiten sind nur R_T^1 der (1, 2)-Art, in der andern nur solche der (2, 1)-Art enthalten. Da durch irgend 2 Tripel von F_T genau *eine* — in F_T enthaltene — R_T^1 von jeder der beiden Arten bestimmt ist, so werden wir die beiden zweifachen Mannigfaltigkeiten als *lineare* oder kurz als *Netze* bezeichnen, und zwar werden wir dasjenige Netz, welches nur Tripelreihen der (1, 2)-Art enthält, als (1, 2)-Netz, das andere als (2, 1)-Netz bezeichnen. Somit ergiebt sich:

In jedem Tripelfelde sind 2 Netze von unicursalen Tripelreihen enthalten, von denen das eine nur R_T^1 der (1, 2)-Art, das andere nur

solche der (2, 1)*-Art enthält. Jedes Tripelpaar des Tripelfeldes gehört genau je einer* R_T^1 *eines jeden der beiden Netze an.*

Wir fragen nunmehr, ob 2 in einem Tripelfelde enthaltene R_T^1 gemeinsame Elemente haben, und in welcher Anzahl. Betrachten wir zunächst zwei unicursale Tripelreihen *derselben* Art R_T^1, $\overline{R}_T^1$, etwa von der (1, 2)-Art. Dieselben können höchstens *ein* gemeinsames Tripel besitzen, da 2 Tripel von F_T stets nur einer in F_T enthaltenen R_T^1 der (1, 2)-Art angehören, wie wir soeben erkannten. Betrachten wir die beiden projectiven Beziehungen, durch welche die Elemente von Ξ und H in Folge von R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ verknüpft sind. Ein gemeinsames Tripel von R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ muss offenbar auf Ξ und H Elemente besitzen, die diesen beiden Projectivitäten gemeinsam sind. Diese beiden Projectivitäten haben 2 gemeinsame Paare entsprechender Elemente, das eine ist α_1, β_2, da R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ dem (1,2)-Netz angehören, das andere sei mit ξ_1', η' bezeichnet. Ist ζ' dasjenige Element von Z, welches ξ', η' zu einem Tripel von F_T ergänzt, so ist ξ', η', ζ' ein gemeinsames Tripel von R_T^1 und $\overline{R}_T^1$; denn dasjenige Element von Z, welches ξ', η' zu einem Tripel von R_T^1 oder von $\overline{R}_T^1$ ergänzt, muss ξ', η' auch zu einem Tripel von F_T ergänzen, da alle Tripel von R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ in F_T enthalten sind; es muss also mit ζ' identisch sein, so dass ξ', η', ζ' gemeinsames Tripel von R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ ist. Daraus ergiebt sich, dass R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ stets *ein* gemeinsames Tripel besitzen, dessen Construction gleichzeitig geleistet ist. Also: *Zwei in* F_T *enthaltene* R_T^1 *derselben Art haben stets ein gemeinsames Tripel.* — Betrachten wir nunmehr 2 in F_T enthaltene unicursale Tripelreihen R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ von *verschiedener* Art und fragen nach deren gemeinsamen Tripeln. Fassen wir wiederum die 2 projectiven Beziehungen in's Auge, welche durch R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ zwischen den Elementen von Ξ und H vermittelt werden, so muss ein gemeinsames Tripel von R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ auf Ξ und H Elemente besitzen, welche diesen beiden projectiven Beziehungen gemeinsam sind. Nun besitzen diese beiden Projectivitäten 2 gemeinsame Paare ξ', η' und ξ'', η''; sind ζ', ζ'' die beiden Elemente von Z, welche resp. ξ', η' und ξ'', η'' zu einem Tripel von F_T ergänzen, so ergiebt sich genau, wie im vorigen Falle, dass ξ', η', ζ' und ξ'', η'', ζ'' gemeinsame Tripel von R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ sind, und zwar die einzigen. Also gilt:

Zwei in F_T *enthaltene* R_T^1 *verschiedener Art besitzen zwei gemeinsame Tripel.* — Hält man ein Tripel α, β, γ von F_T fest und betrachtet die in F_T enthaltenen R_T^1, welchen das Tripel α, β, γ angehört, so ergiebt sich:

Es existiren zwei Schaaren (einfache, lineare Mannigfaltigkeiten) von unicursalen Tripelreihen, welche das Tripel α, β, γ *enthalten, und*

dem Tripelfeld F_T angehören. Die eine Schaar enthält nur R_T^1 der $(1,2)$-Art, die andere nur solche der $(2,1)$-Art. Jedes Tripel ξ, η, ζ von F_T gehört genau einer R_T^1 aus jeder der beiden Schaaren an, zwei R_T^1 aus verschiedenen Schaaren haben — abgesehen von α, β, γ — ein gemeinsames Tripel; zwei R_T^1 derselben Schaar haben kein gemeinsames Tripel. Es gilt also hier genau analoges, wie für die beiden Schaaren von Geraden, welche sich auf einer Fläche II^ter^ Ordnung befinden; wir werden dieselben in der That auf derartige Schaaren von R_T^1 eindeutig beziehen. —

Wir denken uns das Tripelfeld F_T in der § 1. 6) dargestellten Weise umkehrbar eindeutig abgebildet auf die Punkte P' einer Ebene, indem wir die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z projectivisch beziehen auf 3 in jener Ebene befindliche Strahlenbüschel Ξ', H', Z' in der Weise, dass stets 3 Elementen ξ, η, ζ eines Tripels von F_T 3 Strahlen ξ', η', ζ' entsprechen, die sich in einem Punkte P' schneiden. Wir fragen nach denjenigen Punkten P' der Ebene, welche den Tripeln einer in F_T enthaltenen R_T^1 entsprechen. Diese Punkte müssen die Eigenschaft haben, dass sie mit den resp. Scheiteln $S_{\xi'}, S_{\eta'}, S_{\zeta'}$ der Strahlenbüschel Ξ', H', Z' verbunden, projective Strahlenbüschel liefern. Sie müssen also sämmtlich entweder auf einer Geraden g der Ebene der Abbildung liegen, oder auf einem Kegelschnitt K, welcher $S_{\xi'}, S_{\eta'}, S_{\zeta'}$ enthält. Fassen wir eine unicursale Tripelreihe von F_T der $(1,2)$-Art in's Auge, so ist in der durch diese R_T^1 zwischen den Elementen von Ξ und H vermittelten projectiven Beziehung α_1, β_2 ein Paar entsprechender Elemente, also müssen auch in der projectiven Beziehung der zugeordneten Strahlen von Ξ', H' die Elemente $\alpha_1' = S_{\xi'} S_{\eta'}$, $\beta_2' = S_{\xi'} S_{\eta'}$ einander entsprechen, so dass die beiden projectiven Strahlenbüschel Ξ', H' ihren gemeinsamen Strahl entsprechend gemein haben, also perspectivisch sind, und demnach die Schnittpunkte P' entsprechender Strahlen auf einer Geraden liegen, welche das Bild der betrachteten R_T^1 der $(1,2)$-Art ist. Also ergiebt sich, dass die in F_T befindlichen R_T^1 der $(1,2)$-Art auf die Geraden der Ebene abgebildet werden, und zwar umkehrbar eindeutig, wie sich unmittelbar ergiebt. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass die Kegelschnitte durch $S_{\xi'}, S_{\eta'}, S_{\zeta'}$ die Bilder der in F_T enthaltenen R_T^1 der $(2,1)$-Art sind. Demnach ist das Netz der Kegelschnitte durch $S_{\xi'}, S_{\eta'}, S_{\zeta'}$ das Bild des $(2,1)$-Netzes der in F_T enthaltenen R_T^1, während das Netz aller Geraden der Ebene das Bild des $(1,2)$-Netzes ist. Man erkennt nun auch unmittelbar aus der Abbildung, dass 2 R_T^1 desselben Netzes ein gemeinsames Tripel, $2R_T^1$ aus verschiedenen Netzen aber 2 gemeinsame Tripel besitzen. —

3) *Construction der gemeinsamen Tripel eines Tripelfeldes und einer unicursalen Tripelreihe.* Ist F_T ein gegebenes Tripelfeld und R_T^1 eine nicht in F_T enthaltene unicursale Tripelreihe, so sahen wir § 2. 1),

dass F_T und R_T^1 3 gemeinsame Tripel besitzen, die wir nunmehr construiren wollen. Durch R_T^1 werden die Elemente von H und Z projectiv bezogen; ist η, ζ ein Paar entsprechender Elemente dieser projectiven Beziehung, so existirt ein Element ξ von Ξ, welches η, ζ zu einem Tripel von F_T ergänzt, und ein anderes Element ξ_1, welches η, ζ zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt; fallen ξ und ξ_1 zusammen, so ist das so zusammengesetzte Tripel eines der 3 gemeinsamen Tripel von F_T und R_T^1. Die Elementepaare ξ, ξ_1, die man in Ξ auf diese Weise erhält, constituiren in Ξ eine Correspondenz, deren Natur wir kurz betrachten wollen. Denken wir uns das Coordinatensystem wieder, wie in § 2. 1), so gewählt, dass die R_T^1 die Gleichungen

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$$

besitzt, und ist

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl}\, \xi_i\, \eta_k\, \zeta_l = 0$$

die Gleichung von F_T, so wird das einem Paare η, ζ entsprechender Elemente, für welche also

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$$

ist, in $f = 0$ zugeordnete Element ξ die Gleichung:

$$f(\xi, \eta, \eta) \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl}\, \xi_i\, \eta_k\, \eta_l = 0$$

besitzen, während das Element ξ_1, welches in R_T^1 das Paar η, ζ zu einem Tripel ergänzt, die Gleichung besitzt:

$$\frac{\xi_1^1}{\xi_2^1} = \frac{\eta_1}{\eta_2};$$

durch Elimination von η_1, η_2 ergiebt sich also:

$$\sum a_{ikl}\, \xi_i\, \xi_k^1\, \xi_l^1 = 0$$

als Gleichung der von uns betrachteten Beziehung zwischen ξ und ξ_1. Wir erkennen unmittelbar, dass dies die Gleichung einer ein-zweideutigen Verwandtschaft ist; diese besitzt bekanntlich 3 Doppelelemente, deren Construction von Herrn Emil Weyr*) angegeben worden ist. Die Ausführung dieser Construction beansprucht die Construction der 3 letzten Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, von denen man einen Schnittpunkt kennt, und für welche ausserdem je 4 Punkte gegeben sind, so dass diese beiden Kegelschnitte vollständig bekannt sind. Bekanntlich lässt sich dieses Grundproblem aller cubischen Constructions-

*) cf. Emil Weyr: Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde, Leipzig 1869, p. 51 ff., p. 74.

aufgaben mit alleiniger Hilfe des Lineals, des Cirkels und eines festen — im Voraus beliebig gezeichneten — Kegelschnitts ausführen*), so dass auch damit die Construction unseres vorliegenden cubischen Problems unter Anwendung der genannten Hülfsmittel als gelöst zu betrachten ist. Ist eines der 3 gemeinsamen Tripel von R_T^1 und F_T bekannt, so lassen sich die beiden anderen allein mit Cirkel und Lineal construiren; sind zwei derselben gegeben, so erfolgt die Construction des letzten mit alleiniger Hilfe des Lineals**), wie man durch entsprechende Modificirung der obigen allgemeinen Construction unmittelbar erkennt.

4) *Construction der 3 dreifachen Elemente dreier in einander liegender trilinarer Grundgebilde.* Denken wir uns die Träger der 3 einstufigen Grundgebilde Ξ, H, Z, deren Elemente durch

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl}\, \xi_i\, \eta_k\, \zeta_l = 0$$

in trilineare Beziehung gesetzt sind, zusammenfallend, so dass ξ, η, ζ Elemente eines und desselben Grundgebildes bedeuten, so kommt es dreimal vor, dass die 3 Elemente ξ, η, ζ, welche ein Tripel von $f = 0$ bilden, zusammenfallen; denn dazu muss ξ der cubischen Gleichung:

$$\sum a_{ikl}\, \xi_i\, \xi_k\, \xi_l = 0$$

genügen. Bezeichnen wir mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 diese drei dreifachen Elemente der 3 in einander liegenden trilinearen Grundgebilde Ξ, H, Z, so lässt sich deren Construction auf die vorige Construction der 3 gemeinsamen Elemente eines F_T und einer R_T^1 unmittelbar zurückführen. Denn denken wir uns die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z als 3 gerade Punktreihen auf demselben Träger g — ein Fall, auf den sich alle übrigen Fälle durch projective Zuordnung zurückführen lassen — und wählen wir 3 Punkte α, β, γ in derselben Ebene mit g, so bilden die Strahlentripel $\alpha\xi, \beta\eta, \gamma\zeta$, welche α, β, γ resp. mit den Punkten ξ, η, ζ eines Tripels des auf g liegenden Tripelfeldes verbinden, ebenfalls die Tripel einer zwischen den Strahlen der 3 Strahlenbüschel α, β, γ bestehenden trilinearen Beziehung. Verbinden wir noch α, β, γ mit den sämmtlichen Punkten π von g, so bilden die Strahlentripel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ die Tripel einer unicursalen Tripelreihe. Das von den Tripeln $\alpha\xi, \beta\eta, \gamma\zeta$ gebildete Tripelfeld und die von den Tripeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ gebildete R_T^1, besitzen 3 gemeinsame Tripel, deren Construction wir im vorigen Abschnitt gelehrt haben. Die 3 Strahlen eines solchen Tripels schneiden sich in einem auf g gelegenen Punkte, da das Tripel der R_T^1 $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$

*) cf. H. I. St. Smith: Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadr. Annali di math. Ser. III, Tom. II.

**) cf. E. Weyr, a. a. O.

angehört; sind π_1, π_2, π_3 diese 3 Punkte auf g, so liefern sie die gesuchten dreifachen Elemente.

5) *Das Tripelfeld mit singulärem Tripel und die unicursalen Tripelreihen.* Sei nunmehr

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl}\, \xi_i\, \eta_k\, \zeta_l = 0$$

die Gleichung eines singulären Tripelfeldes, wo also eine Invariante, gebildet aus den Coefficienten a_{ikl}, die von Herrn Le Paige*) als Discriminante von f bezeichnet wird, verschwindet. Ferner sei eine unicursale Tripelreihe R_T^1 gegeben durch die Gleichungen:

$$\varrho\,\xi_i = \alpha_i + k\alpha_i', \quad \sigma\,\eta_i = \beta_i + k\beta_i', \quad \tau\,\zeta_i = \gamma_i + k\gamma_i' \quad (i = 1, 2),$$

wo ϱ, σ, τ Proportionalitätsfactoren, k einen Parameter bedeuten; durchläuft k alle reellen Werthe, so geben die zugehörigen Werthe von ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1, 2)$ die Coordinaten aller Tripel von R_T^1; zu diesen Tripeln gehören auch α, β, γ und α', β', γ'. Die gemeinsamen Tripel von R_T^1 mit dem singulären Tripelfelde ergeben sich, wenn man die obigen Werthe von ξ_i, η_i, ζ_i in $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ einsetzt und die zugehörigen Werthe von k bestimmt; dann wird:

$$f(x+k\alpha', \beta+k\beta', \gamma+k\gamma') = \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl}(\alpha_i+k\alpha_i')(\beta_k+k\beta_k')(\gamma_l+k\gamma_l')$$

$$= \sum a_{ikl}\,\alpha_i\beta_k\gamma_l + k\sum a_{ikl}(\alpha_i'\beta_k\gamma_l + \alpha_i\beta_k'\gamma_l + \alpha_i\beta_k\gamma_l')$$
$$+ k^2\sum a_{ikl}(\alpha_i\beta_k'\gamma_l' + \alpha_i'\beta_k\gamma_l' + \alpha_i'\beta_k'\gamma_l)$$
$$+ k^3\sum a_{ikl}\,\alpha_i'\beta_k'\gamma_l' = 0.$$

Oder:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) + k\{f(\alpha', \beta, \gamma) + f(\alpha, \beta', \gamma) + f(\alpha, \beta, \gamma')\}$$
$$+ k^2\{f(\alpha, \beta', \gamma') + f(\alpha', \beta, \gamma') + f(\alpha', \beta', \gamma)\}$$
$$+ k^3 f(\alpha', \beta', \gamma') = 0.$$

Dieser in k cubischen Gleichung genügen 3 Werthe, welche zu den 3 auch hier gemeinsamen Tripeln von R_T^1 und dem singulären Tripelfeld führen. Fassen wir nunmehr jedoch den Fall in's Auge, dass das *singuläre Tripel* von F_T zu den gemeinsamen Tripeln von F_T und R_T^1 gehöre. Es bedeute nunmehr α, β, γ das singuläre Tripel; dann wird in der obigen Gleichung $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ sein, da das singuläre Tripel dem Tripelfelde $f = 0$ angehört; es wird aber auch

$$f(\alpha', \beta, \gamma) = 0, \quad f(\alpha, \beta', \gamma) = 0, \quad f(\alpha, \beta, \gamma') = 0$$

sein, weil jedes Elementenpaar β, γ; γ, α; α, β des singulären Tripels

*) cf. Le Paige: Essais sur la géometrie de troisième ordre, l. c. p. 17.

α, β, γ durch jedes beliebige Element des dritten Grundgebildes zu einem Nulltripel von $f = 0$ ergänzt wird. Die obige cubische Gleichung für k besitzt also die Doppelwurzel $k = 0$, d. h. das singuläre Tripel zählt als gemeinsames Tripel eines Tripelfeldes und einer unicursalen Tripelreihe doppelt, da die übrigen gemeinsamen Tripel sich aus der in k linearen Gleichung:

$$\{f(\alpha, \beta', \gamma') + f(\alpha', \beta, \gamma') + f(\alpha', \beta', \gamma)\} + f(\alpha', \beta', \gamma') \cdot k = 0$$

bestimmen. Es besitzen daher F_T und R_T^1 ausser dem singulären Tripel α, β, γ nur noch ein einziges gemeinsames Tripel, also ergiebt sich:

Eine unicursale Tripelreihe, welche mit einem singulären Tripelfeld das singuläre Tripel gemein hat, besitzt ausserdem mit demselben nur noch ein einziges gemeinsames Tripel. Wir wollen dieses eindeutig bestimmte gemeinsame Tripel, welches R_T^1, abgesehen von dem singulären Tripel α, β, γ, mit F_T gemeinsam hat, *construiren.* Ist η, ξ ein Paar entsprechender Elemente derjenigen projectiven Beziehung, welche mittels R_T^1 zwischen den Elementen von H und Z besteht, und ist ξ dasjenige Element von Ξ, welches η, ξ zu einem Tripel von F_T und ξ_1 dasjenige, welches η, ξ zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt, so bilden alle diese Paare ξ, ξ_1 entsprechende Elemente einer projectiven Beziehung, da jedem ξ *nur ein* ξ_1 entspricht und umgekehrt. Die Doppelelemente dieser projectiven Beziehung führen uns zu den gemeinsamen Tripeln von F_T und R_T^1; das eine Doppelelement ist das singuläre Element α auf Ξ, das andere ist linear construirbar, wenn dieses singuläre Element α und hinreichende Bestimmungsstücke für F_T und R_T^1, und damit auch für die obige Projectivität zwischen den Elementen ξ, ξ_1 gegeben sind. —

6) *Die in einem singulären Tripelfelde enthaltenen unicursalen Tripelreihen.* Aus dem in voriger Nr. abgeleiteten Satze ergiebt sich unmittelbar, dass falls eine R_T^1 mit dem singulären Tripelfeld ausser dem singulären Tripel noch mehr als ein Tripel gemein hat, dann R_T^1 ganz in F_T enthalten ist. Also gilt: *Sind* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *und* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *zwei beliebige Tripel des singulären Tripelfeldes* F_T *und ist* α, β, γ *das singuläre Tripel, so ist die durch die* 3 *Tripel*

$$(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) \curlywedge (\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots) \curlywedge (\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots)$$

bestimmte unicursale Tripelreihe in F_T *enthalten.* Wir erkennen gleichzeitig, dass weitere in F_T enthaltene R_T^1, welchen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ angehören, nicht existiren, so dass wir auf diese Weise bereits die Gesammtheit der in F_T enthaltenen R_T^1 erhalten. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, dass *jede in* F_T *enthaltene* R_T^1 *das singuläre Tripel enthalten muss.* In der That betrachten wir diejenigen beiden Elemente β', γ' von H resp. Z, welche das singuläre Element α von Ξ

zu einem Tripel der in F_T enthaltenen R_T^1 ergänzen; da α, β', γ' auch ein Tripel von F_T bilden, da ferner für alle Elementenpaare η, ξ, welche α zu einem Tripel von F_T ergänzen, *entweder* $\eta = \beta$, *oder* $\xi = \gamma$ sein muss, so muss entweder $\beta' = \beta$, oder $\gamma' = \gamma$ sein. Nehmen wir zunächst den Fall $\beta' = \beta$; wir fragen nunmehr nach demjenigen Elementepaar α'', β'', welches das singuläre Element γ von Z zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt; für dasselbe muss aus genau denselben Gründen, wie oben, entweder $\alpha'' = \alpha$ oder $\beta'' = \beta$ sein; ist $\alpha'' = \alpha$, so ist also α das in Ξ entsprechende Element von γ in Bezug auf R_T^1, und oben sahen wir, dass β das in H entsprechende Element von α in Bezug auf R_T^1 war, also ist unter der gemachten Annahme α, β, γ ein Tripel von R_T^1. Dasselbe ergiebt sich bei der Annahme, dass $\beta'' = \beta$ ist; dann entspricht in R_T^1 dem Element γ das Element β von H; und diesem auf Ξ das Element α; also ist auch in diesem Falle α, β, γ ein Tripel von R_T^1. Zu genau demselben Resultate gelangen wir auf völlig analogem Wege, wenn wir die andere Annahme machen, dass nämlich nicht $\beta' = \beta$, sondern $\gamma' = \gamma$ sei. Daher können wir den Satz aussprechen:

Jeder in einem singulären Tripelfeld enthaltenen unicursalen Tripelreihe gehört das singuläre Tripel des Tripelfeldes an. Da wir sahen, dass jede R_T^1, welche 2 beliebige Tripel α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 und das singuläre Tripel enthält, vollständig in F_T enthalten ist, wir aber jetzt bewiesen haben, dass jede in F_T enthaltene R_T^1 das singuläre Tripel enthält, so ergiebt sich, dass eine und nur eine R_T^1 existirt, welcher 2 beliebige Tripel von F_T angehören, und welche in F_T enthalten ist; im Gegensatz zu dem nicht singulären Tripelfeld, wo stets 2 derartige R_T^1 vorhanden waren. Also ist bewiesen: *In einem singulären Tripelfelde ist nur ein Netz von unicursalen Tripelreihen enthalten, welchen sämmtlich das singuläre Tripel angehört. Für das singuläre Tripelfeld reduciren sich demnach die beiden Netze des allgemeinen Falles auf ein einziges.* —

§ 3.

Lineare Constructionen des Tripelfeldes.

Durch 7 Tripel ist ein Tripelfeld (nach § 1. 2) im Allgemeinen eindeutig bestimmt; es wird demnach für die constructive Behandlung der trilinearen Verwandtschaft als fundamental das Problem sich ergeben:

Aus 7 gegebenen Tripeln die übrigen Tripel des durch sie bestimmten Tripelfeldes linear zu construiren. Wir wollen hier eine völlig elementare Lösung dieses Problems geben, bei welcher nur die einfachsten Constructionen projectiver Gebilde zur Verwendung kommen. Wir werden erkennen, dass das in Rede stehende Problem unmittelbar die

Ausführung fundamentaler Constructionsaufgaben aus der Theorie der Flächen II^{ter} und III^{ter} Ordnung gestattet. Zuvor seien kurz die Fälle behandelt, wo unter den 7 gegebenen Tripeln solche auftreten, bei welchen zwei ihrer Elemente ein singuläres Paar bilden; auf diese einfacheren Fälle lässt sich das allgemeine Problem unmittelbar reduciren. Ein singuläres Paar repräsentirt uns 2 Tripel des Tripelfeldes F_T, da es durch irgend 2 — also durch alle — Elemente des dritten Grundgebildes zu je einem Tripel von F_T ergänzt wird.

1) *Von einem Tripelfeld F_T kennt man die singulären Elemente α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 und ein Tripel ξ_1, η_1, ζ_1; es sollen die übrigen Tripel linear construirt werden.**)

a) Um zu einem beliebigen Elemente ξ von Ξ alle Elementenpaare η, ζ zu construiren, welche ξ zu einem Tripel von F_T ergänzen, haben wir nur die zu ξ in F_T zugeordnete Projectivität P_ξ zu construiren, von welcher β_1, γ_2 und β_2, γ_1 2 Paare entsprechender Elemente bilden, so dass nur noch ein drittes Paar entsprechender Elemente aufzufinden ist. Ein solches ergiebt sich unmittelbar folgendermassen: Die dem Punkte ξ_1 zugeordnete Projectivität P_{ξ_1} ist offenbar:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \ldots) \barwedge (\beta_2, \beta_1, \eta_1, \ldots);$$

suchen wir in P_{ξ_1} das Element η, welches dem Element ξ entspricht, so dass:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi) \barwedge (\beta_2, \beta_1, \eta_1, \eta),$$

so bilden ξ, η, ξ_1 ein Tripel von F_T und es ist also η, ζ_1 ein Paar entsprechender Elemente von P_ξ und somit:

$$(\beta_1, \beta_2, \eta, \ldots) \barwedge (\gamma_2, \gamma_1, \zeta_1, \ldots)$$

die dem Element ξ in F_T zugeordnete Projectivität P_ξ, die daher durch Construction des *einzigen* Elementes η herstellbar wird, und unmittelbar gestattet, alle Elementenpaare η, ζ, welche das beliebige Element ξ von Ξ zu einem Tripel ergänzen, aufzufinden. —

b) *Zweite Construction.* Es seien $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$, die beliebig gewählten Scheitel dreier in derselben Ebene befindlichen Strahlenbüschel, welche wir folgendermassen auf die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z resp. projectivisch beziehen:

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \ldots) \barwedge (\alpha_1', \alpha_2', \xi_1', \ldots) \\ (\beta_1, \beta_2, \eta_1, \ldots) \barwedge (\beta_1', \beta_2', \eta_1', \ldots) \\ (\gamma_1, \gamma_2, \zeta_1, \ldots) \barwedge (\gamma_1', \gamma_2', \zeta_1', \ldots) \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{Dabei ist gesetzt:} \\ \alpha_1' = \beta_2' = S_{\xi'} S_{\eta'}, \\ \beta_1' = \gamma_2' = S_{\eta'} S_{\zeta'}, \\ \gamma_1' = \alpha_2' = S_{\zeta'} S_{\xi'}; \end{array}$$

und ferner, wenn P einen beliebigen Punkt der Ebene $S_{\xi'} S_{\eta'} S_{\zeta'}$ bedeutet, $\xi_1' = S_{\xi'} P$, $\eta_1' = S_{\eta'} P$, $\zeta_1' = S_{\zeta'} P$. Auf diese Weise ist nach §1.6) die gesuchte trilineare Beziehung (F_T) eindeutig auf die 3 reducirt-

*) cf. Schubert, a. a. O.

trilinearen Strahlenbüschel S_ξ, $S_{\eta'}$, S_ζ, resp. auf die Punkte ihrer Ebene bezogen. Man kann nun unmittelbar irgend 2 Elemente ξ, η linear durch ein drittes Element ζ zu einem Tripel von F_T ergänzen, dazu haben wir nur die Strahlen ξ', η' durch resp. $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$ zu construiren, welche resp. durch

$$(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi) \barwedge (\alpha_1', \alpha_2', \xi_1', \xi'), \quad (\beta_1, \beta_2, \eta_1, \eta) \barwedge (\beta_1', \beta_2', \eta_1', \eta')$$

eindeutig definirt sind; ist P der Schnittpunkt von ξ' und η' und $S_{\zeta'} P = \zeta'$ gesetzt, so ist das gesuchte Element ζ eindeutig bestimmt durch die projective Beziehung:

$$(\gamma_1', \gamma_2', \xi_1', \xi') \barwedge (\gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \xi), \quad —$$

2) *Von einem Tripelfeld F_T sind gegeben die beiden singulären Paare $\beta_1\gamma_2$, $\beta_2\gamma_1$ und 3 Tripel ξ_1, η_1, ξ_1; ξ_2, η_2, ξ_2; ξ_3, η_3, ξ_3; es sollen die übrigen Tripel von F_T linear construirt werden.* a) Wir führen diese Aufgabe auf die vorige zurück, indem wir die beiden noch fehlenden Elemente α_1, α_2 construiren, was mit alleiniger Hilfe des Lineals möglich ist. Zunächst ergiebt sich, dass die zu ξ_1 zugeordnete Projectivität P_{ξ_1} definirt ist durch:

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_1, \ldots) \barwedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_1, \ldots)$$

ebenso ist P_{ξ_2} definirt durch:

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_2, \ldots) \barwedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_2, \ldots)$$

und P_{ξ_3} durch

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_3, \ldots) \barwedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_3, \ldots).$$

Wir construiren nun diejenigen beiden Elemente η_{12}, η_{13}, welche durch:

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_2, \eta_{12}) \barwedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_2, \xi_1)$$

resp, durch

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_3, \eta_{13}) \barwedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_3, \xi_1)$$

eindeutig bestimmt sind; dann ergänzen η_{12}, ξ_1 das Element ξ_2 zu einem Tripel, da η_{12}, ξ_1 entsprechende Elemente von P_{ξ_2} sind, und ebenso ergänzen η_{13}, ξ_1 das Element ξ_3 zu einem Tripel, mithin ist die Projectivität:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) \barwedge (\eta_1, \eta_{12}, \eta_{13}, \ldots)$$

die zu ζ_1 in F_T zugeordnete Projectivität P_{ζ_1}. Die beiden singulären Paare α_1, β_2 und α_2, β_1 gehören allen Projectivitäten P_ζ an, welche den Elementen ζ von Z in F_T zugeordnet sind, sie sind also auch Paare entsprechender Elemente der von uns aufgefundenen Projectivität P_{ζ_1} und mithin werden α_1, α_2 linear construirbar; da sie bestimmt sind durch die projective Beziehung:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \alpha_1, \alpha_2) \barwedge (\eta_1, \eta_{12}, \eta_{13}, \beta_2, \beta_1).$$

Dadurch ist unsere Aufgabe auf die vorige zurückgeführt. —

b) Auch hier können wir das gesuchte Tripelfeld auf die Strahlentripel dreier trilinearen Strahlenbüschel in reducirter Lage eindeutig

umkehrbar beziehen, und so, wie sub. 1. b), die Construction von F_T in übersichtlicher Weise leisten. Sind nämlich $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$ die 3 beliebig gewählten Scheitel dreier in derselben Ebene befindlichen Strahlenbüschel, und sind η_1', ξ_1' zwei beliebige Strahlen resp. durch $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$, deren Schnittpunkt $(\eta_1', \xi_1') = P_1$ ist, dann construiren wir die Strahlen η_2', η_3' durch $S_{\eta'}$ und ξ_2', ξ_3' durch $S_{\zeta'}$, für welche die projectiven Beziehungen:

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \barwedge (\beta_1', \beta_2', \eta_1', \eta_2', \eta_3')$$

und

$$(\gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \barwedge (\gamma_1', \gamma_2', \xi_1', \xi_2', \xi_3')$$

bestehen, wobei wieder;

$$\alpha_1' = \beta_2' = S_{\xi'} S_{\eta'}, \quad \beta_1' = \gamma_2' = S_{\eta'} S_{\zeta'}, \quad \gamma_1' = \alpha_2' = S_{\zeta'} S_{\xi'}$$

gesetzt ist.

Sind nun die Schnittpunkte von η_2' und ξ_2' resp. von η_3' und ξ_3' durch P_2, P_3 bezeichnet, und

$$S_{\xi'} P_1 = \xi_1', \quad S_{\xi'} P_2 = \xi_2', \quad S_{\xi'} P_3 = \xi_3'$$

gesetzt, dann führen die 3 Projectivitäten:

$$(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \ldots) \barwedge (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots),$$
$$(\eta_1' \cdot \eta_2', \eta_3', \ldots) \barwedge (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots),$$
$$(\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3', \ldots) \barwedge (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots)$$

die 3 reducirt-trilinearen Strahlenbüschel $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$ in die gesuchte trilineare Beziehung der 3 Grundgebilde Ξ, H, Z über. Denn die auf diese Weise trilinear bezogenen Grundgebilde Ξ, H, Z haben offenbar ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3 zu Tripeln und β_1, γ_2 und β_2, γ_1 zu singulären Paaren. Die beiden letzten singulären Elemente α_1, α_2 ergeben sich linear aus der projectiven Beziehung:

$$(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \alpha_1', \alpha_2') \barwedge (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \alpha_1, \alpha_2). \quad —$$

3) *Von einem Tripelfeld F_T sind gegeben* 5 *Tripel* ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1,2,3,4,5)$ *und ein singuläres Paar* β_1, γ_2; *es sollen die übrigen Tripel und die übrigen singulären Elemente linear construirt werden.* Wir schlagen hier wieder den in den früheren Aufgaben befolgten Weg ein, 3 trilineare Strahlenbüschel $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$ in reducirter Lage aufzufinden, welche auf die 3 gegebenen Grundgebilde Ξ, H, Z projectivisch so bezogen sind, dass 3 Strahlen ξ', η', ζ' von resp. $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$, welche durch einen Punkt gehen, 3 Elemente ξ, η, ζ entsprechen, welche ein Tripel des gesuchten Tripelfeldes F_T bilden. Zu diesem Zwecke wählen wir die beiden Strahlenbüschel mit den Scheiteln $S_{\eta'}$ und $S_{\zeta'}$ in ein und derselben Ebene ganz willkürlich, und ferner die Strahlen η_1', η_2' durch $S_{\eta'}$ und ξ_1', ξ_2' durch $S_{\zeta'}$ ganz beliebig; nunmehr construiren wir linear die 3 Strahlen $\eta_3', \eta_4', \eta_5'$ durch $S_{\eta'}$

und die Strahlen ξ_3', ξ_4', ξ_5' durch S_ζ, für welche die projectiven Beziehungen gelten:

$$\left.\begin{array}{l}(\beta_1\,\eta_1\,\eta_2\,\eta_3\,\eta_4\,\eta_5) \barwedge (\beta_1'\,\eta_1'\,\eta_2'\,\eta_3'\,\eta_4'\,\eta_5') \\ (\gamma_2\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4\,\xi_5) \barwedge (\gamma_1'\,\xi_1'\,\xi_2'\,\xi_3'\,\xi_4'\,\xi_5')\end{array}\right\} \text{ dabei sei wiederum: } \beta_1' = \gamma_2' = S_{\eta'} S_\zeta .$$

Bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von η_i' mit ξ_i' durch P_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$, und construiren wir denjenigen eindeutig bestimmten Punkt S_ξ, für welchen:

$$S_\xi (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) \barwedge (\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4\,\xi_5)$$

ist, und welcher allein mit Hilfe des Lineals construirbar ist*), dann werden, wenn wir:

$$S_\xi P_i = \xi_i' \; (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

und

$$\alpha_1' = \beta_2' = S_{\xi'} S_{\eta'}, \quad \alpha_2' = \gamma_1' = S_{\xi'} S_{\zeta'}$$

setzen, die 3 Strahlenbüschel $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\zeta'}$ durch die 3 projectiven Beziehungen:

$$(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \ldots) \barwedge (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots),$$
$$(\eta_1', \eta_2', \eta_3', \ldots) \barwedge (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots),$$
$$(\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3', \ldots) \barwedge (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots)$$

in der gewünschten Weise auf die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z bezogen.

Denn es bilden die Tripel ξ, η, ζ, welche 3 Strahlen ξ', η', ζ' durch resp. $S_{\xi'} S_{\eta'} S_{\zeta'}$, die durch einen Punkt gehen, entsprechen, ein Tripelfeld F_T, welchem nach unserer Construction die 5 Tripel ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ und das singuläre Paar β_1, γ_2 angehören, welches also das gesuchte ist; zu einem beliebigen Elementepaar ξ, η können wir nunmehr unmittelbar das Element ζ construiren, welches ξ, η zu einem Tripel von F_T ergänzt; denn construiren wir zunächst die beiden Elemente ξ', η', für welche:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi) \barwedge (\xi_1'\,\xi_2', \xi_3'\,\xi'), \quad (\eta_1\,\eta_2\,\eta_3\,\eta) \barwedge (\eta_1'\,\eta_2'\,\eta_3'\,\eta'),$$

bezeichnen wir den Schnittpunkt von ξ' mit η' durch P und setzen $S_{\zeta'} P = \zeta'$, dann ist das gesuchte Element ζ linear bestimmt durch die projective Beziehung:

$$(\xi_1'\,\xi_2'\,\xi_3'\,\xi') \barwedge (\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi).$$

Wir können ferner die noch fehlenden singulären Elemente unmittelbar mit alleiniger Hilfe des Lineals construiren, und damit unsere Aufgabe auf die Aufgabe 1 zurückführen. Denn es sind zunächst α_1, α_2 linear bestimmt durch:

$$(\xi_1'\,\xi_2'\,\xi_3'\,\alpha_1'\,\alpha_2') \barwedge (\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\alpha_1\,\alpha_2),$$

*) cf. Sturm: Das Problem der Projectivität, Math. Ann. Bd. II, p. 535.

und ebenso β_2 und γ_1 durch:

$$(\eta_1' \eta_2' \eta_3' \beta_2') \curlywedge (\eta_1 \eta_2 \eta_3 \beta_2), \quad (\xi_1' \xi_2' \xi_3' \gamma_1') \curlywedge (\xi_1 \xi_2 \xi_3 \gamma_1).$$

4) *Von einem Tripelfeld F_T sind gegeben 2 Elemente ξ_1, ξ_2 von Ξ und die durch F_T ihnen zugeordneten Projectivitäten P_{ξ_1}, P_{ξ_2} und ein Tripel ξ_3, η_3, ζ_3; es sollen die übrigen Tripel von F_T linear construirt werden**)

Zunächst kennt man alle Elementepaare, welche ξ_1 sowohl, wie ξ_2, zu einem Tripel von F_T ergänzen, und man kann zu ξ_1 (und ebenso zu ξ_2) und irgend einem Element der beiden andern Grundgebilde stets das dritte Element finden, welches mit den beiden ersten ein Tripel von F_T bildet; dasselbe ist offenbar das dem zweiten Element in P_{ξ_1} entsprechende Element. Sodann kann man auch die zu η_3 in F_T zugeordnete Projectivität P_{η_3} angeben; denn sind ζ_{13}, ζ_{23} diejenigen Elemente von Z, welche ξ_1, η_3 resp. ξ_2, η_3 zu einem Tripel von F_T ergänzen, und, welche, wie eben bemerkt, linear construirbar sind, so ist die Projectivität P_{η_3} offenbar gegeben durch die Beziehung

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) \curlywedge (\zeta_{13}, \zeta_{23}, \zeta_3, \ldots).$$

Nunmehr kann man auch die Projectivität P_{ζ_0}, welche einem beliebigen Element ζ_0 von Z durch F_T zugeordnet ist, construiren; sind nämlich η_{10}, η_{20}, ξ_{30} diejenigen, nach dem Vorigen linear construirbaren, Elemente, welche resp. ξ_1, ζ_0; ξ_2, ζ_0; η_3, ζ_0 zu einem Tripel von F_T ergänzen, so ist die Projectivität P_{ζ_0} gegeben durch die Beziehung

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_{30}, \ldots) \curlywedge (\eta_{10}, \eta_{20}, \eta_3, \ldots).$$

Nunmehr kann man jedes beliebige Element ζ von Z und jedes beliebige Element eines der beiden andern Grundgebilde zu einem Tripel von F_T ergänzen, man hat nur zu dem zweiten Element in Bezug auf die bekannte Projectivität P_ζ das entsprechende zu construiren. Dann kann man auch zu jedem beliebigen Element ξ von Ξ (und ebenso für H) die zugehörige Projectivität P_ξ (resp. P_η) auffinden; denn sind $\zeta', \zeta'', \zeta'''$ drei beliebige Elemente von Z, und η', η'', η''' diejenigen, in der eben beschriebenen Weise, construirbaren Elemente von H, welche resp. $\xi\zeta', \xi\zeta'', \xi\zeta'''$ zu einem Tripel von F_T ergänzen, so ist P_ζ gegeben durch die Beziehung

$$(\eta', \eta'', \eta''', \ldots) \curlywedge (\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots).$$

Damit kann man irgend 2 auf verschiedenen Grundgebilden gelegene Elemente zu einem Tripel von F_T ergänzen, also das ganze Tripelfeld construiren. —

---

*) Unter Verwendung einer *quadratischen* Construction sind die beiden singulären Paare β_1, γ_2; β_2, γ_1 als gemeinsame Paare von P_{ξ_1} und P_{ξ_2} direct construirbar, und damit ist die Aufgabe auf Aufgabe 2 zurückgeführt. —

5) *Von einer bicursalen Tripelreihe R_T^2 sind 6 Tripel gegeben, es sollen die übrigen Tripel gefunden werden.* Sind 6 Tripel ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ gegeben, so giebt es eine einfache lineare Mannigfaltigkeit von Tripelfeldern, einen Büschel, welche diese 6 Tripel enthalten, und welchen im Ganzen eine einfache Mannigfaltigkeit von Tripel gemeinsam sind; die Gesammtheit dieser gemeinsamen Tripel eines F_T-Büschels nannten wir eine *bicursale Tripelreihe* R_T^2 und erkannten, dass R_T^2 durch die 6 Tripel ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ i. A. eindeutig bestimmt war (cf. § 1. 2); wir wissen, dass jedes Element ξ von Ξ durch 2 Elementepaare η, ζ und η', ζ' zu einem Tripel von R_T^2 ergänzt wird, und wollen nun diese beiden Elementepaare construiren. Sind nämlich F_T und F_T' zwei Tripelfelder, welche dem obigen Büschel angehören, und welche daher R_T^2 enthalten, so sind die gesuchten beiden Elementepaare η, ζ und η', ζ' die beiden gemeinsamen Paare der beiden Projectivitäten P_ξ und P_ξ', welche in resp. F_T, F_T' dem Elemente ξ zugeordnet sind. Wählen wir nun für F_T dasjenige Tripelfeld, für welches η_1, ζ_1 ein singuläres Paar ist, und welchem die 5 Tripel $\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \ldots, \xi_6, \eta_6, \zeta_6$ angehören, und welches offenbar R_T^2 enthält, da es die 6 Tripel ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ enthält, so ist für dieses Tripelfeld nach (3) die zu ξ gehörige Projectivität P_ξ linear construirbar. Wählen wir ferner für F_T' dasjenige Tripelfeld, welchem η_6, ζ_6 als singuläres Paar und $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_5, \eta_5, \zeta_5$ als Tripel angehören, so ist auch für dieses die dem Element ξ zugeordnete Projectivität P_ξ' construirbar; mithin ergeben sich η, ζ; η', ζ' als die beiden gemeinsamen Paare der beiden bekannten Projectivitäten P_ξ, P_ξ' und sind also mittels Zirkel und Lineal construirbar.*)

Ist eines der beiden Paare — etwa η, ζ — bekannt, so ist das zweite η', ζ' *linear construirbar.* Im Besonderen lassen sich also die Paare η_i', ζ_i' $(i = 1, \ldots, 6)$, welche die 2^{ten} — von η_i, ζ_i verschiedenen — Paare bilden, welche ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ zu einem Tripel von R_T^2 ergänzen, auf diesem Wege *linear construiren.* —

6) *Von einem Tripelfelde F_T sind die 7 Tripel* ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$

*) Die Auffindung der beiden gemeinsamen Paare zweier Projectivitäten lässt sich leicht auf bekannte Constructionen zurückführen. Sind z. B. die Strahlen der beiden Strahlenbüschel R, S in zweifacher Weise projectivisch bezogen, durch die Projectivitäten P und P', so bilden die Schnittpunkte je zweier Strahlen, die sich in Bezug auf P entsprechen, einen Kegelschnitt K, und ebenso die Schnittpunkte der in Bezug auf P' entsprechenden Strahlen ein Kegelschnitt K'; K und K' gehen beide durch R und S und schneiden sich in noch zwei weiteren Punkten T, U, welche mit R und S verbunden die gesuchten gemeinsamen Paare RT, ST und RU, SU von P und P' liefern. Die Construction von T und U geschieht mittels Zirkel und Lineal (cf. Steiner: Ges. Werke Bd. I, p. 517). Ist T bekannt, so findet man U linear. —

*gegeben, welche nicht derselben bicursalen Tripelreihe angehören, es sollen die übrigen Tripel von F_T linear construirt werden.**)

Betrachten wir die bicursale Tripelreihe R_T^2, welche durch die 6 Tripel $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \ldots; \xi_6, \eta_6, \zeta_6$ bestimmt ist, und deren sämmtliche Tripel in dem gesuchten Tripelfelde enthalten sind; nach (5) können wir das zweite — von η_1, ζ_1 verschiedene — Elementepaar η_1', ζ_1' linear construiren, welches mit ξ_1 ein Tripel von R_T^2 bildet; und ebenso das zweite — von η_2, ζ_2 verschiedene — Elementepaar η_2', ζ_2', welches mit ξ_2 ein Tripel von R_T^2 bildet; die beiden Tripel ξ_1, η_1', ζ_1' und ξ_2, η_2', ζ_2' sind ebenfalls dem gesuchten Tripelfelde F_T angehörig. Betrachten wir nun die bicursale Tripelreihe $\overline{R}_T^2$, welche durch die 6 Tripel $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \ldots; \xi_5, \eta_5, \zeta_5; \xi_7, \eta_7, \zeta_7$ bestimmt ist, und construiren wir auch in Bezug auf $\overline{R}_T^2$ die beiden Elementepaare η_1'', ζ_1'' und η_2'', ζ_2'', welche — abgesehen von resp. η_1, ζ_1 und η_2, ζ_2 — die Elemente ξ_1, η_1 resp. zu einem Tripel von $\overline{R}_T^2$ ergänzen, so haben wir in der projectiven Beziehung

$$(\eta_1, \eta_1', \eta_1'', \ldots) \barwedge (\xi_1, \xi_1', \xi_1'', \ldots)$$

die Projectivität P_{ξ_1}, welche in F_T dem Elemente ξ_1 zugeordnet ist; und ebenso in der projectiven Beziehung

$$(\eta_2, \eta_2', \eta_2'', \ldots) \barwedge (\xi_2, \xi_2', \xi_2'', \ldots)$$

die dem Elemente ξ_2 in Bezug auf F_T zugeordnete Projectivität P_{ξ_2}. Demnach kennt man von F_T die Elemente ξ_1, ξ_2 und die ihnen in F_T zugeordneten Projectivitäten P_{ξ_1}, P_{ξ_2}, sowie ein Tripel ξ_3, η_3, ζ_3, wodurch die weitere Construction, auf die in (4) behandelte Aufgabe zurückgeführt ist. — Die singulären Paare β_1, γ_2 und β_2, γ_1 ergeben sich als gemeinsame Paare von P_{ξ_1}, P_{ξ_2}, die beiden noch fehlenden singulären Elemente α_1, α_2 findet man linear nach (2); sind die singulären Elemente bestimmt, so folgen die übrigen Tripel von F_T sehr einfach aus (1); dieselben lassen sich aber auch direct und *mit alleiniger Hilfe des Lineals* aus (4) construiren, wenn auch etwas umständlicher. —

Anmerkung: *Sind von den gegebenen Tripeln 4 derselben unicursalen Tripelreihe R_T^1 angehörig, also die ganze R_T^1 in F_T enthalten, so sind die 6 singulären Elemente linear construirbar.* In der That, wenn

$$(\xi_4\, \xi_5\, \xi_6\, \xi_7) \barwedge (\eta_4\, \eta_5\, \eta_6\, \eta_7) \barwedge (\xi_4\, \xi_5\, \xi_6\, \xi_7),$$

so hat die nach dem Vorigen linear construirbare Projectivität P_{ξ_4} mit der Projectivität

$$(\eta_4\, \eta_5\, \eta_6\, \eta_7 \ldots) \barwedge (\xi_4\, \xi_5\, \xi_6\, \xi_7 \ldots)$$

*) Vgl. Le Paige: Note sur l'homographie du troisième ordre; Bull. de l'acad. roy. de Belgique 3me Ser. Tom. V 1883. wo die betr. Construction mit Hilfe von Constructionen der Fläche II. O. geleistet wird, während es uns darauf ankam, die Construction mit den einfachsten Mitteln aufzubauen, um sie dann ihrerseits zur Construction der Flächen II. und III. Ordnung zu verwenden.

erstens das Elementepaar η_1', ξ_1' gemeinsam, für welches

$$(\xi_4\,\xi_5\,\xi_6\,\xi_1) \barwedge (\eta_4\,\eta_5\,\eta_6\,\eta_1') \barwedge (\zeta_4\,\zeta_5\,\zeta_6\,\xi_1'),$$

und zweitens eines der beiden singulären Paare, das wir mit β_1, γ_2 bezeichnen wollen, und das linear construirbar ist; dann sind aber nach (3) alle weiteren singulären Elemente linear construirbar. —

7) *Von einem singulären Tripelfeld F_T sind gegeben das singuläre Tripel α, β, γ und drei weitere Tripel ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3; es sollen die übrigen Tripel gefunden werden**). — Wir sahen § 1. 7), dass sich 3 Strahlenbüschel Ξ', H', Z' in derselben Ebene, deren Scheitel S_ξ, $S_{\eta'}$, S_ζ in gerader Linie liegen, auffinden lassen, welche resp. auf die 3 gegebenen Grundgebilde Ξ, H, Z projectivisch so bezogen sind, dass:

$$(\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdot, \cdot) \barwedge (\alpha', \xi_1', \xi_2', \xi_3', \ldots),$$
$$(\beta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots) \barwedge (\beta', \eta_1', \eta_2', \eta_3', \ldots),$$
$$(\gamma, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots) \barwedge (\gamma', \zeta_1', \zeta_2', \zeta_3', \ldots);$$

dabei bedeuten:

$\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$ 3 Strahlen resp. durch $S_\xi, S_{\eta'}, S_\zeta$, welche sich in einem Punkte P_1 schneiden,

$\xi_2', \eta_2', \zeta_2'$ 3 Strahlen resp. durch $S_\xi, S_{\eta'}, S_\zeta$, welche sich in einem Punkte P_2 schneiden;

$\xi_3', \eta_3', \zeta_3'$ 3 Strahlen resp. durch $S_\xi, S_{\eta'}, S_\zeta$, welche sich in einem Punkte P_3 schneiden,

und ferner war:

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \overline{S_\xi\, S_{\eta'} S_\zeta}.$$

Die Tripel ξ, η, ζ, welche in diesen Beziehungen 3 Strahlen ξ', η', ζ', die sich in einem Punkte P schneiden, entsprechen, bilden ein singuläres Tripelfeld, welches das Tripel α, β, γ als singuläres Tripel besitzt, und welchem die 3 Tripel ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1, 2, 3)$ angehören. Dasselbe ist also mit dem gesuchten singulären Tripelfelde identisch, und man kann in der früher gezeigten Weise jedes Elementepaar auf 2 Grundgebilden durch ein Element auf dem dritten Grundgebilde zu einem Tripel ergänzen. —

§ 4.

Die Erzeugnisse dreier trilinearer Ebenenbüschel.

Die vorangeschickten Ergebnisse sollen im Folgenden dazu verwandt werden, die Erzeugnisse dreier trilinearer Ebenenbüschel zu

*) Vgl. Hauck: Die trilineare Beziehung zwischen 3 einstufigen Grundgebilden; Cr. Journ. Bd. 108, p. 25.

untersuchen. Berücksichtigt man dabei die verschiedenen Fälle der gegenseitigen Lage der Axen der 3 Ebenenbüschel, sowie die verschiedenen Arten der trilinearen Beziehung selbst, so geben 3 trilineare Ebenenbüschel einer verhältnissmässig grossen Anzahl von Raumgebilden ihre Entstehung. Die sämmtlichen Arten der cubischen Flächen, sowohl die allgemeinen, wie die mit 1, 2, 3, 4 Doppelpunkten, unter denen auch biplanare und uniplanare auftreten dürfen, ferner die Regelflächen und Kegel III. Ordnung finden auf diese Weise ihre gemeinsame Erzeugung. Aber auch die reduciblen F^3 ergeben sich ebenso ungezwungen als Erzeugnisse trilinearer Ebenenbüschel, so dass dieser Weg auch zu einer bemerkenswerthen Erzeugung der Fläche II. O., als eines Bestandtheiles einer reduciblen F^3, hinführt. Ist so in der trilinearen Beziehung ein gemeinsamer Erzeugungsmechanismus der sämmtlichen Arten der F^2 und F^3 gewonnen, so lässt sich die gesammte constructive Theorie der genannten Gebilde aus einem einheitlichen Gesichtspunkte behandeln, und auf die vorangeschickte Behandlung der trilinearen Grundgebilde zurückführen.

1) *Das Erzeugniss dreier trilinearer Ebenenbüschel mit 3 windschiefen Axen, die allgemeine* F^3. Sind Ξ, H, Z 3 Ebenenbüschel, die 3 *windschiefen* Geraden g_ξ, g_η, g_ζ ihre Axen, ξ eine Ebene von Ξ, η, ζ solche von resp. H, Z, und setzen wir diese 3 Ebenenbüschel in eine allgemeine trilineare Beziehung, so bilden die Tripel ξ, η, ζ entsprechender Ebenen ein Tripelfeld F_T, und die Punkte, in welchen sich die Ebenen eines Tripels schneiden, erzeugen eine Fläche III. O. F^3, welche die Geraden g_ξ, g_η, g_ζ enthält, und umgekehrt wird jede F^3 aus 3 windschiefen, auf ihr liegenden Geraden durch Ebenentripel projicirt, welche ein F_T bilden.*) Sind α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 die 6 singulären Ebenen von F_T, so liegen auch die 6 Geraden $(\alpha_1\beta_2)$, $(\beta_1\gamma_2)$, $(\gamma_1\alpha_2)$; $(\alpha_2\beta_1)$, $(\beta_2\gamma_1)$, $(\gamma_2\alpha_1)$, in welchen sich die Ebenen eines singulären Paares schneiden, auf der F^3, und es sind dies die *einzigen* Geraden, welche von den 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ *nur* 2 schneiden. Die früher gelehrten Constructionen von F_T (cf. § 3) gestatten nunmehr die F^3 linear zu construiren, falls von ihr gegeben sind:

1) Die 9 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ; $(\alpha_1\beta_2)$, $(\beta_1\gamma_2)$, $(\gamma_1\alpha_2)$; $(\alpha_2\beta_1)$, $(\beta_2\gamma_1)$, $(\gamma_2\alpha_1)$ und 1 Punkt. 2) Die 5 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ; $(\beta_1\gamma_2)$, $(\beta_2\gamma_1)$ und 3 Punkte. 3) Die 4 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ; $(\beta_1\gamma_2)$ und 5 Punkte. 4) Die 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ und 7 Punkte. —

Die übrigen Geraden der F^3 zerfallen in solche, welche von den 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ alle 3, oder nur eine oder gar keine treffen, da die 6 Geraden, welche nur 2 der Geraden g_ξ, g_η, g_ζ treffen, durch die 6 singulären Paare von F_T erhalten und durch eine quadratische Con-

*) cf. Schubert, l. c. p. 466.

struction gefunden werden. Die 3 Geraden von F^3 g_1, g_2, g_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ gleichzeitig schneiden, werden erhalten als die 3 gemeinsamen Tripel von F_T und derjenigen unicursalen Tripelreihe R_T^1, welche gebildet wird von den Ebenentripeln ξ, η, ζ, welche sich in einer Geraden schneiden; dieselben werden (cf. § 2. 3) durch eine cubische Construction erhalten. — Zweitens ergeben sich die Geraden, welche nur eine der 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ schneiden, auf linearem Wege. Die 3 Geraden z. B., welche nur g_ξ nicht aber g_η, g_ζ schneiden, sind die dritten Geraden, in welchen die Ebenen $(g_\xi g_1)$, $(g_\xi g_2)$, $g_\xi g_3)$ die F^3 schneiden. — Die 6 Geraden schliesslich, welche zu g_ξ, g_η, g_ζ windschief sind, erhält man folgendermassen: Ist g eine solche Gerade, so werden die Punkte von g aus g_ξ, g_η, g_ζ durch die Ebenentripel einer R_T^1 projicirt, welche in F_T enthalten ist; in dieser R_T^1 ereignet es sich zweimal, dass sich die 3 Ebenen eines Tripels in einer Geraden treffen, nämlich in den beiden gemeinsamen Geraden von $g, g_\xi, g_\eta, g_\zeta$; diese beiden Geraden sind auf F^3 gelegen, schneiden g_ξ, g_η, g_ζ, sind also entweder g_2, g_3, oder g_3, g_1, oder g_1, g_2. Bestimmt man daher diejenigen R_T^1, welche in F_T enthalten sind, und welchen z. B. die Tripel $(g_\xi g_2)$, $(g_\eta g_2)$, $(g_\zeta g_2)$ und $(g_\xi g_3)$, $(g_\eta g_3)$, $(g_\zeta g_3)$ angehören, so erfüllen die Schnittpunkte entsprechender Ebenen eine zu g_ξ, g_η, g_ζ windschiefe, der F^3 angehörige Gerade. Wir wissen (cf. § 2. 2), dass es genau 2 in F_T enthaltene R_T^1 giebt, welchen 2 gegebene Tripel angehören, also erhalten wir 2 der in Rede stehenden Geraden, die wir durch g_{12}, g_{21} bezeichnen. In derselben Weise gelangen wir — unter analoger Benutzung von g_3, g_1 sowie von g_1, g_2 — zu den 4 weiteren Geraden dieser Art: g_{31}, g_{13}; g_{12}, g_{21}. Diese 6 letzten Geraden ergeben sich linear, wenn die früheren Geraden bekannt sind. Also gilt: *Kennt man von einer F^3 drei windschiefe Gérade g_ξ, g_η, g_ζ und 7 Punkte, so ergeben sich die 3 Geraden von F^3, welche g_ξ, g_η, g_ζ sämmtlich schneiden, durch eine cubische Construction; die 6 Geraden, welche nur 2 der 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ schneiden, findet man auf quadratischem Wege, während die 9 Geraden, welche nur eine, und die 6 Geraden, welche keine der Geraden g_ξ, g_η, g_ζ schneiden, linear construirbar sind.* — Sind 4 windschiefe Geraden $g_\xi, g_\eta, g_\zeta, g_{12}$ und 3 Punkte der Fläche gegeben, so geht die cubische Construction in eine quadratische, die quadratische in eine lineare über (cf. § 3. 6), Anmerkung), so dass, *wenn 4 windschiefe Gerade und 3 Punkte von F^3 gegeben sind, sich die 23 übrigen Geraden der Fläche mit Zirkel und Lineal construiren lassen.*

— Sind 5 windschiefe Geraden von F^3: $g_\xi, g_\eta, g_\zeta, g_{12}, g_{23}$ gegeben, die aber eine gemeinsame Secante g_2 besitzen müssen, so ist dadurch die F^3 bestimmt. In diesem Falle wird auch die einzige bisher quadratische Construction *linear und die 22 übrigen Geraden der Fläche werden dann*

*mit alleiniger Hilfe des Lineals construirbar.**) — Betrachten wir noch ganz allgemein diejenigen R_T^1, welche in F_T enthalten sind, so erzeugen dieselben die auf der F^3 befindlichen Raumcurven III. O. (R^3), welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben. Die in § 2. 2 bewiesenen Sätze ergeben daher, dass 2 Netze solcher R^3 auf F^3 existiren; die R^3 des einen Netzes schneiden von den 6 Geraden $(\alpha_1\beta_2)$, $(\beta_1\gamma_2)$, $(\gamma_1\alpha_2)$; $(\alpha_2\beta_1)$, $(\beta_2\gamma_1)$, $(\gamma_2\alpha_1)$ die drei ersten, die R^3 des andern die 3 letzten. Durch 2 beliebige Punkte von F^3 geht genau eine R^3 aus jedem der beiden Netze. Zwei R^3 desselben Netzes haben *einen* Punkt, zwei R^3 aus verschiedenen Netzen haben 2 Punkte gemeinsam.

2) *Das Erzeugniss dreier singulär-trilinearer Ebenenbüschel; die F^3 mit einem Doppelpunkt.* Sei nunmehr die trilineare Beziehung, welche die 3 Ebenenbüschel Ξ, H, Z verknüpft, eine *singuläre* (cf. § 1. 4). Die Ebenen des singulären Tripels seien α, β, γ; wir setzen voraus, dass dieselben sich nicht in einer Geraden schneiden, ein Fall der später besonders behandelt wird. Auch hier wird durch die Punkte, in welchen sich die Ebenen ξ, η, ζ eines Tripels von F_T schneiden, eine F^3 erzeugt. Der Schnittpunkt $(\alpha\beta\gamma)$ der 3 singulären Ebenen ist aber hier *ein Doppelpunkt* von F^3; denn ist g eine Gerade durch ihn, so werden deren Punkte aus g_ξ, g_η, g_ζ durch eine R_T^1 projicirt, die mit dem die F^3 erzeugenden singulären Tripelfelde F_T das singuläre Tripel, und also (nach § 2. 5) nur ein einziges weiteres Tripel gemeinsam hat; also schneidet g die F^3 nur noch in *einem*, von $(\alpha\beta\gamma)$ verschiedenen, Punkte, also ist $(\alpha\beta\gamma)$ ein Doppelpunkt von F^3. Es gilt mithin: *Drei singulär-trilineare Ebenenbüschel erzeugen eine F^3, welche den Schnittpunkt des singulären Tripels zum Doppelpunkte hat;* und ebenso ergiebt sich umgekehrt: *Jede F^3 mit einem Doppelpunkt wird aus* 3 *windschiefen, auf ihr enthaltenen Geraden, welche jedoch nicht mit dem Doppelpunkt auf demselben Hyperboloid liegen dürfen, durch* 3 *singulär-trilineare Ebenenbüschel projicirt.* — Die 3 Geraden g_1, g_2, g_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ sämmtlich schneiden, werden, wie früher, gefunden; die 6 Geraden jedoch, welche nur 2 der 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ schneiden, fallen paarweise zusammen in die 3 Geraden $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$, $(\alpha\beta)$. Ebenso fallen die 6 Geraden, welche g_ξ, g_η, g_ζ nicht schneiden, paarweise zusammen, da sie zu g_1, g_2, g_3 dieselbe Beziehung haben, wie $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$, $(\alpha\beta)$ zu g_ξ, g_η, g_ζ; daraus folgt, *dass jede durch den Doppelpunkt gehende Gerade von F^3 doppelt zu zählen ist*, um als Gesammtzahl der Geraden von F^3 wieder 27 zu erhalten.**) — Die Aufgabe eine F^3 mit einem Doppelpunkt zu construiren, von welcher gegeben sind, der

---

*) cf. Salmon-Fiedler: Analyt. Geometrie des Raumes II. Bd.. p. 402 3te Aufl.

**) cf. Salmon: Cambridge and Dublin Math. Journ. IV, p. 256; sowie Cayley: Phil. Transact. 1869.

Doppelpunkt, 3 windschiefe Gerade, die nicht mit dem Doppelpunkte auf demselben Hyperboloid liegen, und 3 einfache Punkte, wird unmittelbar durch § 3. 7) gelöst. — Die R^3 auf F^3, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, werden aus g_ξ, g_η, g_ζ durch Ebenentripel einer in F_T enthaltenen R^1_T projicirt; nach den Sätzen in § 2. 6) ergiebt sich daher: *Sind g_ξ, g_η, g_ζ 3 windschiefe Gerade einer F^3 mit einem Doppelpunkt, welche nicht mit dem Doppelpunkte auf demselben Hyperboloid liegen, so muss jede R^3 der Fläche, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten hat, den Doppelpunkt enthalten.*

3) *Das Erzeugniss dreier trilinearer Ebenenbüschel mit 2 sich schneidenden Axen; die F^3 mit 1 Doppelpunkt.* Setzen wir nunmehr voraus, dass sich die beiden Axen g_ξ, g_η der beiden Ebenenbüschel Ξ, H im Punkte D schneiden, während g_ζ mit g_ξ und g_η windschief ist, dann erzeugen ebenfalls die drei trilinearen Ebenenbüschel eine F^3, der Schnittpunkt D von g_ξ, g_η ist jedoch ein *Doppelpunkt*, da jede durch D gehende Gerade g ausser in D nur noch in *einem* weiteren Punkte die F^3 schneidet, wie sich unmittelbar aus der Definition der trilinearen Beziehung ergiebt. Auch umgekehrt erkennt man, dass jede F^3 mit 1 Doppelpunkt D aus 2 ihrer Geraden, die sich in D schneiden, und einer zu diesen windschiefen Geraden durch 3 trilineare Ebenenbüschel projicirt wird. *Der Tangentialkegel* im Doppelpunkt wird erzeugt durch die Schnittgeraden derjenigen projectiven Ebenenpaare ξ, η, welche die Ebene $(g_\zeta D)$ zu einem Tripel der trilinearen Beziehung ergänzen; dieser Kegel ist *linear construirbar*, wenn die F^3 durch ihre trilineare Erzeugung gegeben ist.

Um einen *biplanaren Doppelpunkt* zu erzeugen, muss dieser Kegel in ein Ebenenpaar zerfallen; das tritt ein (cf. § 1. 2), falls $(g_\zeta D)$ eine der beiden singulären Ebenen γ_1, γ_2 des Ebenenbüschels Z ist. Ist also z. B. $(g_\zeta D) = \gamma_1$, so berühren die beiden Ebenen α_2, β_2 die F^3 im Doppelpunkt, der also in der That biplanar wird. Ist im Besondern die trilineare Beziehung so beschaffen, dass $(g_\zeta D) = \gamma_1$ eine singuläre Ebene wird, und dass ferner die beiden singulären Ebenen α_2, β_2 sich in der gemeinsamen Ebene $(g_\xi g_\eta)$ der beiden Ebenenbüschel Ξ, H vereinigen, so dass $(g_\xi g_\eta) = a_2 = \beta_2$, dann wird offenbar D ein *uniplanarer Doppelpunkt.*

4) *Das Erzeugniss dreier trilinearer Ebenenbüschel, bei welchen die Axe des einen die beiden andern Axen schneidet; die F^3 mit 2 Doppelpunkten.*

Sind g_ξ, g_η, g_ζ nunmehr so beschaffen, dass g_η von g_ξ und g_ζ resp. in D_1, D_2 geschnitten wird, während g_ξ und g_ζ windschief sind, dann erzeugen die Tripel entsprechender Ebenen eine F^3, *welche D_1 und D_2 zu Doppelpunkten* hat; andererseits wird auch umgekehrt jede F^3 mit 2 Doppelpunkten aus deren gerader Verbindungslinie und 2 windschiefen

durch je einen der Doppelpunkte gehenden Geraden der Fläche durch 3 trilineare Ebenenbüschel projicirt. Die § 3. 6) gegebene Construction liefert also die lineare Lösung der Aufgabe: Eine F^3 mit 2 Doppelpunkten aus den beiden Doppelpunkten, 7 einfachen Punkten und 2 windschiefen Geraden durch die beiden Doppelpunkte zu construiren.

Die 16 Geraden der F^3 lassen sich sehr einfach ableiten; man erkennt, *dass, falls 7 einfache Punkte der Fläche, die beiden Doppelpunkte und 2 windschiefe Gerade von F^3, durch jeden Doppelpunkt eine, gegeben sind, sich dann die übrigen 14 Geraden mit Zirkel und Lineal allein construiren lassen.*

Der Fall, dass einer oder beide Doppelpunkte biplanar werden, wird erhalten, indem man eine der beiden Ebenen $(g_\xi g_\eta)$, $(g_\zeta g_\eta)$ oder beide zu singulären Ebenen der Büschel Ξ resp. Z für die trilineare Beziehung wählt.

5) *Das Erzeugniss dreier trilinearer Ebenenbüschel, deren Axen in derselben Ebene liegen; die F^3 mit 3 Doppelpunkten.* Seien jetzt g_ξ, g_η, g_ζ derselben Ebene angehörig, so dass sie sich paarweise in den Punkten $D_\xi = (g_\eta g_\zeta)$, $D_\eta = (g_\zeta g_\xi)$, $D_\zeta = (g_\xi g_\eta)$ schneiden, *dann erzeugen die 3 trilinearen Ebenenbüschel Ξ, H, Z eine F^3, welche die 3 Doppelpunkte D_ξ, D_η, D_ζ besitzt;* aber auch die Umkehrung ergiebt sich leicht: *Jede F^3 mit 3 Doppelpunkten wird aus deren 3 Verbindungslinien durch 3 trilineare Ebenenbüschel projicirt.* Die Construction in § 3. 6) auf unseren Fall angewandt, liefert die lineare Lösung der Aufgabe: *Eine F^3 mit 3 Doppelpunkten zu construiren, wenn die 3 Doppelpunkte und 7 einfache Punkte gegeben sind.* Ist die Ebene $D_\xi D_\eta D_\zeta$ als Ebene des Büschels Ξ durch α, als solche von H, Z rsp. durch β, γ bezeichnet, so gilt: *Die Tangentialkegel in den 3 Doppelpunkten werden erzeugt von denjenigen 3 Paaren projectiver Ebenenbüschel, welche den 3 Ebenen α, β, γ in Bezug auf die trilineare Beziehung zugeordnet sind; sie sind linear construirbar.*

Ferner folgt: Die Ebenen α', β', γ', welche die Ebenenpaare $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ zu einem Tripel der trilinearen Beziehung ergänzen, schneiden die F^3 in den resp. Geraden g_ξ, g_η, g_ζ *zweifach*, und noch in je einer weiteren Geraden $g_{\alpha'}$, $g_{\beta'}$, $g_{\gamma'}$; diese 3 *linear construirbaren* Geraden $g_{\alpha'}$, $g_{\beta'}$, $\gamma_{\gamma'}$ sind die einzigen Geraden der F^3, welche die Doppelpunkte nicht enthalten. Die 6 Geraden schliesslich, welche — abgesehen von g_ξ, g_η, g_ζ — einen Doppelpunkt enthalten, werden durch die singulären Ebenenpaare der trilinearen Beziehung — mittelst einer quadratischen Construction — erhalten; also gilt: *Sind 7 einfache Punkte und 3 Doppelpunkte der F^3 gegeben, so sind alle 12 Geraden der F^3 mit Zirkel und Lineal construirbar.* — Den Fall, dass die 3 Doppelpunkte theilweise oder sämmtlich *biplanar* werden, kann man dadurch hervorrufen, dass man die 3 coincidenten Ebenen α, β, γ

theilweise oder sämmtlich zu singulären Ebenen der trilinearen Beziehung wählt, jedoch so, dass niemals 2 dieser 3 Ebenen ein singuläres Paar bilden. —

6) Machen wir — unter Beibehaltung aller früheren Bezeichnungen — noch die weitere Specialisirung, dass wir die trilineare Beziehung *singulär* annehmen, so folgt analog, wie § 4. 2), dass der Schnittpunkt der 3 singulären Ebenen α_1, β_1, γ_1 ein vierter Doppelpunkt wird, also gilt: *Drei singulär-trilineare Ebenenbüschel, deren Axen in derselben Ebene liegen, erzeugen eine F^3 mit 4 Doppelpunkten, und zwar werden diese Doppelpunkte gebildet durch die 3 Schnittpunkte der 3 Axen, und durch den Schnittpunkt der 3 singulären Ebenen.* Ebenso gilt umgekehrt: *Jede F^3 mit 4 Doppelpunkten wird aus 3 in einer Ebene gelegenen Verbindungslinien je zweier Doppelpunkte durch 3 singulär-trilineare Ebenenbüschel projicirt.* Die früher gelöste Aufgabe § 3. 7) führt zur linearen Construction *einer F^3 mit 4 Doppelpunkten aus diesen 4 Doppelpunkten und 3 einfachen Punkten.* Auch *die sämmtlichen Geraden der Fläche* sind *linear* construirbar, wenn die 4 Doppelpunkte und 3 einfache Punkte gegeben sind; denn abgesehen von den 6 Verbindungslinien zweier Doppelpunkte, sind hier nur die 3 Geraden $g_{\alpha'}$, $g_{\beta'}$, $g_{\gamma'}$ vorhanden, welche dieselbe Bedeutung haben, wie die gleichbezeichneten Geraden im vorigen Falle. — Da jeder in einem singulären Tripelfelde enthaltenen R_T^1 das singuläre Tripel angehört, so erhalten wir den Satz: *Jede R^3 auf einer F^3 mit 4 Doppelpunkten, welche 3 der Doppelpunkte enthält, enthält auch den 4ten.* Es ergiebt sich übrigens unschwer, dass andere R^3 auf der F^3, als durch die 4 Doppelpunkte, nicht existiren. —

7) *Das Erzeugniss dreier singulär-trilinearer Ebenenbüschel, bei welchen sich die 3 Ebenen des singulären Tripels in einer Geraden schneiden; die Regelfläche III. O.* Wir wählen nunmehr die Axen g_ξ, g_η, g_ζ wieder zu einander windschief, jedoch sei die trilineare Beziehung eine *singuläre* und zwar so, dass sich die 3 singulären Ebenen α, β, γ *in einer Geraden d schneiden.* Das Erzeugniss dieser Beziehung ist wieder eine F^3, welche jedoch die Gerade d zur *Doppelgeraden* hat, also eine *cubische Regelfläche**). In der That ist jeder Punkt von d ein Doppelpunkt, denn jede Gerade durch ihn schneidet die F^3 nur noch in einem weiteren Punkt, was man genau, wie in § 4. 2), erkennt. Auch gilt umgekehrt: *Jede cubische Regelfläche wird aus 3 windschiefen Erzeugenden durch 3 singulär-trilineare Ebenenbüschel projicirt, deren 3 singuläre Ebenen sich in der Doppelgeraden schneiden.* — Diejenigen Ebenentripel ξ, η, ζ, welche sich in einer Geraden schneiden, bilden eine R_T^1, welche mit dem die F^3 erzeugenden singulären Tripelfeld

*) cf. Salmon-Fiedler: Analyt. Geometrie des Raumes, III. Aufl. II. Bd., p. 365.

das singuläre Tripel α, β, γ und folglich (nach § 2. 5) nur noch ein weiteres Tripel gemein hat, die Schnittgerade l der Ebenen dieses Tripels ist die *Leitgerade* der Regelfläche. Die *Erzeugenden* der Regelflächen ergeben sich aus denjenigen R_T^1, welche die beiden Tripel α, β, γ und $(g_\xi l), (g_\eta l), (g_\zeta l)$ enthalten, und dem die F^3 erzeugenden singulären Tripelfeld angehören; diese R_T^1 bilden eine einfache Mannigfaltigkeit, eine jede derselben erzeugt durch die Schnittpunkte der Ebenen ihrer Tripel eine Erzeugende der Regelfläche. Somit ergiebt sich: *Kennt man von einer cubischen Regelfläche* 3 *Punkte*, 3 *windschiefe Erzeugende und die Doppelgerade, so kann man nach* § 3 *linear construiren alle Punkte der Fläche, die Leitgerade und alle Erzeugenden.*

Anmerkung: Die cubische Regelfläche wird auch erzeugt durch 3 trilineare Ebenenbüschel, von denen 2 dieselbe Axe haben, doch ergiebt sich, dass diese Erzeugung im Wesentlichen mit der von Herrn E. Weyr*) ausführlich behandelten Erzeugung durch ein-zweideutige Ebenenbüschel identisch ist.

8) *Das Erzeugniss dreier trilinearer Ebenenbüschel, deren Axen sich in einem Punkte schneiden; Kegel III. O.* Sind Ξ, H, Z 3 trilineare Ebenenbüschel, deren Axen g_ξ, g_η, g_ζ sich in einem Punkte D schneiden, denn wird auch in diesen Falle eine F^3 erzeugt; die Ebenen ξ durch g_ξ schneiden aber offenbar diese F^3 ausser in g_ξ noch in zwei Geraden g, g'; mithin ist D so beschaffen, dass jede durch ihn gehende Gerade entweder der F^3 angehört, oder sie in keinem weiteren Punkte schneidet; also ist D ein *dreifacher Punkt* und die erzeugte F^3 ein *Kegel III. O.*

Ist die trilineare Beziehung eine singuläre und zwar so, dass die 3 singulären Ebenen sich in einer Geraden schneiden, so erhalten wir auf diesem Wege den *Kegel III. O. mit einer Doppelgeraden.* —

9) Auch alle *reduciblen* F^3 lassen sich durch 3 trilineare Ebenenbüschel erzeugen; hier sei nur erwähnt eine Erzeugung der in eine Ebene und eine Fläche II. Ordnung ausgearteten F^3, welche eine sehr verwendbare Erzeugung der Flächen II. O. liefert, und unmittelbar zu deren Construction aus 9 ihrer Punkte hinführt**). Schneiden sich nämlich die 3 Axen g_ξ, g_η, g_ζ paarweise in den 3 Punkten

$$D_\xi = (g_\eta g_\zeta), \quad D_\eta = (g_\zeta g_\xi), \quad D_\zeta = (g_\xi g_\eta),$$

und ist die Ebene $D_\xi D_\eta D_\zeta$ als Ebene von Ξ durch α, als solche von H, Z durch β, γ bezeichnet, und betrachtet man eine trilineare Beziehung der 3 Ebenenbüschel Ξ, H, Z, welcher *das Tripel* α, β, γ

*) cf. E. Weyr: Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen III. O. Leipzig 1870.

**) Herr Le Paige hat in seinen Arbeiten über die Homographie III. O. mehrfach diese Erzeugung verwendet, cf. unter Anderem Bulletin de l'académie de Belgique III. Ser. Tom. 5. 1883.

angehört, so wird die durch die trilineare Beziehung erzeugte F^3 in die Ebene $(g_\xi g_\eta g_\zeta)$ *und eine Fläche II. O. zerfallen, welche die Punkte* D_ξ, D_η, D_ζ *enthält.* Andererseits gilt auch umgekehrt: *Jede Fläche II. O. wird aus den* 3 *Verbindungslinien von* 3 *ihrer Punkte durch* 3 *trilineare Ebenenbüschel projicirt.* Daraus folgt nun ganz unmittelbar *eine Construction der* F^2 *aus* 9 *ihrer Punkte* D_ξ, D_η, D_ζ; $P_1, P_2, \ldots, P_6$; denn die F^2 erzeugende trilineare Beziehung der 3 Ebenenbüschel

$$g_\xi = (D_\eta D_\zeta), \quad g_\eta = (D_\zeta D_\xi), \quad g_\zeta = (D_\xi D_\eta)$$

ist vollständig bestimmt durch die 7 bekannten Tripel

$$(g_\xi P_i), \ (g_\eta P_i), \ (g_\zeta P_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

und $(g_\xi D_\xi)$, $(g_\eta D_\eta)$, $(g_\zeta D_\zeta)$, und damit ist die Construction der F^2 zurückgeführt auf die von uns geleistete Construction der trilinearen Beziehung aus 7 gegebenen Tripeln (cf. § 3. 6). — Die Geraden der F^2 ergeben sich aus denjenigen R^1_T, welche dem die F^2 erzeugenden Tripelfeld angehören, und das Tripel α, β, γ enthalten. Die gesammte Theorie der auf der F^2 enthaltenen Geraden folgt dann unmittelbar aus den § 2. 2) entwickelten Sätzen. —

Breslau, im November 1893.

Ueber bedingte Convergenz unendlicher Producte.

Von

Alfred Pringsheim in München.

In einem früher von mir publicirten Aufsatze*) habe ich den Versuch gemacht, die Lehre von der Convergenz unendlicher Producte *rein elementar*, insbesondere also unabhängig von der Theorie der Logarithmen und deren Entwickelung in Potenzreihen, darzustellen, und ich habe daselbst u. a. auch einen von Cauchy**) mit Hülfe der logarithmischen Reihe abgeleiteten Satz über *bedingte* Convergenz eines unendlichen Productes ohne Anwendung dieses Hülfsmittels bewiesen. Derselbe lautet:***)

> *Convergirt die Reihe* $\sum c_\nu$ *(wo die* c_ν *reelle Grössen bedeuten) in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung, so ist das Product* $\prod(1+c_\nu)$ *in der entsprechenden Anordnung convergent oder divergent nach Null, je nachdem die Reihe* $\sum c_\nu^2$ *convergirt oder divergirt.*

Wie ich nun neuerdings bemerkt habe, gestatten die zum Beweise dieses Satzes erforderlichen und auch für manche anderen Zwecke nützlichen Hülfsformeln†) eine so erheblich einfachere Ableitung, dass deren Mittheilung vielleicht nicht ganz ohne Interesse erscheinen mag.

Definirt man die Exponentialgrösse e^a durch die Gleichung:††)

$$e^a = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

*) *Ueber die Convergenz unendlicher Producte.* Math. Ann. Bd. 33, p. 120 ff.

**) *Analyse algébrique* p. 653.

***) a. a. O p. 150.

†) a. a. O. p. 142—148.

††) Ich verzichte absichtlich auf die Darstellung von e^a durch die bekannte Reihe, da es mir methodisch consequenter erscheint, die Convergenztheorie für unendliche Reihen und Producte *vor* der Einführung *specieller Reihenentwickelungen* zu begründen. Vgl. Math. Ann. B. 35, p. 315.

so ergeben sich durch Anwendung des binomischen Satzes für ganze Exponenten und Uebergang zur Grenze $n = \infty$ unmittelbar die beiden Ungleichungen:

(1) $$e^a \geqq 1 + a + \tfrac{1}{2} a^2 \qquad \text{für: } 0 < a,$$

(2) $$e^a < 1 + a + \tfrac{1}{2} \frac{a^2}{1-a} \qquad \text{für: } 0 < a < 1.$$

Schreibt man (1) folgendermassen:

$$e^a \geqq (1+a)\left(1 + \frac{a^2}{2(1+a)}\right)$$

so folgt, wenn man auch hier a der Bedingung unterwirft, ein ächter Bruch zu sein, sodass also $1 + a < 2$ und

$$e^a > (1+a)\left(1 + \tfrac{1}{4} a^2\right)$$

ist:

(3) $$1 + a < \frac{e^a}{1 + \frac{1}{4} a^2}. \qquad (0 < a < 1).$$

Andererseits folgt aus Ungl. (2):

$$e^a < \frac{1}{1-a}\left(1 - \tfrac{1}{2} a^2\right) < \frac{1}{1-a}\left(1 - \tfrac{1}{4} a^2\right)$$

also:

$$1 - a < e^{-a}\left(1 - \tfrac{1}{4} a^2\right)$$

und $\left(\text{da für: } 0 < b < 1 \text{ stets: } 1 - b < \frac{1}{1+b}\right)$ um so mehr:

(4) $$1 - a < \frac{e^{-a}}{1 + \frac{1}{4} a^2} \qquad (0 < a < 1).$$

Bedeutet also c einen beliebigen *positiven oder negativen* ächten Bruch, so ergiebt die Zusammenfassung von Ungl. (3) und (4):

(5) $$1 + c < \frac{e^c}{1 + \frac{1}{4} c^2} \qquad (0 < |c| < 1).$$

Hat man jetzt eine Reihe ächter Brüche mit beliebigem Vorzeichen: $c_0, c_1, \ldots, c_n$ und setzt:

(6) $$\sum_0^n{}_\nu c_\nu = s_n,$$

so folgt zunächst aus (5):

$$\prod_0^n{}_\nu (1 + c_\nu) < \frac{e^{s_n}}{\prod_0^n{}_\nu \left(1 + \frac{1}{4} c_\nu^2\right)}$$

und wenn man noch:

$$\sum_0^n c_\nu^2 = S_n \tag{7}$$

setzt, *a fortiori:*

$$\prod_0^n (1+c_\nu) < \frac{e^{s_n}}{1+\frac{1}{4}S_n} \tag{8}$$

und ebenso:

$$\prod_0^n (1-c_\nu) < \frac{e^{-s_n}}{1+\frac{1}{4}S_n}. \tag{9}$$

Ist nun:

$$|s_n| \leqq \sigma < p, \tag{10}$$

wo p eine ganze Zahl bedeutet, so ergiebt sich ferner aus (8) und (9):

$$\prod_0^n (1 \pm c_\nu)\left(1-\frac{\sigma}{p}\right)^p < \frac{e^{\pm s_n - \sigma}}{1+\frac{1}{4}\left(S_n+\frac{\sigma^2}{p}\right)} < \frac{1}{1+\frac{1}{4}S_n}$$

also:

$$\prod_0^n (1\pm c_\nu) < \frac{1}{\left(1-\frac{\sigma}{p}\right)^p\left(1+\frac{1}{4}S_n\right)} \tag{11}$$

und daher speciell für $p = 1$, d. h. falls σ ein ächter Bruch ist:

$$\prod_0^n (1\pm c_\nu) < \frac{1}{(1-\sigma)\left(1+\frac{1}{4}S_n\right)}. \tag{12}$$

Aus der letzten Ungleichung folgt dann noch *a fortiori:*

$$\prod_0^n (1\pm c_\nu) < \frac{1}{1-\sigma} \quad \text{falls:} \quad \left|\sum_0^n c_\nu\right| < \sigma < 1. \tag{13}$$

Darnach ergiebt sich schliesslich noch:

$$\prod_0^n \frac{1}{1+c_\nu} = \prod_0^n \left(1-\frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right) < \frac{1}{1+\sigma'} \quad \text{falls:} \quad \left|\sum_0^n \frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right| < \sigma' < 1$$

und daher:

$$\prod_0^n (1+c_\nu) > 1-\sigma'. \tag{14}$$

Die Formeln (13) und (14) sind ausreichend, um im Falle der Convergenz von $\sum c_\nu^2$ die Convergenz des unendlichen Productes $\prod(1+c_\nu)$ zu erweisen, während Ungl. (12) dazu dient, um dessen Divergenz nach Null im Falle der Divergenz von $\sum c_\nu^2$ zu erkennen.

Sei zunächst ausser der Reihe $\sum c_\nu$ auch die Reihe $\sum c_\nu^2$ *convergent*, so convergirt auch die Reihe $\sum \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$ (NB. es wird, da es sich um die schliessliche Untersuchung von $\prod\prod(1+c_\nu)$ handelt, ein für allemal vorausgesetzt, dass für keinen Werth ν: $1+c_\nu = 0$ wird) und folglich auch diejenige mit dem allgemeinen Gliede:

$$c_\nu - \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu} = \frac{c_\nu}{1+c_\nu}.$$

In Folge dessen lässt sich, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen wird, eine positive ganze Zahl m so fixiren, dass gleichzeitig:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu c_\nu\right| < \varepsilon, \qquad \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu \frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right| < \varepsilon \qquad (n > m)$$

für $\varrho = 1, 2, 3,$ in inf., und man findet daher nach Ungl. (13) und (14):

$$\frac{P_{n+\varrho}}{P_n} = \prod_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu (1+c_\nu) \begin{cases} < \frac{1}{1-\varepsilon} \\ > 1-\varepsilon \end{cases} \qquad (n \geqq m)$$

also:

$$-\varepsilon < \frac{P_{n+\varrho}}{P_n} - 1 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

woraus die *Convergenz* von

$$P_\infty = \prod_0^\infty{}_\nu (1+c_\nu)$$

resultirt.

Ist dagegen $\sum c_\nu^2$ *divergent* und setzt man:

$$\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu c_\nu^2 = S_{n,\varrho} \qquad (n \geqq m),$$

so wird für hinlänglich grosse Werthe von ϱ $S_{n,\varrho}$ jede noch so grosse Zahl übersteigen, und da nach Ungl. (12):

$$\prod_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu (1+\varepsilon_\nu) < \frac{1}{(1-\varepsilon)\left(1+\frac{1}{4}S_{n,\varrho}\right)} \qquad (n \geqq m),$$

so folgt, dass das fragliche Product *nach Null divergirt.* —

München, December 1893.

Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

§ 1.

Fundamentalaufgabe. Die Farey'schen Reihen.

Die erste Aufgabe, die sich bei der Frage der angenäherten Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche darbietet und die ich deshalb als die Fundamentalaufgabe bezeichnen will, ist diese:

Fundamentalaufgabe: *Man soll unter den rationalen Brüchen, deren Zähler und Nenner (absolut genommen) die gegebene ganze Zahl n nicht übertreffen, denjenigen bestimmen, welcher sich am wenigsten von der gegebenen Zahl x unterscheidet.*

Zur Lösung dieser Aufgabe pflegt man die Entwicklung der Grösse x in einen natürlichen Kettenbruch, d. h. in einen Kettenbruch der Gestalt

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

heranzuziehen, wo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ganze Zahlen bezeichnen, die, mit eventueller Ausnahme der ersten, sämmtlich positiv sind. Die Näherungsbrüche und die zugehörigen intermediären Brüche des Kettenbruches geben dann immer den in der Fundamentalaufgabe verlangten Bruch. Diese Lösung hat insofern etwas Unbefriedigendes, als sie sich gewissermassen zufällig im Verlauf der Entwicklung der Kettenbruchtheorie ergiebt. Die Theorie der natürlichen Kettenbrüche, wie sie gewöhnlich dargestellt wird, leidet ihrerseits an dem Mangel, dass sie eine besondere unter vielen ähnlichen gleichberechtigt erscheinende Darstellungsform der Grössen behandelt und daher nicht von vornherein den Stempel innerer Berechtigung trägt. Wir werden im Folgenden einen anderen Weg einschlagen, nämlich von der directen, so zu sagen trivialen Lösung der Fundamentalaufgabe ausgehen. In dem Umstande,

dass die Betrachtungen, die sich uns bei dieser Lösung aufdrängen, unter Anderem auch mit Nothwendigkeit zu der natürlichen Kettenbruchentwicklung hinführen, glaube ich die innere Berechtigung gerade dieser Darstellungsform der Grössen erblicken zu müssen.

Was nun die oben erwähnte directe Lösung der Fundamentalaufgabe angeht, so besteht sie einfach in Folgendem: Wir schreiben uns, nach aufsteigender Grösse geordnet, alle reducirten Brüche auf, deren Zähler und Nenner der Zahlenreihe $0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm n$ angehören. Als erstes Glied der Reihe dieser reducirten Brüche betrachten wir $-\infty = \frac{-1}{0}$, als letztes Glied $+\infty = \frac{1}{0}$. Die endlichen Brüche mögen ferner stets mit positivem Nenner geschrieben werden, so dass z. B. in dem einfachsten Falle $n = 1$ die zu bildende Reihe von Brüchen diese sein würde:

$$(1) \qquad \frac{-1}{0}, \ \frac{-1}{1}, \ \frac{0}{1}, \ \frac{1}{1}, \ \frac{1}{0}.$$

Die gegebene Zahl x fällt nun nothwendig zwischen zwei aufeinanderfolgende Brüche $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ der Reihe, und es wird offenbar $\frac{r}{u}$ oder $\frac{s}{v}$ der in der Fundamentalaufgabe verlangte Bruch sein, jenachdem $\frac{r}{u}$ oder $\frac{s}{v}$ näher an x liegt. Wir knüpfen hieran einige Definitionen. Die soeben betrachtete Reihe von rationalen Zahlen, welche dadurch entsteht, dass wir die reducirten Brüche der Grösse nach anordnen, deren Zähler und Nenner die Zahl n nicht übertreffen, wollen wir als „n^{te} *Farey'sche Reihe*" oder „*Farey'sche Reihe* n^{ter} *Ordnung*" bezeichnen.*) Die Zahl n kann zunächst nur jeden positiven ganzzahligen Werth haben. Es erweist sich indessen zweckmässig auch den Werth $n = 0$ zuzulassen, also eine „nullte" Farey'sche Reihe einzuführen. Und zwar wollen wir unter der „nullten" Farey'schen Reihe die Reihe

$$(2) \qquad \frac{-1}{0}, \ \frac{0}{1}, \ \frac{1}{0}$$

*) Farey entdeckte bei Gelegenheit einer tabellarischen Aufstellung der Decimalbruchentwicklung der echten Brüche eine bemerkenswerthe Eigenschaft (vgl. § 2, Satz 1) derjenigen Reihe, die entsteht, wenn man die positiven echten Brüche der Grösse nach anordnet. Diese Eigenschaft wurde zuerst von Cauchy im Bulletin des Sciences 1816 bewiesen. Seither sind mehrere Arbeiten über die Farey'schen Reihen erschienen, ohne dass, wie es scheint, die principielle Bedeutung dieser Reihen hervorgehoben worden wäre. Man vergleiche: Stouvenel (Liouville's Journal, 1. Serie, Bd. V), Halphen, E. Lucas, M. d'Ocagne (Bulletin de la société mathématique de France, Bdde. V, VI, XIV) und Sylvester (Comptes rendus Bd. XCVI). In enger Beziehung zu der Theorie der Farey'schen Reihen steht auch eine Abhandlung von M. A. Stern (Ueber eine zahlentheoretische Function, Crelle's Journal, Bd. 55).

verstehen. Ordnen wir die Farey'schen Reihen nach der Ordnungszahl n an, so werden die den niedrigsten Werthen $n = 0, 1, 2$ entsprechenden Reihen diese sein:

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{-1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}, & (n=0), \\ \frac{-1}{0}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, & (n=1), \\ \frac{-1}{0}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}, & (n=2). \end{cases}$$

§ 2.

Eigenschaften der Farey'schen Reihen.

Die Fundamentalaufgabe hat uns zu den Farey'schen Reihen geführt, die wir zunächst einer näheren Untersuchung unterziehen wollen. Ist n eine positive ganze Zahl, so wird $\frac{n}{1}$ der grösste, $\frac{1}{n}$ der kleinste Bruch sein, der mit den Zahlen $1, 2, \ldots n$ gebildet werden kann. Daraus geht hervor, dass der Anfang der n^{ten} Farey'schen Reihe von den Brüchen

$$\frac{-1}{0}, \frac{-n}{1},$$

das Ende von den Brüchen

$$\frac{n}{1}, \frac{1}{0}$$

gebildet wird und dass in der Mitte die Brüche

$$\frac{-1}{n}, \frac{0}{1}, \frac{1}{n}$$

stehen. Dasselbe gilt offenbar auch noch im Falle $n = 0$; d. h. für die nullte Farey'sche Reihe.

Dies vorausgeschickt beweisen wir zunächst den

Satz 1: *Sind* $\frac{r}{u}$ *und* $\frac{s}{v}$ *zwei aufeinanderfolgende Glieder einer Farey'schen Reihe, so haben* r *und* s *nicht entgegengesetztes Vorzeichen und es ist*

$$(4)\qquad us - vr = 1,$$

oder (*was dasselbe ist*)

$$(4')\qquad \frac{s}{v} - \frac{r}{u} = \frac{1}{uv}.$$

Da dieser Satz offenbar für die nullte Farey'sche Reihe gilt, so genügt es zu zeigen, dass der Satz für die $(n+1)^{\text{ste}}$ Farey'sche Reihe gilt, wenn wir annehmen, dass derselbe für die n^{te} Farey'sche Reihe schon bewiesen sei.

Um dieses zu zeigen, untersuchen wir, in welcher Weise sich

die in der $(n+1)^{\text{sten}}$ Farey'schen Reihe neu auftretenden Brüche in die n^{te} Farey'sche Reihe einordnen. Es sei $\frac{r}{u}$ ein solcher Bruch der $(n+1)^{\text{sten}}$ Farey'schen Reihe und $\frac{r'}{u'}$, $\frac{s'}{v'}$ die aufeinanderfolgenden Brüche der n^{ten} Farey'schen Reihe, zwischen welchen $\frac{r}{u}$ liegt. Da $\frac{r'}{u'} < \frac{r}{u} < \frac{s'}{v'}$ ist, so sind

$$ru' - ur' = \lambda \quad \text{und} \quad -rv' + us' = \mu \tag{5}$$

positive ganze Zahlen. Da nun nach Voraussetzung $u's' - v'r' = 1$ ist, so folgt aus (5):

$$\begin{cases} r = \mu r' + \lambda s', \\ u = \mu u' + \lambda v'. \end{cases} \tag{6}$$

Nehmen wir umgekehrt für μ und λ irgend zwei positive ganze Zahlen an, so wird der nach den Formeln (6) berechnete Bruch $\frac{r}{u}$ zwischen $\frac{r'}{u'}$ und $\frac{s'}{v'}$ liegen. Wenn nun zunächst r', s', u', v' sämmtlich von Null verschieden sind, so wird die Ordnungszahl der Farey'schen Reihe, welcher dieser Bruch $\frac{r}{u}$ angehört, mit μ und λ wachsen, da mit diesen Zahlen zugleich die Zahlen r und u anwachsen. Da aber $\frac{r}{u}$ der nächst höheren, nämlich der $(n+1)^{\text{sten}}$ Farey'schen Reihe angehören soll, so müssen μ und λ die kleinst-möglichen Werthe haben, d. h. es muss $\mu = \lambda = 1$ sein. Die Gleichungen (5) und (6) lauten also

$$ru' - ur' = 1, \quad -rv' + us' = 1 \tag{5'}$$

bezüglich

$$\begin{cases} r = r' + s', \\ u = u' + v'. \end{cases} \tag{6'}$$

Wenn zweitens eine der Zahlen r', s', u', v' gleich Null ist, so sind folgende vier Fälle möglich:

1) $\frac{r'}{u'} = \frac{-1}{0}$, $\frac{s'}{v'} = \frac{-n}{1}$; 2) $\frac{r'}{u'} = \frac{n}{1}$, $\frac{s'}{v'} = \frac{1}{0}$;

3) $\frac{r'}{u'} = \frac{-1}{n}$, $\frac{s'}{v'} = \frac{0}{1}$; 4) $\frac{r'}{u'} = \frac{0}{1}$, $\frac{s'}{v'} = \frac{1}{n}$.

Nach dem, was wir zu Anfang dieses Paragraphen bemerkt haben, ist in jedem dieser Fälle ebenfalls $\mu = \lambda = 1$ und folglich gelten die Gleichungen (5') und (6') allgemein. Aus dieser Ueberlegung geht zunächst der folgende Satz hervor:

Satz 2. *Man erhält die $(n+1)^{\text{ste}}$ Farey'sche Reihe aus der n^{ten}, indem man zwischen je zwei aufeinander folgende Brüche $\frac{r'}{u'}$, $\frac{s'}{v'}$ der*

letzteren den Bruch $\frac{r'+s'}{u'+v'}$ *einschaltet, von diesen eingeschalteten Brüchen jedoch nur diejenigen beibehält, deren Zähler und Nenner (absolut genommen) die Zahl* $n+1$ *nicht überschreiten.*

Thatsächlich wird der Nenner oder der (eventuell negativ genommene) Zähler jedes neu aufzunehmenden Bruches gleich $n+1$ sein, da der Bruch schon in der n^{ten} Farey'schen Reihe vorkommen würde, wenn sowohl Nenner wie Zähler kleiner als $n+1$ wären. Der Satz 2 in Verbindung mit den Formeln (5′) und (6′) zeigt nun, dass sich in der That die im Satze 1 behaupteten Eigenschaften der Farey'schen Reihe von der n^{ten} auf die $(n+1)^{\text{ste}}$ übertragen.

In Folge dieser Eigenschaften können die Farey'schen Reihen zur Lösung der linearen diophantischen Gleichungen dienen. In der That, sei $\frac{r}{u}$ eine beliebige endliche rationale Zahl und die n^{te} Farey'sche Reihe die erste, in welcher der Bruch $\frac{r}{u}$ auftritt. Sind dann $\frac{x}{y}$ und $\frac{x'}{y'}$ die beiden Brüche der Reihe, welche $\frac{r}{u}$ einschliessen, so erfüllen x, y und x', y' bez. die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} ry - ux &= 1, \\ ry' - ux' &= -1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Zugleich ist

$$x + x' = u, \quad y + y' = r, \tag{8}$$

ausgenommen den einen Fall, wo $\frac{r}{u} = \frac{0}{1}$, also $n = 0$ ist, in welchem die Gleichungen (8) nicht mehr gelten.

Der Satz 1 gestattet eine bemerkenswerthe Umkehrung, nämlich: Es seien $\frac{r}{u}, \frac{s}{v}$ irgend zwei endliche Brüche, welche der Bedingung

$$us - vr = 1 \tag{9}$$

genügen; ferner sei die n^{te} Farey'sche Reihe die erste, in welcher beide Brüche vorkommen, also n die grösste der Zahlen $u, v, |r|, |s|$. *Dann sind* $\frac{r}{u}, \frac{s}{v}$ *nothwendig aufeinanderfolgende Glieder dieser Reihe.*

Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet unmittelbar ein, wenn einer der beiden Brüche $\frac{r}{u}, \frac{s}{v}$ gleich Null ist. Denn man hat dann entweder $\frac{r}{u} = \frac{0}{1}, \frac{s}{v} = \frac{1}{v}$ oder $\frac{r}{u} = \frac{-1}{u}, \frac{s}{v} = \frac{0}{1}$. Die Brüche sind also aufeinanderfolgende Glieder der v^{ten} bez. u^{ten} Farey'schen Reihe. Wenn aber weder $\frac{r}{u}$ noch $\frac{s}{v}$ gleich Null ist, so sind die vier Zahlen r, s, u, v sämmtlich von Null verschieden und zufolge der Gleichung (9) haben r und s nicht entgegengesetztes Vorzeichen. Ferner kann jeder zwischen

$\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ liegende Bruch in die Form $\frac{\mu r + \lambda s}{\mu u + \lambda v}$ gesetzt werden, wo μ und λ positive ganze Zahlen bedeuten. Da aber der Zähler oder der Nenner jedes Bruches $\frac{\mu r + \lambda s}{\mu u + \lambda v}$ grösser ist als n, so wird jeder zwischen $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ liegende Bruch einer Farey'schen Reihe von höherer als der n^{ten} Ordnung angehören. Mit anderen Worten: in der Reihe n^{ter} Ordnung sind $\frac{r}{u}$, $\frac{s}{v}$ aufeinanderfolgende Brüche. Man kann diesem Satze eine Fassung geben, in welcher er auch noch für den Fall, dass einer der Brüche $\frac{r}{u}$, $\frac{s}{v}$ unendlich ist, gültig bleibt. Ist einer der Brüche unendlich, etwa $\frac{r}{u} = \pm\infty = \frac{\pm 1}{0}$, so ist der andere $\frac{s}{v}$ eine positive oder negative ganze Zahl, etwa $\frac{s}{v} = \frac{\pm n}{1}$. Wenn man nun $+\infty$ und $-\infty$ nicht als verschieden ansieht, so bilden auch jetzt wieder die Zahlen $\frac{r}{u}$, $\frac{s}{v}$ nebeneinanderstehende Glieder der n^{ten} Farey'schen Reihe, da man die Vorzeichen der Zähler von $\frac{r}{u}$, $\frac{s}{v}$ in Uebereinstimmung bringen kann.

Wir haben daher folgenden allgemeingültigen Satz:

Satz 3. *Ist die aus den Zählern und Nennern der rationalen Zahlen* $\varrho = \frac{r}{u}$, $\sigma = \frac{s}{v}$ *gebildete Determinante* $us - vr$ *gleich* ± 1, *so stehen die Zahlen* ϱ *und* σ *in der ersten Farey'schen Reihe, in welcher sie beide vorkommen, neben einander.*

Wenn ξ irgend ein Glied der n^{ten} Farey'schen Reihe bezeichnet, so leuchtet ein, dass $-\xi$ und $\frac{1}{\xi}$ ebenfalls Glieder der n^{ten} Farey'schen Reihe sind. Wir drücken diese Thatsache kürzer aus, indem wir sagen:

„Durch die Transformationen $\xi' = -\xi$ *und* $\xi' = \frac{1}{\xi}$ *geht jede Farey'sche Reihe in sich über."*

Es ist klar, dass bei diesen Transformationen nebeneinander stehende Brüche wieder in nebeneinander stehende übergehen. Zur Aufstellung der Farey'schen Reihen braucht man hiernach nur diejenigen Brüche anzuordnen, die zwischen 0 und 1 liegen, also die positiven echten Brüche*); fügt man diesen jedesmal die Reihe ihrer reciproken Werthe

*) Bringt man auf einem Maassstab von der Länge 1 die Theilpunkte an, die den Zahlen einer Farey'schen Reihe entsprechen, so kann man mit Hülfe desselben für jede zu messende Grösse unmittelbar die besten Annäherungen durch rationale Zahlen bestimmen. Indem man die zu messende Länge nicht an den Nullpunkt, sondern an einen geeignet gewählten Theilpunkt des Maassstabes anlegt, kann man, bei verhältnissmässig geringer Zahl von Theilungen des Maassstabes, eine erhebliche Genauigkeit erreichen.

und sodann allen nunmehr erhaltenen ihre negativen Werthe hinzu, so wird man die ganze Farey'sche Reihe vor sich haben. So bilden wir z. B. die dritte Farey'sche Reihe, indem wir die echten positiven Brüche

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

aufstellen, sodann die reciproken Werthe anreihen, wodurch wir die Reihe

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}$$

erhalten, und nun dieser schliesslich (nach links) die entsprechenden negativen Werthe zufügen, wodurch die vollständige dritte Farey'sche Reihe

$$\frac{-1}{0}, \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{1}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1},$$
$$\frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}$$

entsteht.

§ 3.

Die Näherungsbrüche einer gegebenen Grösse.

Wir betrachten jetzt, indem wir uns unserem Ausgangspunkte wieder zuwenden, irgend eine Grösse x. Haben wir die n^{te} Farey'sche Reihe aufgestellt, so wird x zwischen zwei aufeinanderfolgende Glieder $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ der Reihe fallen. Die beiden Brüche $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ wollen wir die *Näherungsbrüche n^{ter} Ordnung* der Grösse x nennen.

Wir haben dabei vorausgesetzt, dass x nicht selber ein Glied der n^{ten} Farey'schen Reihe ist, eine Voraussetzung, an welcher wir in der Folge festhalten wollen. Die Voraussetzung ist für alle Werthe von n erfüllt, sobald x irrational ist.

Aus den Ungleichungen $\frac{r}{u} < x < \frac{s}{v}$ geht hervor, dass

$$x - \frac{r}{u} < \frac{s}{v} - \frac{r}{u} = \frac{1}{vu},$$

$$\frac{s}{v} - x < \frac{s}{v} - \frac{r}{u} = \frac{1}{vu}$$

ist. Der Grad der Annäherung der Zahlen $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ an die Grösse x wird also durch den reciproken Werth des Productes $v \cdot u$ der Nenner gemessen.

Wir wollen nun zeigen, wie man die Näherungsbrüche der Grösse x successive aufstellen kann, ohne die ganzen Farey'schen Reihen bilden zu müssen. Seien $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ die Näherungsbrüche n^{ter} Ordnung der

Grösse x. Wir wissen dann, dass in der ersten auf die n^{te} folgenden Farey'schen Reihe, in welcher $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ nicht mehr aufeinanderfolgende Glieder sind, der Bruch $\frac{r+s}{u+v}$ zwischen $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ tritt. Daraus geht hervor, dass das auf das Paar $\frac{r}{u}$, $\frac{s}{v}$ folgende Paar von Näherungsbrüchen entweder aus den Brüchen

$$\frac{r}{u} \text{ und } \frac{r+s}{u+v}, \text{ wenn nämlich } x \text{ unter } \frac{r+s}{u+v} \text{ liegt,}$$

oder aus den Brüchen

$$\frac{r+s}{u+v} \text{ und } \frac{s}{v}, \text{ wenn nämlich } x \text{ über } \frac{r+s}{u+v} \text{ liegt,}$$

besteht. Hiernach leuchtet ein, wie man die verschiedenen Paare von Näherungsbrüchen der Grösse x, ausgehend von dem ersten Paare, leicht bilden kann. Das erste Paar selber ist aus der Farey'schen Reihe nullter Ordnung zu entnehmen und besteht also aus den Brüchen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$, wenn x positiv ist, aus den Brüchen $\frac{-1}{0}$ und $\frac{0}{1}$, wenn x negativ ist. Beispielsweise erhält man so für die Zahl $x = \sqrt{2}$ der Reihe nach die folgenden Paare von Näherungsbrüchen:

$$\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right); \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right); \left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right); \left(\frac{1}{1}, \frac{3}{2}\right); \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right); \left(\frac{7}{5}, \frac{3}{2}\right); \left(\frac{7}{5}, \frac{10}{7}\right);$$

$$\left(\frac{7}{5}, \frac{17}{12}\right); \left(\frac{24}{17}, \frac{17}{12}\right); \text{ etc.}$$

Für die Näherungsbrüche einer Grösse x gelten die nachstehenden Sätze:

Satz 4. *Sind $\frac{r}{u}$, $\frac{s}{v}$ zwei endliche, der Bedingung $us - vr = 1$ genügende Brüche, zwischen welchen die Grösse x liegt, so bilden diese Brüche ein Paar von Näherungsbrüchen der Grösse x.*

Denn die Brüche $\frac{r}{u}$, $\frac{s}{v}$ sind, wie wir oben (§ 2) gesehen haben, zwei aufeinanderfolgende Glieder einer Farey'schen Reihe.

Satz 5. *Ist $\frac{r}{u}$ ein reducirter endlicher Bruch, und*

$$\left|x - \frac{r}{u}\right| < \frac{1}{u^2},$$

so ist $\frac{r}{u}$ ein Näherungsbruch der Grösse x.

Zum Beweise betrachten wir die erste Farey'sche Reihe, in welcher der Bruch $\frac{r}{u}$ auftritt. Sind $\frac{r'}{u'}$, $\frac{s'}{v'}$ die Brüche, zwischen welchen $\frac{r}{u}$ in dieser Reihe liegt, so ist (nach Satz 2 und Satz 1)

$$u = u' + v', \quad \frac{r}{u} - \frac{r'}{u'} = \frac{1}{uu'} \geq \frac{1}{u^2}, \quad \frac{s'}{v'} - \frac{r}{u} = \frac{1}{uv'} \geq \frac{1}{u^2}.$$

Der absolute Werth von $x - \frac{r}{u}$ (der nach Voraussetzung kleiner als $\frac{1}{u^2}$ ist) ist folglich kleiner als $\frac{r}{u} - \frac{r'}{u'}$ und $\frac{s'}{v'} - \frac{r}{u}$.

Daher muss x entweder zwischen $\frac{r'}{u'}$ und $\frac{r}{u}$ oder zwischen $\frac{r}{u}$ und $\frac{s'}{v'}$ liegen, woraus die Behauptung folgt.

Wenn $\frac{r}{u} = 0 = \frac{0}{1}$ ist, so gilt die Gleichung $u = u' + v'$ nicht mehr; die Richtigkeit der Behauptung leuchtet aber in diesem Falle unmittelbar ein.

§ 4.

Ueber die Auflösung diophantischer Gleichungen zweiten Grades.

Ehe wir die Theorie der Näherungsbrüche weiter entwickeln, wollen wir hier eine specielle Anwendung der bisher erhaltenen Resultate machen. Es soll sich um die Auflösung der Gleichung

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = m \tag{10}$$

durch ganze Zahlen u, v, die relative Primzahlen sind, handeln.

Die gegebenen ganzen Zahlen A, B, C, m sollen der Bedingung genügen, dass

$$B^2 - AC = D \tag{11}$$

positiv ist.*) Die Zahl m dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als positiv voraussetzen, da wir, wenn m negativ ist, die Gleichung (10) mit — 1 multipliciren können. Die Wurzeln der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0 \tag{12}$$

bezeichnen wir mit

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{D}}{A}, \quad x^2 = \frac{-B - \sqrt{D}}{A}. \tag{13}$$

Unter u, v eine Lösung der Gleichung (10) verstanden, wollen wir nun untersuchen, unter welcher Bedingung $\frac{u}{v}$ ein Näherungsbruch einer der Wurzeln x_1, x_2 ist. Wir betrachten zu dem Zwecke die erste Farey'sche Reihe, in welcher der Bruch $\frac{u}{v}$ auftritt und bezeichnen mit $\frac{u'}{v'}$ einen der beiden Brüche der Reihe, zwischen denen $\frac{u}{v}$ eingeschlossen ist.

Man hat dann

$$\frac{u}{v} - \frac{u'}{v'} = \frac{s}{vv'}, \tag{14}$$

*) Die Voraussetzung, dass A, B, C, m *ganze* Zahlen seien, ist übrigens, wie man leicht erkennt, für das Folgende nicht wesentlich.

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, jenachdem $\frac{u'}{v'}$ der unter oder über $\frac{u}{v}$ liegende Bruch ist. Nun ist $\frac{u}{v}$ ein Näherungsbruch von x_1 oder x_2 stets und nur dann, wenn

$$x = \frac{-B + \varepsilon' \sqrt{D}}{A} \tag{15}$$

bei geeigneter Wahl des Vorzeichens ε' zwischen $\frac{u}{v}$ und $\frac{u'}{v'}$ liegt. Man erhält aber alle zwischen $\frac{u}{v}$ und $\frac{u'}{v'}$ liegenden Zahlen, indem man in dem Bruche $\frac{u\lambda + u'}{v\lambda + v'}$, die Grösse λ alle positiven Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen lässt. Daher muss also der aus $x = \frac{u\lambda + u'}{v\lambda + v'}$ berechnete Werth von λ, d. i.

$$\lambda = \frac{-v'x + u'}{vx - u} \tag{16}$$

positiv sein. Nun wird nach (14) und (15)

$$\lambda + \frac{v'}{v} = \frac{-\varepsilon}{v(vx - u)} = \frac{-\varepsilon A}{v\left(v\varepsilon' \sqrt{D} - (uA + vB)\right)},$$

oder, indem man den Nenner rational macht,

$$\lambda + \frac{v'}{v} = \frac{\varepsilon A\left(uA + vB + v\varepsilon' \sqrt{D}\right)}{v\left((uA + vB)^2 - Dv^2\right)}.$$

Berücksichtigt man noch, dass nach (10)

$$uA + vB = \varepsilon'' \sqrt{Am + Dv^2} \quad (\varepsilon'' = \pm 1),$$

ist, so erhält man leicht:

$$\lambda + \frac{v'}{v} = \frac{\varepsilon\varepsilon'' \sqrt{Am + Dv^2} + \varepsilon\varepsilon' v \sqrt{D}}{v \cdot m}. \tag{17}$$

Ueber die beiden Vorzeichen ε und ε' können wir noch verfügen. Wir wählen $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$. Dann kommt

$$\lambda + \frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{D} + \sqrt{D + \frac{Am}{v^2}}}{m}. \tag{18}$$

Ist nun $m < 2\sqrt{D}$ und zunächst A positiv, so wird die rechte Seite der vorstehenden Gleichung (18) grösser als 1 und, da $\frac{v'}{v}$ kleiner als 1 ist, λ sicher positiv. Unter diesen Voraussetzungen ist also $\frac{u}{v}$ ein Näherungsbruch einer der beiden Wurzeln x_1, x_2. Das Gleiche gilt offenbar unter der Annahme, dass ($m < 2\sqrt{D}$ und) C positiv sei, da man A mit C und u mit v vertauschen kann, ohne die Gleichung (10) zu ändern. Wir gelangen also zu folgendem Satz:

„Ist $m < 2\sqrt{D}$ und wenigstens eine der beiden Zahlen A und C positiv, so wird jede Lösung u, v der Gleichung (10) *durch die Näherungsbrüche der Wurzeln x_1 und x_2 geliefert.“*

Sind A und C negativ, so lässt sich Folgendes schliessen. Unter der Annahme, dass $m < 2\sqrt{D}$ sei, wird die rechte Seite der Gleichung (18) grösser als 1 und folglich λ positiv, sobald

$$v > \sqrt{\frac{-A}{2\sqrt{D} - m}} \tag{19}$$

ist. Daher folgt:

Ist $m < 2\sqrt{D}$ und sind beide Zahlen A und C negativ, so wird jede Lösung u, v der Gleichung (10), *für die v die durch* (19) *gegebene Grenze überschreitet, durch die Näherungsbrüche der Wurzeln x_1 und x_2 geliefert.*

Als ein besonderer Fall verdient der Satz Erwähnung:

„Die Lösungen der Gleichung

$$u^2 - Dv^2 = m,$$

wo m absolut genommen kleiner als $2\sqrt{D}$ ist, in positiven relativen Primzahlen u, v werden durch die Näherungsbrüche von $\sqrt{D}$ geliefert.“

Die hier entwickelten Sätze sind die Analoga zu bekannten Sätzen aus der Theorie der Kettenbrüche.*) Während aber in den letzteren Sätzen die obere Grenze für m die Zahl $\sqrt{D}$ ist, ist sie in unseren Sätzen gleich $2\sqrt{D}$, und hierin liegt der Vorzug, den bei dieser Untersuchung unsere Theorie der Näherungsbrüche gegenüber den Kettenbrüchen besitzt.

§ 5.

Weitere Untersuchung der Näherungsbrüche einer Grösse x.

Wir wollen die Paare von Näherungsbrüchen einer Grösse x der Reihe nach mit

$$(\xi^0, \eta^0);\ (\xi', \eta');\ \ldots\ (\xi^{(\lambda)}, \eta^{(\lambda)});\ \ldots \tag{20}$$

bezeichnen. Jedes Paar wird mit dem vorstehenden einen Bruch gemeinsam haben. Denn allgemein besteht das auf

$$\xi^{(\lambda)} = \frac{r}{u},\quad \eta^{(\lambda)} = \frac{s}{v}$$

folgende Paar aus einem der beiden Brüche $\xi^{(\lambda)}$, $\eta^{(\lambda)}$ in Verbindung mit dem neuen Bruche $\frac{r+s}{u+v}$. Hieraus folgt, dass wir schon alle

*) Vgl. z. B. Serret, Cours d'algèbre supérieure (Paris, 1877, Bd. I, pag. 80 ff.).

Näherungsbrüche erhalten, wenn wir nicht die Paare, sondern von jedem Paare nur den neu hinzutretenden, in dem voraufgehenden Paare nicht vorkommenden Bruch aufschreiben. Dies wollen wir uns ausgeführt denken, dabei aber jeden Bruch mit dem Index $+$ oder $-$ versehen, je nachdem der Bruch grösser oder kleiner als die Grösse x ist. Zum Beispiel wird so für $x = \sqrt{2}$ an Stelle der in § 3 angegebenen Paare die folgende Reihe der Näherungsbrüche treten:

$$\left(\frac{1}{0}\right)_+,\ \left(\frac{0}{1}\right)_-,\ \left(\frac{1}{1}\right)_-,\ \left(\frac{2}{1}\right)_+,\ \left(\frac{3}{2}\right)_+,\ \left(\frac{4}{3}\right)_-,\ \left(\frac{7}{5}\right)_-,\ \left(\frac{10}{7}\right)_+;$$

$$\left(\frac{17}{12}\right)_+,\ \left(\frac{24}{17}\right)_-,\ \left(\frac{41}{29}\right)_-,\ \left(\frac{58}{41}\right)_+,\ \left(\frac{99}{70}\right)_+,\ \ldots\ .$$

Allgemein wird an Stelle der Paare (20) die einfache Reihe der Näherungsbrüche von x:

$$\xi^{(0)}_{\varepsilon_0},\ \xi^{(1)}_{\varepsilon_1},\ \xi^{(2)}_{\varepsilon_2},\ \ldots\ \xi^{(\lambda)}_{\varepsilon_\lambda},\ \ldots \tag{21}$$

treten, wobei $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\lambda, \ldots$ einen der Indices $+$, $-$ bedeuten. Jenachdem x positiv oder negativ ist, beginnt die Reihe (21) mit den Brüchen

$$\xi^{(0)}_{\varepsilon_0} = \left(\frac{1}{0}\right)_+,\quad \xi^{(1)}_{\varepsilon_1} = \left(\frac{0}{1}\right)_-,$$

oder mit den Brüchen

$$\xi^{(0)}_{\varepsilon_0} = \left(\frac{-1}{0}\right)_-,\quad \xi^{(1)}_{\varepsilon_1} = \left(\frac{0}{1}\right)_+.$$

Die Reihe der Vorzeichen

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\lambda, \ldots \tag{22}$$

möge die *Charakteristik der Grösse* x heissen.*)

Aus der Bildungsweise der Reihe (21) geht hervor, dass jeder Näherungsbruch mit dem unmittelbar vorhergehenden von entgegengesetztem Index ein Paar bildet, so dass man von der Reihe (21) leicht wieder zu der Reihe (20) zurückkehren kann. Wollen wir nämlich das Paar $(\xi^{(\lambda-1)}, \eta^{(\lambda-1)})$ der Reihe (20) finden, so nehmen wir das Glied $\xi^{(\lambda)}_{\varepsilon_\lambda}$ der Reihe (21) und gehen in der Charakteristik (22) von ε_λ rückwärts, bis wir in der Folge $\varepsilon_{\lambda-1}, \varepsilon_{\lambda-2}, \ldots$ auf ein ε_μ kommen, das gleich $-\varepsilon_\lambda$ ist. Dann werden die Brüche $\xi^{(\lambda)}_{\varepsilon_\lambda}$ und $\xi^{(\mu)}_{\varepsilon_\mu}$ das gesuchte Paar bilden. Ist die Reihe (21) bis zu einem gewissen Gliede, etwa bis $\xi^{(\lambda)}_{\varepsilon_\lambda}$ inclusive bekannt, so ist es leicht, den Bruch anzugeben, der in der Reihe auf $\xi^{(\lambda)}_{\varepsilon_\lambda}$ folgt. Offenbar entsteht derselbe, wenn man die Zähler und die Nenner der Brüche $\xi^{(\lambda)}_{\varepsilon_\lambda}$ und $\xi^{(\mu)}_{\varepsilon_\mu}$ addirt. Daraus

*) Die Bezeichnung lehnt sich an eine von Herrn Christoffel (Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen, Annali di Matematica, 2. Serie, Bd. XV) eingeführte an.

geht weiter hervor, dass die Reihe (21) schon vollständig durch die Charakteristik (22) bestimmt ist. Beispielsweise lesen wir aus der Charakteristik

$$+, -, +, +, -, -, -, +, +, +, +, -, \cdots$$

die Reihe der Näherungsbrüche

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{7}{16}, \frac{10}{23}, \frac{13}{30}, \frac{16}{37}, \cdots$$

ab. Durch die Charakteristik ist also auch die Grösse x als Grenze der Näherungsbrüche bestimmt. Man erkennt sofort, dass jeder Irrationalzahl x eine unendliche Charakteristik entspricht, bei welcher unendlich oft sowohl der Index $+$ wie der Index $-$ vorkommt und dass umgekehrt jeder solchen beliebig gewählten unendlichen Charakteristik eine Irrationalzahl x entspricht.

Die Charakteristik kann in einer übersichtlichen Weise angegeben werden, indem man

$$\varepsilon = +, \quad \eta = -$$

setzt und die Aufeinanderfolge von einer bestimmten Anzahl von $+$ resp. $-$ durch die entsprechende Potenz von ε resp. η andeutet. Es wird dann allgemein die Charakteristik von x die Form

$$\varepsilon \eta^{k_1} \varepsilon^{k_2} \eta^{k_3} \cdots$$

respective

$$\eta \varepsilon^{k_1} \eta^{k_2} \varepsilon^{k_3} \cdots$$

haben, je nachdem x positiv oder negativ ist. Die Exponenten $k_1, k_2, k_3, \ldots$ sind positive ganze Zahlen.

§ 6.

Die natürliche Kettenbruchentwicklung.

Um die Bedeutung der Exponenten $k_1, k_2, k_3, \ldots$ in der Charakteristik zu erkennen, betrachten wir die Reihe der Näherungsbrüche von x, wobei wir zunächst den Fall, wo x positiv ist, ins Auge fassen wollen. Es seien

$$(23) \quad \xi_\varepsilon^{(0)} = \left(\frac{1}{0}\right)_+, \ \xi_\eta^{(1)}, \ \xi_\eta^{(2)}, \ldots, \xi_\eta^{(k_1)}, \ \xi_\varepsilon^{(k_1+1)}, \ldots, \xi_\varepsilon^{(k_1+k_2)}, \ \xi_\eta^{(k_1+k_2+1)}, \ldots$$
$$\ldots, \xi_\eta^{(k_1+k_2+k_3)}, \ldots$$

die Näherungsbrüche von x. Die Brüche

$$(24) \quad \xi_\varepsilon^{(0)} = \frac{r_0}{u_0}, \ \xi_\eta^{(k_1)} = \frac{r_1}{u_1}, \ \xi_\varepsilon^{(k_1+k_2)} = \frac{r_2}{u_2}, \ \xi_\eta^{(k_1+k_2+k_3)} = \frac{r_3}{u_3}, \ldots,$$

bei welchen die Indices wechseln, mögen die *Hauptbrüche* heissen. Aus dem Bildungsgesetz der Reihe (23) gehen dann folgende Gleichungen hervor:

$$\xi_\varepsilon^{(0)} = \frac{r_0}{u_0} = \frac{1}{0};$$

$$\xi_\eta^{(k_1)} = \frac{r_1}{u_1} = \frac{k_1 - 1}{1}, \quad \xi_\varepsilon^{(k_1+1)} = \frac{r_1 + r_0}{u_1 + u_0};$$

$$\xi_\varepsilon^{(k_1+k_2)} = \frac{r_2}{u_2} = \frac{k_2 r_1 + r_0}{k_2 u_1 + u_0}, \quad \xi_\eta^{(k_1+k_2+1)} = \frac{r_2 + r_1}{u_2 + u_1};$$

$$\xi_\eta^{(k_1+k_2+k_3)} = \frac{r_3}{u_3} = \frac{k_3 r_2 + r_1}{k_3 u_2 + u_1}, \quad \xi_\varepsilon^{(k_1+k_2+k_3+1)} = \frac{r_3 + r_2}{u_3 + u_2};$$

etc. etc.

Wir bringen nun zum Ausdruck, dass x zwischen den folgenden Zahlenpaaren liegt:

$$\xi_\varepsilon^{(0)} \text{ und } \xi_\eta^{(k_1)}; \quad \xi_\eta^{(k_1)} \text{ und } \xi_\varepsilon^{(k_1+1)}; \quad \xi_\eta^{(k_1)} \text{ und } \xi_\varepsilon^{(k_1+k_2)}; \quad \xi_\varepsilon^{(k_1+k_2)} \text{ und } \xi_\eta^{(k_1+k_2+1)};$$
$$\xi_\varepsilon^{(k_1+k_2)} \text{ und } \xi_\eta^{(k_1+k_2+k_3)}; \ldots$$

Zu dem Zwecke setzen wir:

$$(25)\quad x = \frac{r_1 x_1 + r_0}{u_1 x_1 + u_0} = \frac{(k_1 - 1) x_1 + 1}{x_1}; \quad x = \frac{r_2 x_2 + r_1}{u_2 x_2 + u_1}; \quad x = \frac{r_3 u_3 + r_2}{u_3 x_3 + u_2}; \ldots.$$

Dann drückt sich die erwähnte Thatsache dadurch aus, dass $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sämmtlich positive Grössen und zwar grösser als 1 sind. Nun besteht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Grössen x_λ und $x_{\lambda+1}$ die Beziehung:

$$\frac{r_\lambda x_\lambda + r_{\lambda-1}}{u_\lambda x_\lambda + u_{\lambda-1}} = \frac{r_{\lambda+1} x_{\lambda+1} + r_\lambda}{u_{\lambda+1} x_{\lambda+1} + u_\lambda} = \frac{(k_{\lambda+1} r_\lambda + r_{\lambda-1}) x_{\lambda+1} + r_\lambda}{(k_{\lambda+1} u_\lambda + u_{\lambda-1}) x_{\lambda+1} + u_\lambda}$$

$$= \frac{r_\lambda \left(k_{\lambda+1} + \frac{1}{x_{\lambda+1}}\right) + r_{\lambda-1}}{u_\lambda \left(k_{\lambda+1} + \frac{1}{x_{\lambda+1}}\right) + u_{\lambda-1}},$$

und folglich

$$x_\lambda = k_{\lambda+1} + \frac{1}{x_{\lambda+1}}.$$

Es besteht also die Gleichungskette:

$$(26)\quad x = (k_1 - 1) + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = k_2 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = k_3 + \frac{1}{x_3}, \cdots,$$

und daher ist

$$(27)\quad x = (k_1 - 1) + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \cdots + \frac{1}{k_\lambda + \frac{1}{x_\lambda}}}}.$$

Wir gelangen also zu folgendem Resultate:

Ist x eine positive Grösse und

$$\varepsilon \eta^{k_1} \varepsilon^{k_2} \eta^{k_3} \varepsilon^{k_4} \ldots \quad (\varepsilon = +, \ \eta = -)$$

ihre Charakteristik, so besteht die Gleichungskette (26), *in welcher*

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ *sämmtlich grösser als* 1 *sind. Die Hauptbrüche in der Reihe* (23) *der Näherungsbrüche von* x *sind nichts Anderes, wie die successiven Näherungsbrüche der aus* (26) *folgenden natürlichen Kettenbruchentwicklung* (27) *der Grösse* x.

Wir betrachten nun zweitens den Fall, wo x eine negative Grösse ist. Sei dann

$$\eta\, \varepsilon^{k_1}\, \eta^{k_2}\, \varepsilon^{k_3}\, \eta^{k_4} \ldots$$

die Charakteristik, und

$$(28) \qquad \xi_\eta^{(0)} = \left(\frac{-1}{0}\right)_-,\ \xi_\varepsilon^{(1)},\ \xi_\varepsilon^{(2)}, \ldots \xi_\varepsilon^{(k_1)},\ \xi_\eta^{(k_1+1)}, \ldots \xi_\eta^{(k_1+k_2)},$$
$$\xi_\varepsilon^{(k_1+k_2+1)}, \ldots \xi_\varepsilon^{(k_1+k_2+k_3)}, \ldots$$

die Reihe der Näherungsbrüche von x. Wir heben aus dieser Reihe wieder die „Hauptbrüche" heraus, setzen jedoch an Stelle des ersten $\xi_\eta^{(0)}$ den Bruch $\xi_\eta^{(k_1+1)}$, so dass wir die Reihe

$$(29) \qquad \xi_\eta^{(k_1+1)} = \frac{r_0}{u_0} = \frac{-k_1}{1},\quad \xi_\varepsilon^{(k_1)} = \frac{r_1}{u_1} = \frac{-k_1+1}{1},\quad \xi_\eta^{(k_1+k_2)} = \frac{r_2}{u_2},$$
$$\xi_\varepsilon^{(k_1+k_2+k_3)} = \frac{r_3}{u_3}, \ldots$$

erhalten. Aus dem Bildungsgesetz der Näherungsbrüche (28) geht nun hervor, dass

$$\frac{r_2}{u_2} = \frac{(k_2-1)\,r_1 + r_0}{(k_2-1)\,u_1 + u_0},\quad \frac{r_\lambda}{u_\lambda} = \frac{k_\lambda r_{\lambda-1} + r_{\lambda-2}}{k_\lambda u_{\lambda-1} + u_{\lambda-2}} \qquad (\text{für } \lambda > 2)$$

ist. Setzen wir daher:

$$(30) \qquad x = \frac{r_1 x_1 + r_0}{u_1 x_1 + u_0} = \frac{r_2 x_2 + r_1}{u_2 x_2 + u_1} = \frac{r_3 x_3 + r_2}{u_3 x_3 + u_2} = \ldots,$$

so werden $x_1, x_2, x_3, \ldots$ positive Grössen, die von der zweiten ab sicher grösser als 1 sind. Zwischen diesen Grössen bestehen nun wieder die Gleichungen:

$$(31) \qquad x = -k_1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_1}},\quad x_1 = (k_2-1) + \frac{1}{x_2},\quad x_2 = k_3 + \frac{1}{x_3}, \ldots$$

Ist nun $k_2 > 1$, so folgt hieraus die Entwicklung

$$(32) \qquad x = -k_1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{(k_2-1) + \frac{1}{k_3} \cdots + \frac{1}{k_\lambda} + \frac{1}{x_\lambda}},$$

und die Reihe der Hauptbrüche (29) stimmt mit den successiven Näherungsbrüchen des Kettenbruches (32) überein.

Ist dagegen $k_2 = 1$, so folgt

$$x = -k_1 + \frac{1}{k_2 + 1 + \frac{1}{k_4 + \cdots + \frac{1}{k_l + \frac{1}{x_l}}}}, \tag{33}$$

und die Reihe der Hauptbrüche (29) stimmt, wenn man die ersten beiden fortlässt, mit den successiven Näherungsbrüchen des Kettenbruches (33) überein. Es gilt also der Satz·

Ist x eine negative Grösse und

$$\eta\, \varepsilon^{k_1}\, \eta^{k_2}\, \varepsilon^{k_3}\, \eta^{k_4} \ldots$$

die Charakteristik von x, so besteht die Gleichungskette (31), *in welcher x_1 positiv, $x_2, x_3, \ldots$ sämmtlich grösser als* 1 *sind. Aus dieser Gleichungskette folgt die natürliche Kettenbruchentwicklung* (32) *oder* (33) *von x, je nachdem $k_2 > 1$ oder $k_2 = 1$ ist. Im ersten Falle stimmen die Hauptbrüche* (29) *direct, im zweiten Falle nach Fortlassung der beiden ersten Brüche mit den successiven Näherungsbrüchen der Kettenbruchentwicklung von x überein.*

§ 7.

Lineare Transformation.

Es seien x und x_1 zwei äquivalente Grössen, d. h. zwei Grössen, zwischen denen eine Gleichung der Gestalt

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = S(x) \tag{34}$$

besteht, wo α, β, γ, δ irgend vier ganze Zahlen der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{35}$$

bezeichnen. Die Reihen der Näherungsbrüche von x und x_1 stehen dann in einer einfachen Beziehung zu einander, die wir jetzt entwickeln wollen. Zu dem Ende schicken wir einige leicht zu beweisende Hülfssätze voraus.

1) Wächst die Veränderliche w stetig von ξ bis $\eta > \xi$, so wächst $S(w)$ stetig von $S(\xi)$ bis $S(\eta) > S(\xi)$, vorausgesetzt, dass $S(w)$ in dem Intervalle $w = \xi$ bis η endlich bleibt, d. h. dass $-\frac{\delta}{\gamma}$ nicht zwischen ξ und η liegt.

2) Sind $\varrho = \frac{r}{u}$, $\sigma = \frac{s}{v}$ zwei rationale Zahlen, welche der Bedingung genügen, dass die aus ihren Zählern und Nennern gebildete Determinante $(us - vr)$ gleich 1 ist, so genügen die Zahlen $S(\varrho)$ und $S(\sigma)$ derselben Bedingung. Ist ferner der Bruch τ durch Addition der Zähler und Nenner aus ϱ und σ abgeleitet $\left(\tau = \frac{r+s}{u+v}\right)$, so entsteht

der Bruch $S(\tau)$ in der gleichen Weise aus den Brüchen $S(\varrho)$ und $S(\tau)$. Die Richtigkeit dieser Behauptungen geht unmittelbar aus den Werthen $S(\varrho) = \frac{\alpha r + \beta u}{\gamma r + \delta u}$, $S(\sigma) = \frac{\alpha s + \beta v}{\gamma s + \delta v}$, $S(\tau) = \frac{\alpha(r+s) + \beta(u+v)}{\gamma(r+s) + \delta(u+v)}$ hervor.

Sei nun (ξ, η) irgend ein Paar von Näherungsbrüchen der Grösse x, ferner (ξ', η') das darauf folgende Paar. Wenn dann $-\frac{\delta}{\gamma}$ nicht zwischen ξ und η (und also a fortiori auch nicht zwischen ξ' und η') liegt, so folgt aus den Hülfssätzen in Verbindung mit dem Satze 4 (§ 3), dass $S(\xi)$ und $S(\eta)$ ein Paar von Näherungsbrüchen der Grösse x_1 bilden, und dass $S(\xi')$, $S(\eta')$ das auf $S(\xi)$, $S(\eta)$ folgende Paar bilden. Es gilt also der Satz:

Sind x und x_1 durch die Gleichung (34) *verbunden und ist in der Reihe der zu x gehörenden Paare von Näherungsbrüchen*

$$(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}) \ldots (\xi, \eta), (\xi', \eta'), (\xi'', \eta'') \ldots$$

das Paar (ξ, η) das erste, welches $-\frac{\delta}{\gamma}$ ausschliesst (so dass $-\frac{\delta}{\gamma}$ nicht dem von ξ, η begrenzten Intervalle angehört), so besteht die zu x_1 gehörende Reihe von Paaren, wenn man von dieser Reihe eine endliche Zahl von Anfangsgliedern fortlässt, aus den Paaren

$$\big(S(\xi), S(\eta)\big), \big(S(\xi'), S(\eta')\big), \big(S(\xi''), S(\eta'')\big), \ldots$$

Aus diesem Satze ergiebt sich für die einfachen Reihen der Näherungsbrüche von x und x_1 der folgende Satz:

Sind x und x_1 durch die Gleichung (34) *verbunden, sind ferner*

$$\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(\lambda)}, \xi^{(\lambda+1)}, \ldots$$

bez.

$$\xi_1^{(0)}, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(\mu)}, \xi_1^{(\mu+1)}, \ldots$$

die Reihen der Näherungsbrüche von x bez. x_1, so kann man die Indices λ und μ so bestimmen, dass

$$\xi_1^{(\mu)} = S(\xi^{(\lambda)}), \ \xi_1^{(\mu+1)} = S(\xi^{(\lambda+1)}), \ldots, \xi_1^{(\mu+\varkappa)} = S(\xi^{(\lambda+\varkappa)}), \ldots$$

ist.

Da der Bruch $\xi_1^{(\mu+\varkappa)}$ kleiner oder grösser als x_1 ist, je nachdem $\xi^{(\lambda+\varkappa)}$ kleiner oder grösser als x ist, so erhalten diese beiden Brüche denselben Index, nämlich entweder beide den Index — oder beide den Index +. Die Charakteristik von x_1, von der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Stelle an genommen, ist also identisch mit der Charakteristik von x, diese von der $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Stelle an genommen. Das heisst:

Die Charakteristiken von zwei äquivalenten Grössen unterscheiden sich nur in den Anfangsgliedern.

Dieser Satz lässt sich umkehren, wie man auf Grund der Sätze des vorigen Paragraphen, aber auch direct wie folgt beweisen kann. Die Charakteristiken von x und x_1 mögen sich nur in den Anfangs-

gliedern unterscheiden. Wir betrachten dann den gemeinsamen Theil der beiden Charakteristiken von der ersten Stelle ab, an welcher ein Zeichenwechsel eintritt. Dieser Theil sei

$$\varepsilon, \ -\varepsilon, \ \varepsilon', \ \varepsilon'', \ \varepsilon''', \ldots, \varepsilon^{(\varkappa)}, \ldots$$

Den ersten beiden Stellen ε, $-\varepsilon$ mögen die Näherungsbrüche $\frac{r}{u}$, $\frac{s}{v}$ von x und die Näherungsbrüche $\frac{r_1}{u_1}$, $\frac{s_1}{v_1}$ von x_1 entsprechen. Bezeichnen dann ζ bez. ζ_1 die Näherungsbrüche von x bez. x_1, welche der Stelle $\varepsilon^{(\varkappa)}$ entsprechen, so hat man nach dem Bildungsgesetz der Reihe der Näherungsbrüche

$$\zeta = \frac{mr + ns}{mu + nv}, \quad \zeta_1 = \frac{mr_1 + ns_1}{mu_1 + nv_1},$$

wo m, n positive ganze Zahlen bedeuten. Die Elimination dieser Zahlen m, n ergiebt eine Gleichung der Form

$$\zeta_1 = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

und da x die Grenze der Zahlen ζ und x_1 die Grenze der Zahlen ζ_1 ist, so folgt

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

d. h. x und x_1 sind äquivalent. Wir können also den Satz aussprechen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz zweier Grössen x und x_1 ist die, dass ihre Charakteristiken sich nur in einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern unterscheiden.

Sind x und x_1 uneigentlich äquivalent, d. h. besteht zwischen x und x_1 eine Relation der Gestalt

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

wo α, β, γ irgend vier ganze Zahlen der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1$$

bezeichnen, so sind $-x$ und x_1 eigentlich äquivalent. Berücksichtigt man nun, dass die Näherungsbrüche und die Charakteristik von $-x$ aus denen von x erhalten werden, indem man jeden Bruch resp. jedes Vorzeichen mit dem Factor -1 multiplicirt, so erkennt man, dass für die uneigentliche Aequivalenz analoge Sätze gelten, wie für die eigentliche. Diese Sätze liest man unmittelbar aus den oben bewiesenen ab, so dass wir auf eine ausdrückliche Formulirung derselben verzichten können.

§ 8.

Verallgemeinerungen.

Die vorstehende Theorie der angenäherten Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche, lässt sich nach mehreren Richtungen verallgemeinern, wie ich hier zum Schluss kurz andeuten will, indem ich mir vorbehalte, in einigen Arbeiten darauf zurückzukommen, die sich an die vorliegende anschliessen sollen.

Die eine Verallgemeinerung bezieht sich darauf, dass man an Stelle der (reellen) rationalen Zahlen die complexen rationalen Zahlen der Form $\frac{a+bi}{c+di}$ (wo a, b, c, d reelle ganze Zahlen bedeuten) in Betracht zieht. An die Stelle der Fundamentalaufgabe tritt hier die Aufgabe, unter den complexen rationalen Zahlen, deren Zähler und Nenner absolut genommen eine gegebene positive ganze Zahl nicht überschreiten, diejenige zu bestimmen, welche einer gegebenen complexen Grösse x am nächsten kommt. — Noch allgemeiner kann man die Annäherung der Grössen durch Zahlen untersuchen, die in irgend einem endlichen Körper rational sind.

Eine andere Verallgemeinerung besteht darin, dass man nicht *eine* Grösse x, sondern zwei Grössen x und y betrachtet, die durch rationale Zahlen simultan angenähert werden sollen. Des bequemeren Ausdrucks wegen deute ich x und y als rechtwinklige Coordinaten, so dass das Grössenpaar x, y durch einen Punkt in einer Ebene dargestellt wird. In dieser Ebene betrachte man diejenigen Punkte, deren beide Coordinaten rationale Zahlen sind. Die Coordinaten eines solchen Punktes lassen sich stets auf die Form $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$ bringen, wo u, v, w ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Theiler sind. Diese Zahlen nenne ich die *natürlichen* (homogenen) Coordinaten des betreffenden Punktes. Die natürlichen Coordinaten u, v, w eines Punktes (mit rationalen Coordinaten) sind offenbar bis auf den Factor -1, mit dem man alle drei Coordinaten noch multipliciren kann, vollkommen bestimmt. Zieht man nun das System aller Punkte in Betracht, deren natürliche Coordinaten absolut genommen die positive ganze Zahl n nicht übertreffen, so lässt sich zeigen, dass diese Punkte angesehen werden können als die Ecken eines gewissen Dreiecksnetzes von der Eigenschaft, dass erstens die Ebene von dem Netze einfach bedeckt wird, dass zweitens die Determinante aus den natürlichen Coordinaten der Ecken jedes Dreiecks des Netzes den Werth ± 1 besitzt und dass drittens das zur Zahl $n+1$ gehörige Netz aus dem zur Zahl n gehörigen vermöge Theilung einzelner Dreiecke durch geeignete Ecktransversalen entsteht. Das zur Zahl n gehörige Netz nenne ich das n^{te} *Farey'sche Netz.*

Mit Hülfe dieser Farey'schen Netze lässt sich nun ein Zahlenpaar (x, y) durch rationale Zahlen $\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$ in folgender Weise annähern. Man sucht dasjenige Dreieck des n^{ten} Netzes auf, in welchem der Punkt (x, y) liegt und notirt die Coordinaten

$$\left(\frac{u_1}{w_1}, \frac{v_1}{w_1}\right), \left(\frac{u_2}{w_2}, \frac{v_2}{w_2}\right), \left(\frac{u_3}{w_3}, \frac{v_3}{w_3}\right)$$

der drei Ecken dieses Dreiecks. Indem man der Zahl n nach und nach alle ganzzahligen Werthe $1, 2, 3, \ldots$ beilegt, erhält man eine unendliche Reihe solcher Tripel von Zahlenpaaren.

Die Zahlenpaare selber haben das Paar (x, y) zur Grenze, da die Dreiecke, in welchen der Punkt (x, y) liegt, mit wachsendem n immer kleiner und kleiner werden. Ebenso wie es zweckmässig ist, bei der Aufgabe, eine Grösse durch rationale Zahlen anzunähern, die Farey'sche Reihe an die Stelle der Kettenbrüche zu setzen, so ist es angebracht, bei der entsprechenden Aufgabe, zwei Grössen x und y simultan anzunähern, die soeben skizzirte, auf die Farey'schen Netze gegründete Methode an Stelle des Jacobi'schen Kettenbruch-Algorithmus zu Grunde zu legen.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass man auf ähnliche Weise die simultane Annäherung von drei oder mehr Grössen durch rationale Brüche mit demselben Nenner begründen kann.

Zürich, 29. November 1893.

Ueber angewandte Mathematik.

Von

C. Runge in Hannover.

Ueberall, wo man mathematische Gleichungen anwendet, um wirkliche Vorgänge oder Zustände darzustellen, scheint man mir stillschweigend eine Voraussetzung zu machen. Die mathematischen Formeln nämlich sind immer nur als eine schematische Darstellung aufzufassen, bei der als unwesentlich betrachtete Umstände vernachlässigt sind. Denn die Wirklichkeit selbst ist viel zu mannigfaltig, um mit Genauigkeit wieder gegeben zu werden. Auch würde eine genaue Darstellung in den meisten Fällen ihren Zweck verfehlen, weil mit der Berücksichtigung aller Einzelheiten die Uebersicht verloren gehen würde, die man gerade gewinnen will. Und man kann geradezu sagen, dass absichtlich eine von der Wirklichkeit abweichende Darstellung gegeben wird. Stillschweigend nun setzt man voraus, dass, wenn eine wirkliche Grösse nahezu einer Gleichung genügt, auch eine Lösung der Gleichung nahezu mit der wirklichen Grösse übereinstimmt. Die Richtigkeit dieser Voraussetzung versteht sich nicht von selbst. Ja ohne die richtige Einschränkung ist sie gar nicht immer wahr. Aber selbst wenn sie selbstverständlich wäre, so müsste doch verlangt werden, zu bestimmen, wie gross bei einem gegebenen Fehler der Gleichung die Abweichung der wirklichen Grösse von der berechneten höchstens sein kann. Erst wenn hierüber Rechenschaft abgelegt wird, ist die Aufgabe des Mathematikers erfüllt. Dann erst können aus der Rechnung bindende Schlüsse für die Wirklichkeit gezogen werden, und dem Empiriker ist die Ausflucht abgeschnitten die gefundene Abweichung zwischen Beobachtung und Rechnung den vernachlässigten Umständen zur Last zu legen, ausser wenn die Abweichung innerhalb bestimmter zu berechnender Grenzen liegt.

Für den Fall, dass die wirkliche Grösse eine Constante ist, die nahezu einer Gleichung genügt, ist die Berechnung der Grenzen einfach. Sei x die wirkliche Grösse und sei

$$f(x) = \varepsilon,$$

wo ε eine absolut genommen kleine Grösse bedeutet. Wenn man nun die wirkliche Grösse in irgend welche endliche Grenzen einschliessen kann, was ja im Allgemeinen möglich sein wird, und wenn man $f'(x)$ stetig voraussetzt, so wird man auch $f'(x)$ in endliche Grenzen A und B einschliessen können. Die Aenderung von $f(x)$, so lange x zwischen den angegebenen Grenzen bleibt, liegt dann zwischen

$$A\Delta x \quad \text{und} \quad B\Delta x,$$

wenn man die Aenderung von x mit Δx bezeichnet. Vorausgesetzt nun, dass A und B das gleiche Zeichen haben, und dass eine Wurzel x_1 der Gleichung

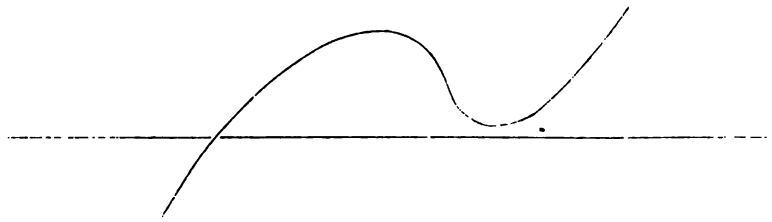
$$f(x) = 0$$

zwischen denselben Grenzen liegt, die für die wirkliche Grösse angegeben werden können, so liegt offenbar $f(x) - f(x_1)$ zwischen $A(x-x_1)$ und $B(x-x_1)$ und $x - x_1$ liegt zwischen

$$\frac{\varepsilon}{A} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{B}.$$

Es ist indessen durchaus nicht gesagt, dass sich ein solcher Werth von x_1 findet.

Es habe z. B. die Curve $y = f(x)$ die Gestalt:



wo ein Minimum der Curve sehr nahe über der x Axe liegt. Wenn nun der wirkliche Werth gleich oder sehr nahe gleich der Abscisse des Minimums ist, so kann $f(x)$ sehr klein und dennoch die Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ sehr weit entfernt sein, vorausgesetzt dass es sich nur um reelle Grössen handelt.

Etwas weniger einfach ist die Frage, wenn x nicht eine Constante sondern eine Function ist, für die eine Differentialgleichung nahezu erfüllt sein soll. Unter welchen Bedingungen kann man auch da eine Grenze angeben für die Abweichung zwischen der wirklichen Function und der genauen Lösung der Gleichung? Die Erörterung dieser Frage bildet den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Ich beschränke mich zunächst auf die Erörterung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Es soll x eine Function von t sein, die einen Differentialquotienten besitzt, der der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

in einem gewissen endlichen Bereich der reellen Veränderlichen x und t nahezu genügt. Es ist zu berechnen, um wie viel alsdann die Function von einer Lösung der Differentialgleichung abweichen kann, die für irgend einen Anfangswerth t_0 nahezu mit der Function übereinstimmt.

Nach dem Cauchy'schen Verfahren (es ist übrigens schon in Eulers Integralrechnung nur ohne Beweis der Convergenz auseinandergesetzt) kann man bekanntlich die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(xt)$$

in ähnlicher Weise lösen, wie man ein Integral berechnet. Man theilt das Intervall t_0 bis t in eine Anzahl Theile t_0 bis t_1, t_1 bis $t_2, \ldots, t_n$ bis t und bildet die Kette:

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= f(x_0 t_0)\,(t_1 - t_0), \\ x_2 - x_1 &= f(x_1 t_1)\,(t_2 - t_1), \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x - x_n &= f(x_n t_n)\,(t - t_n). \end{aligned}$$

Dann ist

$$x = x_n + \sum f(x_r t_r)\,(t_{r+1} - t_r) \quad (t_{n+1} \text{ statt } t \text{ geschrieben}).$$

Macht man nun die Intervalle kleiner und zahlreicher, während man x_0, t_0 und t festhält, so nähert sich

$$x_0 + \sum f(x_r t_r)\,(t_{r-1} - t_r),$$

wie Cauchy gezeigt hat, einer festen Grenze vorausgesetzt, dass $\frac{f(x't) - f(xt)}{x' - x}$ für alle Werthe x, x', t des betrachteten Bereiches zwischen endlichen Grenzen liegt, und dass $f(x\,t)$ stetig ist. Dieser Grenzwerth von

$$x_0 + \sum f(x_r t_r)\,(t_{r+1} - t_r)$$

bildet als Function von t betrachtet die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(xt).$$

Es sei mir erlaubt diesen Beweis in einer von der Cauchy'schen etwas abweichenden Form hier zu wiederholen.

Es werde x_r in $x_r + \delta_r$ verwandelt, dadurch dass man mit den vorhergehenden Intervallen oder mit x_0 irgend welche Aenderungen vornimmt. Dann werden in der Kette von Gleichungen auch x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots, x_n, x$ verändert. Die neuen Werthe mögen mit $x_{r+1} + \delta_{r+1}$, $x_{r+2} + \delta_{r+2}, \ldots, x_n + \delta_n$, $x + \delta$ oder auch mit $x'_{r+1}, x'_{r+2}, \ldots, x'_n, x'$ bezeichnet werden und ebenso soll auch für $x_r + \delta_r$ die Bezeichnung x'_r zulässig sein.

Es ist nun

$$\begin{aligned}
x'_{r+1} - x'_r &= x_{r+1} - x_r + \delta_{r+1} - \delta_r &&= f(x'_r t_r)\,(t_{r+1} - t_r),\\
x'_{r+2} - x'_{r+1} &= x_{r+2} - x_{r+1} + \delta_{r+2} - \delta_{r+1} &&= f(x'_{r+1} t_{r+1})\,(t_{r+2} - t_{r+1}),\\
&\vdots &&\vdots\\
x' - x'_n &= x - x_n + \delta - \delta_n &&= f(x'_n t_n)(t - t_n).
\end{aligned}$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen $x_{\alpha+1} - x_\alpha$ durch $f(x_\alpha t_\alpha)(t_{\alpha+1} - t_\alpha)$, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
\delta_{r+1} - \delta_r &= [f(x'_r t_r) - f(x_r t_r)]\,(t_{r+1} - t_r),\\
\delta_{r+2} - \delta_{r+1} &= [f(x'_{r+1} t_{r+1}) - f(x_{r+1} t_{r+1})](t_{r+2} - t_{r+1}),\\
&\vdots\\
\delta - \delta_n &= [f(x'_n t_n) - f(x_n t_n)]\,(t - t_n),
\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}
\delta_{r+1} &= \left[1 + \frac{f(x'_r t_r) - f(x_r t_r)}{x'_r - x_r}(t_{r+1} - t_r)\right]\delta_r,\\
\delta_{r+2} &= \left[1 + \frac{f(x'_{r+1} t_{r+1}) - f(x_{r+1} t_{r+1})}{x'_{r+1} - x_{r+1}}(t_{r+2} - t_{r+1})\right]\delta_{r+1},\\
&\vdots\\
\delta &= \left[1 + \frac{f(x'_n t_n) - f(x_n t_n)}{x'_n - x_n}(t - t_n)\right]\delta_n.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass, wenn

$$\frac{f(x' t) - f(x t)}{x' - x}$$

für alle in Betracht kommenden Werthe von $x x' t$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als C,

$$\begin{aligned}
|\delta_{r+1}| &< (1 + C|t_{r+1} - t_r|)\,|\delta_r|,\\
|\delta_{r+2}| &< (1 + C|t_{r+2} - t_{r+1}|)\,|\delta_{r+1}|,\\
&\vdots\\
|\delta| &< (1 + C|t - t_n|)\,|\delta_n|
\end{aligned}$$

und mithin

$$|\delta| < \prod (1 + C|t_{\alpha+1} - t_\alpha|)\,|\delta_r|.$$

Hieraus aber folgt

$$l|\delta| < C|t - t_r| + l|\delta_r|$$

oder

$$|\delta| < |\delta_r|\, e^{C|t - t_r|}.$$

Wenn zwischen t_0 und t_1 eine Anzahl Theilpunkte $t_{01} t_{02} \ldots t_{0r}$ ein-

geschoben werden, so treten in der Kette von Gleichungen an Stelle der ersten Gleichung die r Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} x_{01} - x_0 &= f(x_0 t_0)\,(t_{01} - t_0), \\ x_{02} - x_{01} &= f(x_{01} t_{01})\,(t_{02} - t_{01}), \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{0r} - x_{0,r-1} &= f(x_{0,r-1} t_{0,r-1})\,(t_{0r} - t_{0,r-1}) \end{aligned}$$

und die nächste Gleichung wird

$$x_1' - x_{0r} = f(x_{0r} t_{0r})\,(t_1 - t_{0r}).$$

Das so berechnete x_1' ist natürlich nicht mit dem früher gefundenen x_1 identisch, was durch den Strich angedeutet ist. Der Unterschied $x_1' - x_1$ ist gleich

$$\sum f(x_{0\alpha} t_{0\alpha})\,(t_{0,\alpha+1} - t_{0\alpha}) - f(x_0 t_0)\,(t_1 - t_0)$$

oder, was dasselbe ist:

$$\sum [f(x_{0\alpha} t_{0\alpha}) - f(x_0 t_0)]\,(t_{0,\alpha+1} - t_{0\alpha}).$$

Bezeichnet man mit ε_1 die grösste Werthschwankung von $f(xt)$ für die hier in Betracht kommenden Werthe von x und t, so ist also

$$|x_1' - x_1| < \varepsilon_1 |t_1 - t_0|.$$

Wird $f(x\,t)$ für den ganzen Bereich der Werthe von x und t als stetig vorausgesetzt, so wird die grösste Werthschwankung in einem hinreichend kleinen Gebiete beliebig klein. Das Gebiet aber, das für ε_1 in Betracht kommt, ist für hinreichend kleine Werthe von $t_1 - t_0$ beliebig klein, da die Differenz zwischen x_0 und den in Betracht kommenden Werthen von x in Folge ihrer Definition durch die Kette von Gleichungen kleiner als $M|t_1 - t_0|$ sein muss, wenn $|f(xt)| < M$ ist. Bezeichnet man $x_1' - x_1$ mit δ_1, so ist nun, wie oben gezeigt ist, die Aenderung von x, die durch die Einschiebung der neuen Theilpunkte im ersten Intervall bewirkt wird, kleiner als

$$|\delta_1|\, e^{C|t-t_1|} < \varepsilon_1 |t_1 - t_0|\, e^{C|t-t_1|}.$$

Werden in gleicher Weise in allen übrigen Intervallen Theilpunkte eingeschoben, so wird offenbar die Gesammtänderung von x nicht grösser sein als

$$\varepsilon_1 |t_1 - t_0|\, e^{C|t-t_1|} + \varepsilon_2 |t_2 - t_1|\, e^{C|t-t_2|} + \cdots + \varepsilon_{n+1} |t - t_n|\, e^{C|t-t_n|}.$$

Bezeichnet τ das grösste der Intervalle $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, $\ldots$, $t - t_n$ und bezeichnet ε die grösste Werthschwankung in einem Gebiet x, t, dessen Werthe von t nicht mehr als τ und dessen Werthe von x nicht mehr als $M\tau$ von einander abweichen, so muss jene Summe kleiner sein als

$$\varepsilon |t - t_0|\, e^{C|t-t_0|}.$$

Es wird aber ε bei der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(xt)$ mit τ beliebig klein. Also kann der berechnete Werth von x, wenn die Intervalle schon hinreichend klein sind, durch eine weitere Eintheilung der Intervalle nur beliebig wenig geändert werden. Damit ist grade wie bei dem bestimmten Integral die Convergenz nachgewiesen.

Ich komme nun auf den zu beweisenden Satz zurück.

Es sollen wie oben mit $x_0 x_1 \ldots x_n x$ die Grössen bezeichnet werden, die durch die Kette von Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= f(x_0\, t_0)\,(t_1 - t_0), \\ x_2 - x_1 &= f(x_1\, t_1)\,(t_2 - t_1), \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x - x_n &= f(x_n t_n)\,(t - t_n) \end{aligned}$$

mit einander verbunden sind. Dagegen sollen jetzt $x_0' x_1' x_2' \ldots x_n' x'$ irgend welche Werthe sein, die den Werthen $t_0 t_1 t_2 \ldots t_n t$ entsprechen und nur der Bedingung genügen sollen, dass sie dem betrachteten Bereich der Werthe xt angehören, und dass die Differenzenquotienten

$$\frac{x_1' - x_0'}{t_1 - t_0},\ \frac{x_2' - x_1'}{t_2 - t_1},\ \ldots,\ \frac{x' - x_n'}{t - t_n}$$

nahezu mit den Werthen

$$f(x_0' t_0),\ f(x_1' t_1) \ldots f(x_n' t_n)$$

übereinstimmen:

$$\frac{x_{r+1}' - x_r'}{t_{r+1} - t_r} = f(x_r' t_r) + k_r.$$

Es bezeichne δ_0 die Differenz $x_0' - x_0$, δ_1 die Differenz $x_1' - x_1$ u. s. w., δ die Differenz $x' - x$, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \left[1 + \frac{f(x_0' t_0) - f(x_0 t_0)}{x_0' - x_0}(t_1 - t_0)\right]\delta_0 + k_0(t_1 - t_0), \\ \delta_2 &= \left[1 + \frac{f(x_1' t_1) - f(x_1 t_1)}{x_1' - x_1}(t_2 - t_1)\right]\delta_1 + k_1(t_2 - t_1), \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \delta &= \left[1 + \frac{f(x_n' t_n) - f(x_n t_n)}{x_n' - x_n}(t - t_n)\right]\delta_n + k_n(t - t_n). \end{aligned}$$

Mithin, wenn $|k_r|$ für $r = 0, 1, \ldots, n$ kleiner ist als k:

$$\begin{aligned} |\delta_1| &< (1 + C|t_1 - t_0|)\,|\delta_0| + k|t_1 - t_0|, \\ |\delta_2| &< (1 + C|t_2 - t_1|)\,|\delta_1| + k|t_2 - t_1|, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ |\delta| &< (1 + C|t - t_n|)\,|\delta_n| + k|t - t_n|, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}|\delta| < \quad & k|t-t_n| \\ & + k|t_n-t_{n-1}|\,(1+C|t-t_n|) \\ & + k|t_{n-1}-t_{n-2}|\,(1+C|t-t_n|)\,(1+C|t_n-t_{n-1}|) \\ & \quad\vdots \\ & + k|t_1-t_0|\,(1+C|t-t_n|)\,(1+C|t_n-t_{n-1}|)\ldots(1+C|t_2-t_1|) \\ & + |\delta_0|\,(1+C|t-t_n|)\,(1+C|t_n-t_{n-1}|)\ \ldots(1+C|t_1-t_0|)\end{aligned}$$

und folglich:

$$|\delta| < k|t-t_0|\,e^{C|t-t_0|} + |\delta_0|\,e^{C|t-t_0|}.$$

Nun ist x, wie oben gezeigt wurde, um nicht mehr als

$$\varepsilon|t-t_0|\,e^{C|t-t_0|}$$

von dem Werthe verschieden, den die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(xt),$$

wenn für sie die gleichen Anfangswerthe $x_0 t_0$ gesetzt werden, für den Werth t annimmt. Folglich ist x' von der Lösung der Differentialgleichung nicht mehr als

$$\left((\varepsilon+k)\,|t-t_0| + |\delta_0|\right)e^{C|t-t_0|}$$

verschieden. Dabei beschränken sich die Voraussetzungen, die über $f(x,t)$ gemacht sind, auf die Stetigkeit von $f(x,t)$ und die Endlichkeit von

$$\frac{f(x't)-f(xt)}{x'-x}$$

für den betrachteten Bereich der Werthe von x und t.

Dieses Ergebniss setzt uns nun in den Stand über den Grad der Annäherung zu entscheiden zwischen einer Function, die der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(xt)$$

genügt und einer Function, die ihr nahezu genügt und mit jener für $t = t_0$ nahezu übereinstimmt. Ja es ist gar nicht einmal erforderlich, dass diese Function differentiirbar sei. Es ist nur nothwendig, dass die Differenzenquotienten

$$\frac{x_1'-x_0'}{t_1-t_0},\ \frac{x_2'-x_1'}{t_2-t_1},\ \ldots,\ \frac{x'-x_n'}{t-t_n}$$

mit den Werthen der durch die Differentialgleichung vorgeschriebenen Differentialquotienten nahezu übereinstimmen. Wie klein man hier die Intervalle machen kann, davon hängt der Grad der Uebereinstimmung mit der exacten Lösung ab. Jedoch ist, wie man sieht, der Uebergang zu beliebig kleinen Intervallen nicht nothwendig.

Der analoge Satz für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung lässt sich nun in ganz ähnlicher Weise ableiten. Es ist bekannt,

dass man jede Differentialgleichung höherer Ordnung als ein System von simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben kann in der Form:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y \cdots w, t), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y \cdots wt), \quad \cdots \frac{dw}{dt} = p(x, y \cdots wt).$$

Die Lösungen kann man nach dem Cauchy'schen Verfahren erhalten. Es sind die Grenzwerthe, denen sich für unendlich kleine Intervalle die Werthe $x, y \ldots w$ nähern, die aus folgender Kette von Gleichungen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_0 &= f(x_0 y_0 \ldots w_0 t_0)\,(t_1 - t_0),\\
x_2 - x_1 &= f(x_1 y_1 \ldots w_1 t_1)\,(t_2 - t_1),\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
x - x_n &= f(x_n y_n \ldots w_n t_n)\,(t - t_n),\\
y_1 - y_0 &= g(x_0 y_0 \ldots w_0 t_0)\,(t_1 - t_0), \ \ldots,\\
y_2 - y_1 &= g(x_1 y_1 \ldots w_1 t_1)\,(t_2 - t_1), \ \ldots,\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
y - y_n &= g(x_n y_n \ldots w_n t_n)\,(t - t_n), \ \ldots,\\
w_1 - w_0 &= p(x_0 y_0 \ldots w_0 t_0)\,(t_1 - t_0),\\
w_2 - w_1 &= p(x_1 y_1 \ldots w_1 t_1)\,(t_2 - t_1),\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
w - w_n &= p(x_n y_n \ldots w_n t_n)\,(t - t_n).
\end{aligned}$$

Man betrachte nun den Einfluss, den eine Aenderung von $x_r y_r \ldots w_r$ auf die folgenden Werthe hat. Seien

$$x_r' y_r' \ldots w_r'; \quad x_{r+1}' y_{r+1}' \ldots w_{r+1}'; \ \ldots; \ x' y' \ldots w'$$

die neuen Werthe und sei

$$\begin{aligned}
x_r' - x_r &= \alpha_r \quad & y_r' - y_r &= \beta_r \quad \ldots & w_r' - w_r &= \delta_r,\\
x_{r+1}' - x_{r+1} &= \alpha_{r+1} \quad & y_{r+1}' - y_{r+1} &= \beta_{r+1} \quad \ldots & w_{r+1}' - w_{r+1} &= \delta_{r+1},\\
&\vdots & &\vdots & &\vdots\\
x' - x &= \alpha \quad & y' - y &= \beta \quad \ldots & w' - w &= \delta,
\end{aligned}$$

so ist

$$\alpha_{r+1} - \alpha_r = \big(f(x_r' y_r' \ldots w_r' t_r) - f(x_r y_r \ldots w_r t_r)\big)\,(t_{r+1} - t_r) \quad \text{etc.}$$

oder

$$\begin{aligned}
\alpha_{r+1} = \alpha_r &+ \frac{f(x_r' y_r' \ldots w_r' t_r) - f(x_r y_r' \ldots w_r' t_r)}{x_r' - x_r}\,\alpha_r (t_{r+1} - t_r)\\
&+ \frac{f(x_r y_r' \ldots w_r' t_r) - f(x_r y_r \ldots w_r' t_r)}{y_r' - y_r}\,\beta_r (t_{r+1} - t_r)\\
&\qquad\vdots\\
&+ \frac{f(x_r y_r \ldots w_r' t_r) - f(x_r y_r \ldots w_r t_r)}{w_r' - w_r}\,\delta_r (t_{r+1} - t_r) \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Wenn nun die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_r' y_r' \ldots w_r' t_r) - f(x_r y_r' \ldots w_r' t_r)}{x_r' - x_r} \quad \text{etc.}$$

für alle in Betracht kommenden Werthe der Veränderlichen dem absoluten Betrage nach kleiner sind als C, so ist

$$\begin{aligned}
|\alpha_{r+1}| &< (1 + C|t_{r+1} - t_r|)\,|\alpha_r| + C(|\beta_r| + \cdots + |\delta_r|)\,|t_{r+1} - t_r|,\\
|\beta_{r+1}| &< (1 + C|t_{r+1} - t_r|)\,|\beta_r| + C(|\alpha_r| + \cdots + |\delta_r|)\,|t_{r+1} - t_r|,\\
&\vdots\\
|\delta_{r+1}| &< (1 + C|t_{r+1} - t_r|)\,|\delta_r| + C(|\alpha_r| + |\beta_r| + \cdots)\,|t_{r+1} - t_r|
\end{aligned}$$

und es gelten analoge Relationen für

$$\alpha_{r+2},\ \beta_{r+2} \ldots \delta_{r+2};\ \ldots;\ \alpha,\ \beta \ldots \delta.$$

Sei $|\gamma_r|$ die grösste unter den Grössen $|\alpha_r|, |\beta_r| \ldots |\delta_r|$, und s ihre Anzahl, so sind $|\alpha_{r+1}|, |\beta_{r+1}| \ldots |\delta_{r+1}|$ alle kleiner als

$$(1 + sC|t_{r+1} - t_r|)\,|\gamma_r|.$$

Alsdann sind $|\alpha_{r+2}|, |\beta_{r+2}| \ldots |\delta_{r+2}|$ alle kleiner als

$$1 + sC|t_{r+1} - t_r|)\,(1 + sC|t_{r+2} - t_{r+1}|)\,|\gamma_r|$$

und endlich $|\alpha|, |\beta| \ldots |\delta|$ alle kleiner als

$$(1 + sC|t_{r+1} - t_r|)\,(1 + sC|t_{r+2} - t_{r+1}|) \ldots (1 + sC|t - t_r|)\,|\gamma_r|$$

d. i. kleiner als

$$e^{sC|t - t_r|} \cdot |\gamma_r|.$$

Das Intervall t_0 bis t_1 werde nun in kleinere Theile getheilt, indem zwischen t_0 und t_1 Theilpunkte $t_{01} t_{02} \ldots t_{0r}$ eingeschoben werden. Seien

$$x_{01} x_{02} \ldots x_{0r};\ y_{01} y_{02} \ldots y_{0r}, \ldots;\ w_{01} w_{02} \ldots w_{0r}$$

die zugehörigen Werthe von $x, y, \ldots w$. Dann wird

$$\begin{aligned}
x_{01} - x_0 &= f(x_0\ y_0 \ldots w_0\ t_0)\ (t_{01} - t_0), \ldots\\
x_{02} - x_{01} &= f(x_{01}\, y_{01} \ldots w_{01}\, t_{01})\ (t_{02} - t_{01}), \ldots\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
x_1' - x_{0r} &= f(x_{0r}\, y_{0r} \ldots w_{0r}\, t_{0r})\ (t_1 - t_{0r}), \ldots\\
w_{01} - w_0 &= p(x_0\ y_0 \ldots w_0\ t_0)\ (t_{01} - t_0),\\
w_{02} - w_{01} &= p(x_{01} y_{01} \ldots w_{01}\, t_{01})\ (t_{02} - t_{01}),\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
w_1' - w_{0r} &= p(x_{0r} y_{0r} \ldots w_{0r} t_{0r})\ (t_1 - t_{0r}).
\end{aligned}$$

Die hier gefundenen Werthe $x_1' y_1' \ldots w_1'$ sind nicht gleich den vorhin gefundenen Werthen $x_1 y_1 \ldots w_1$. Man hat

$$\begin{aligned}
x_1' - x_0 = f(x_0 y_0 \ldots w_0 t_0)\ (t_{01} - t_0) &+ f(x_{01} y_{01} \cdots w_{01} t_{01})\ (t_{02} - t_{01}) + \cdots\\
&+ f(x_{0r} y_{0r} \ldots w_{0r} t_{0r})\ (t_1 - t_{0r}) \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Andrerseits kann man schreiben:

$$x_1 - x_0 = f(x_0 y_0 \ldots w_0 t_0)\,(t_{01} - t_0) + f(x_0 y_0 \ldots w_0 t_0)\,(t_{02} - t_{01}) + \cdots + f(x_0 y_0 \ldots w_0 t_0)\,(t_1 - t_{0r}) \quad \text{etc.}$$

Mithin ist, wenn ε_1 die grösste Werthschwankung der Functionen $f, g, \ldots p$ für die hier in Betracht kommenden Werthsysteme bezeichnet,

$$|x_1' - x_1| < \varepsilon_1 |t_1 - t_0|$$

und ebenso

$$|y_1' - y_1| < \varepsilon_1 |t_1 - t_0|, \ \ldots, \ |w_1' - w_1| < \varepsilon_1 |t_1 - t_0|.$$

Die neuen Werthe $x_1' y_1' \ldots w_1'$ bewirken nun eine Aenderung der folgenden Werthe. Aber wie eben gezeigt ist, kann die Aenderung von $xy \ldots w$ nicht grösser sein als

$$\varepsilon_1 |t_1 - t_0|\, e^{s C |t - t_0|}.$$

Theilt man nun ebenso alle übrigen Intervalle von Neuem in Unterabtheilungen, so wird die Gesammtänderung von $xy \ldots w$ nicht grösser sein können als

$$\sum \varepsilon_r |t_r - t_{r-1}|\, e^{s C |t - t_0|}$$

und, wenn ε die grösste unter den grössten Werthschwankungen ist, nicht grösser als

$$\varepsilon |t - t_0|\, e^{s C |t - t_0|}.$$

Es sind hier zwei Voraussetzungen gemacht, nämlich, dass $f, g \ldots p$ für den betrachteten Bereich stetige Functionen ihrer Argumente seien, und dass die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x'y \ldots wt) - f(xy \ldots wt)}{x' - x},$$

$$\frac{f(xy' \ldots wt) - f(xy \ldots wt)}{y' - y}, \ \ldots, \ \frac{f(xy \ldots w't) - f(xy \ldots wt)}{w' - w}$$

und die ähnlichen der Functionen $g, \ldots p$ in dem betrachteten Bereich eine endliche Grenze nicht übersteigen. Unter diesen Voraussetzungen nähern sich also die durch die Gleichungskette berechneten Werthe von $x, y \ldots w$ festen Grenzwerthen, wenn man die Intervalle unendlich klein werden lässt.

Es seien nun $x'y' \ldots w'$ Functionen von t, die den Differentialgleichungen nahezu genügen. Wir nehmen die Werthe dieser Functionen für $t_0 t_1 \ldots t_n t$ und bilden die Differenzenquotienten

$$\frac{x_1' - x_0'}{t_1 - t_0}, \ \frac{x_2' - x_1'}{t_2 - t_1}, \ \ldots, \ \frac{x - x_n'}{t - t_n}$$

und die ähnlichen für $y' \ldots w'$. Diese werden nahezu gleich den Differentialquotienten und mithin nahezu gleich den Werthen sein, die die Differentialgleichungen vorschreiben. Wir setzen

$$\frac{x_1'-x_0'}{t_1-t_0} = f(x_0'y_0'\cdots w_0't_0)+h_1,$$
$$\vdots$$
$$\frac{x'-x_n'}{t-t_n} = f(x_n'y_n'\cdots w_n't_n)+h_n,$$

$$\frac{y_1'-y_0}{t_1-t_0} = g(x_0'y_0'\cdots w_0't_0)+k_1, \cdots, \frac{w_1'-w_0'}{t_1-t_0} = p(x_0'y_0'\cdots w_0't_0)+m_1,$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{y'-y_n'}{t-t_n} = g(x_n'y_n'\cdots w_n't_n)+k_n, \cdots, \frac{w'-w_n'}{t-t_n} = p(x_n'y_n'\cdots w_n't_n)+m_n.$$

Dann ist offenbar

$$(x_1'-x_1)-(x_0'-x_0) = [f(x_0'y_0'\ldots w_0')-f(x_0y_0\ldots w_0)](t_1-t_0)+k_1(t_1-t_0)$$

und daher

$$|x_1'-x_1| < |x_0'-x_0|+C(|x_0'-x_0|+|y_0'-y_0|+\cdots+|w_0'-w_0|)|t_1-t_0| + k_1|t_1-t_0|.$$

Sei $|\gamma_0|$ die grösste unter den Grössen

$$|x_0'-x_0|,\ |y_0'-y_0|\ \ldots\ |w_0'-w_0|$$

und $|\lambda|$ die grösste unter den Grössen

$$|h_1|\,|h_2|\ldots|h_n|;\ |k_1|\,|k_2|\ldots|k_n|;\ \ldots;\ |m_1|\,|m_2|\ldots|m_n|,$$

so ist:

$$|x_1'-x_1| < (1+sC|t_1-t_0|)\,|\gamma_0|+|\lambda|\,|t_1-t_0|,$$
$$|x_2'-x_2| < (1+sC|t_2-t_1|)\,(1+sC|t_1-t_0|)\,|\gamma_0| + (1+sC|t_2-t_1|)\,|t_1-t_0|\,|\lambda| + |t_2-t_1|\,|\lambda|$$
etc.

Grade wie oben finden wir so:

$$|x'-x| < e^{sC|t-t_0|}\,|\gamma_0|+|t-t_0|\,e^{sC|t-t_0|}\,|\lambda|.$$

Und dieselbe obere Grenze gilt auch für $|y'-y|\ldots|w'-w|$. Nun weichen die Werthe $xy\ldots w$ um nicht mehr als

$$\varepsilon|t-t_0|\,e^{sC|t-t_0|}$$

von den Grenzwerthen ab, die die genauen Lösungen der Differentialgleichungen darstellen. Mithin weichen $x'y'\ldots w'$ von den genauen Lösungen der Differentialgleichungen um nicht mehr als

$$(\varepsilon\,.\,|t-t_0|+|\gamma_0|+|\lambda|\,|t-t_0|)\,e^{sC|t-t_0|}$$

ab, wenn ihre Anfangswerthe um nicht mehr als $|\gamma_0|$ von einander abweichen. Es ist auch nicht uninteressant hervorzuheben, dass die Differentiirbarkeit der Functionen gar nicht einmal nöthig ist, sondern dass man nur die Differenzenquotienten zu betrachten braucht. Sind diese nahezu gleich den Werthen, die die Differentialgleichungen für

die Differentialquotienten vorschreiben, so lässt sich für den Grad der Annäherung eine Grenze berechnen. Es ist hier nicht darauf abgesehen, möglichst enge Grenzen zu finden, sondern es kam mir nur darauf an, die Durchführbarkeit der Rechnung zu zeigen. Im besonderen Fall muss man natürlich versuchen die Grenzen so eng wie möglich zu berechnen, und man wird sich dabei aller Vortheile zu bedienen haben, die der einzelne Fall gewährt. Dafür allgemeine Vorschriften zu geben, liegt hier nicht in dem Bereich der Betrachtung.

Für partielle Differentialgleichungen wird vermuthlich ein ähnlicher Satz existiren. Es ist mir aber bis jetzt nicht gelungen die analogen Erörterungen durchzuführen.

Hannover, im December 1893.

Ueber die Bedingung, unter der eine Flächenschaar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört.

Von

R. v. Lilienthal in Münster i./W.

Die Bedingung, unter der eine Flächenschaar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört, scheint bisher nur in folgenden beiden Fällen näher untersucht zu sein. Man betrachtet entweder eine Flächenschaar als gegeben durch eine Gleichung von der Form

$$F(u, v, w) = r,$$

wo u, v, w die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes bedeuten, während r einen von Fläche zu Fläche variirenden Parameter bezeichnet, oder man benutzt zur Definition der Flächenschaar ein System von drei Gleichungen

$$u = f_1(p, q, r), \quad v = f_2(p, q, r), \quad w = f_3(p, q, r),$$

in welchem r dieselbe Rolle wie vorhin spielt.

Man kann aber noch einen dritten Fall berücksichtigen, welchen die Theorie der Curvencongruenzen darbietet. Die letzten drei Gleichungen können nämlich auch als Gleichungen einer doppelt unendlichen Curvenschaar angesehen werden. Längs jeder Curve der Schaar ist r veränderlich, während p und q constant bleiben. Sind die fraglichen Curven die orthogonalen Trajectorien einer Flächenschaar, so muss sich entscheiden lassen, ob dieselbe einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört oder nicht.

In allen drei Fällen handelt es sich um die Transformation ein und derselben Bedingungsgleichung. Bezeichnet man nämlich mit A, B, C die Richtungscosinus der Tangenten einer Schaar von Krümmungslinien der betrachteten Flächenschaar, so gehört letztere einem dreifach orthogonalen Flächensystem an, falls der Ausdruck

$$A\,du + B\,dv + C\,dw$$

durch Multiplication mit einem geeigneten Factor in das Differential einer Function von u, v, w übergeht, oder was dasselbe ist, falls der Ausdruck:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial w}-\frac{\partial C}{\partial v}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial u}-\frac{\partial A}{\partial w}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial B}{\partial u}\right)$$

verschwindet, wobei es gleichgültig ist, welche Schaar von Krümmungslinien man benutzt. Daraus folgt aber, dass sich die fragliche Bedingung auch ohne Zuhilfenahme der quadratischen Gleichung, von welcher die Grössen A, B, C abhängen, bilden lassen muss, also im ersten Fall rational durch die Function F und ihre Ableitungen, in den beiden übrigen Fällen rational durch die Coefficienten a_{ik} des Quadrats des Linearelements:

$$du^2+dv^2+dw^2=a_{11}dp^2+a_{22}dq^2+a_{33}dr^2+2a_{12}dp\,dq$$
$$+2a_{13}dp\,dr+2a_{23}dq\,dr.$$

Die beiden ersten Fälle sind von Herrn Weingarten vollständig erledigt worden. (Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 83, S. 1. Man vergleiche im selben Journal die Arbeit des Herrn Frobenius Bd. 110, S. 1 sowie den Litteraturnachweis bei Salmon-Fiedler, analytische Geometrie des Raumes, Artikel über Orthogonalflächen.)

Fassen wir den dritten Fall in's Auge, so muss, damit die Curven der Congruenz die orthogonalen Trajectorien einer Flächenschaar seien, vorausgesetzt werden, dass der Ausdruck:

$$a_{13}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial r}-\frac{\partial a_{23}}{\partial q}\right)+a_{23}\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial p}-\frac{\partial a_{13}}{\partial r}\right)+a_{33}\left(\frac{\partial a_{13}}{\partial q}-\frac{\partial a_{23}}{\partial p}\right)$$

verschwindet. Es soll gezeigt werden, dass jene Flächenschaar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{22} \\ \frac{\partial A_{11}}{\partial r} & \frac{\partial A_{12}}{\partial r} & \frac{\partial A_{22}}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial r^2} \end{vmatrix}$$

den Werth Null besitzt, wo A_{11}, A_{12}, A_{22} der Reihe nach die Ausdrücke $a_{22}a_{33}-a_{23}^2$, $a_{23}a_{13}-a_{12}a_{33}$, $a_{11}a_{33}-a_{13}^2$ bedeuten.

Bei Benutzung der in meinen Arbeiten zur Theorie der Curvenschaaren gebrauchten Bezeichnungen (diese Annalen Bd. 32, S. 545 — mit I — und Bd. 38, S. 429 — mit II citirt) stellt sich die vorausgesetzte Bedingung durch das Verschwinden der Grösse e_0 oder ε_0 dar. Alsdann gehen die mit $\varkappa_1$, λ_1, μ_1; $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 bezeichneten Richtungscosinus in solche der Tangenten der Krümmungslinien der betrachteten Flächenschaar über. Nach II, S. 437 gehört letztere einem dreifach orthogonalen Flächensystem an, wenn ϑ_0 verschwindet, d. h. nach II, S. 431, wenn $\sum \varkappa_2 \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r}=0$ ist, was mit einer Be-

merkung von Lévy (Journal de l'école polytech. Tome 26, 1870) übereinstimmt.

Um die Grösse ϑ_0 unter der Voraussetzung $\varepsilon_0 = 0$ durch die Coefficienten a_{lx} des Quadrats des Linearelements darzustellen, geht man am einfachsten von der Gleichung aus:

$$2\sqrt{a_{33}}\,\vartheta_0 = \sum x_2 \frac{\partial x_1}{\partial r} - \sum x_1 \frac{\partial x_2}{\partial r}$$

oder (II S. 433):

$$2\vartheta_0 = \sum x_2 g_0(x_1) - \sum x_1 g_0(x_2).$$

Unter Benutzung der I, S. 549 für x_1 und x_2 aufgestellten Ausdrücke folgt:

$$2\vartheta_0 = \frac{1}{V_1 V_2}\Big\{(t_1 - t_2)\Big(\sum \xi_q g_0(\xi_p) - \sum \xi_p g_0(\xi_q)\Big) + \Phi\big(g_0(t_2) - g_0(t_1)\big) + \Psi\big(t_1 g_0(t_2) - t_2 g_0(t_1)\big)\Big\}.$$

Zur Umgestaltung dieses Ausdrucks ist zunächst die quadratische Gleichung, deren Wurzeln t_1 und t_2 sind, in eine geeignete Form zu bringen.

Man hat (I S. 547):

$$\xi_p = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_p}{\sqrt{a_{33}}} - \xi \frac{(a_{33})_p}{2a_{33}}.$$

Da aber:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_p = \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial r} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_p}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial r} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial \frac{a_{13}}{a_{33}}}{\partial r},$$

so folgt:

$$\xi_p = \frac{\frac{\partial u_p}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}} + \xi\left(\frac{\partial \frac{a_{13}}{a_{33}}}{\partial r} - \frac{(a_{33})_p}{2a_{33}}\right)$$

und analog:

$$\xi_q = \frac{\frac{\partial u_q}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}} + \xi\left(\frac{\partial \frac{a_{23}}{a_{33}}}{\partial r} - \frac{(a_{33})_q}{2a_{33}}\right).$$

Dies ergiebt:

$$e_{11} = \tfrac{1}{2} g_0(\mathfrak{E}), \quad e_{12} = e_{21} = \tfrac{1}{2} g_0(\mathfrak{F}), \quad e_{22} = \tfrac{1}{2} g_0(\mathfrak{G}),$$

sowie, falls $\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = \Delta$ gesetzt wird:

$$\xi_p = \frac{u_p}{2\Delta}\big(\mathfrak{G} g_0(\mathfrak{E}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{F})\big) + \frac{u_q}{2\Delta}\big(\mathfrak{E} g_0(\mathfrak{F}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{E})\big),$$

$$\xi_q = \frac{u_p}{2\Delta}\big(\mathfrak{G} g_0(\mathfrak{F}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{G})\big) + \frac{u_q}{2\Delta}\big(\mathfrak{E} g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{F})\big).$$

Nimmt man $g_0(\mathfrak{E})\,g_0(\mathfrak{G}) - g_0(\mathfrak{F})^2 = \Delta'$, so entsteht:

$$\mathsf{H} = \frac{1}{4\Delta}\left(g_0(\mathfrak{E})\,g_0(\Delta) - \mathfrak{E}\Delta'\right), \quad \Phi = \frac{1}{4\Delta}\left(g_0(\mathfrak{F})\,g_0(\Delta) - \mathfrak{F}\Delta'\right),$$

$$\Psi = \frac{1}{4\Delta}\left(g_0(\mathfrak{G})\,g_0(\Delta) - \mathfrak{G}\Delta'\right),$$

und die quadratische Gleichung, deren Wurzeln t_1 und t_2 sind, nimmt die Form an:

$$\left(\mathfrak{F}g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{G}g_0(\mathfrak{F})\right)t^2 - \left(\mathfrak{G}g_0(\mathfrak{E}) - \mathfrak{E}g_0(\mathfrak{G})\right)t + \mathfrak{E}g_0(\mathfrak{F}) - \mathfrak{F}g_0(\mathfrak{E}) = 0.$$

Führt man nun die Bezeichnungen ein:

$$\mathsf{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \\ g_0(\mathfrak{E}) & g_0(\mathfrak{F}) & g_0(\mathfrak{G}) \\ g_{00}(\mathfrak{E}) & g_{00}(\mathfrak{F}) & g_{00}(\mathfrak{G}) \end{vmatrix}, \quad S = \left(g_0(\Delta)\right)^2 - 4\Delta\Delta',$$

so ergiebt sich mit Hülfe der letzten Gleichung:

$$g_0(t) = \frac{\mathsf{A}}{2\left(\mathfrak{F}g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{G}g_0(\mathfrak{F})\right)^2}\left\{\mathfrak{G} + \frac{\mathfrak{G}g_0(\Delta) - 2\Delta g_0(\mathfrak{G})}{\sqrt{S}}\right\},$$

falls die Determinante $\mathfrak{F}g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{G}g_0(\mathfrak{F})$ von Null verschieden ist, andernfalls entsteht:

$$g_0(t) = 0, \quad \mathsf{A} = 0.$$

Schon hieraus kann man schliessen, dass die gesuchte Bedingung durch das Verschwinden von A geliefert werden muss, da dann die beiden Werthe von t unabhängig von r werden und somit sich die Krümmungslinien auf den Flächen der betrachteten Schaar entsprechen.

Mit Hülfe der Formeln:

$$\sum u_p\,g_0(\xi_p) = \frac{1}{2}\,g_{00}(\mathfrak{E}) - \mathsf{H},$$

$$\sum u_p\,g_0(\xi_q) = \sum u_q\,g_0(\xi_p) = \frac{1}{2}\,g_{00}(\mathfrak{F}) - \Phi,$$

$$\sum u_q\,g_0(\xi_q) = \frac{1}{2}\,g_{00}(\mathfrak{G}) - \Psi$$

findet man:

$$\sum \xi_q\,g_0(\xi_p) - \sum \xi_p\,g_0(\xi_q) = -\frac{\mathsf{A}}{4\Delta}.$$

Nimmt man die Differenz $\mathfrak{F}g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{G}g_0(\mathfrak{F})$ als von Null verschieden an, so folgt:

$$t_1\,g_0(t_2) - t_2\,g_0(t_1) = \frac{\mathfrak{F}g_0(\Delta) - 2\Delta g_0(\mathfrak{F})}{\left(\mathfrak{F}g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{G}g_0(\mathfrak{F})\right)^2\sqrt{S}}.$$

Dadurch entsteht:

$$\vartheta_0\,V_1\,V_2 = \frac{\mathsf{A}\Delta'}{4\left(\mathfrak{F}g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{G}g_0(\mathfrak{F})\right)\sqrt{S}}.$$

Berücksichtigt man nun, dass:

$$V_1 V_2 = (t_1 - t_2)\sqrt{H\Psi - \Phi^2}\,\frac{\Delta'\sqrt{S}}{4\sqrt{\Delta}\,(\mathfrak{F}g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{G}g_0(\mathfrak{F}))},$$

so erhält man das gesuchte Resultat in der Form:

$$\vartheta_0 = \frac{A\cdot\sqrt{\Delta}}{S}.$$

Wenn $\mathfrak{F}g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{G}g_0(\mathfrak{F}) = 0$, entsteht $\vartheta_0 = 0$.

Es ist also, wie oben behauptet, das Verschwinden von A die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die betrachtete Flächenschaar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört.

Untersuchen wir nun, welche Bedeutung der Determinante A in der allgemeinen Theorie der Curvenschaaren, wo also ε_0 als von Null verschieden betrachtet wird, zukommt.

Ersetzt man in den oben aufgestellten Ausdrücken für ξ_p und ξ_q die Grösse u_p durch $x_1\sigma_1 + x_2\sigma_3$, u_q durch $x_1\sigma_2 + x_2\sigma_4$ (I, S. 550) und benutzt die II, S. 431 für $\frac{\partial x_1}{\partial r}$ und $\frac{\partial x_2}{\partial r}$ angegebenen Ausdrücke, so folgt:

$$\xi_p = x_1\big(-\sigma_3\vartheta_0 + g_0(\sigma_1)\big) + x_2\big(\sigma_1\vartheta_0 + g_0(\sigma_3)\big),$$
$$\xi_q = x_1\big(-\sigma_4\vartheta_0 + g_0(\sigma_2)\big) + x_2\big(\sigma_2\vartheta_0 + g_0(\sigma_4)\big),$$

sowie:

$$\frac{\sigma_1}{P_1} + \frac{\sigma_3}{P_2} = \frac{\partial\frac{a_{12}}{a_{22}}}{\partial r} - \frac{(a_{22})_p}{2a_{22}},$$

$$\frac{\sigma_2}{P_1} + \frac{\sigma_4}{P_2} = \frac{\partial\frac{a_{22}}{a_{22}}}{\partial r} - \frac{(a_{22})_q}{2a_{22}}.$$

Andererseits erhält man aber nach I, S. 550, wenn man die sich aus I, S. 555 und 556 ergebenden Relationen:

$$\sqrt{H}\sin\tau = -\sigma_3\varepsilon_0 - \frac{\sigma_1}{h_2},\qquad \sqrt{H}\cos\tau = \sigma_1\varepsilon_0 - \frac{\sigma_3}{h_1},$$

$$\sqrt{\Psi}\sin(\tau-\psi) = -\sigma_4\varepsilon_0 - \frac{\sigma_2}{h_2},\qquad \sqrt{\Psi}\cos(\tau-\psi) = \sigma_2\varepsilon_0 - \frac{\sigma_4}{h_1}$$

berücksichtigt:

$$\xi_p = x_1\Big(-\sigma_3\varepsilon_0 - \frac{\sigma_1}{h_2}\Big) + x_2\Big(\sigma_1\varepsilon_0 - \frac{\sigma_3}{h_1}\Big),$$
$$\xi_q = x_1\Big(-\sigma_4\varepsilon_0 - \frac{\sigma_2}{\sigma_4}\Big) + x_2\Big(\sigma_2\varepsilon_0 - \frac{\sigma_4}{h_1}\Big),$$

sodass die für das vorliegende Problem fundamentalen Gleichungen entstehen:

$$-\sigma_3(\varepsilon_0-\vartheta_0)=\frac{\sigma_1}{h_2}+g_0(\sigma_1),$$

$$\sigma_1(\varepsilon_0-\vartheta_0)=\frac{\sigma_3}{h_1}+g_0(\sigma_3),$$

$$-\sigma_4(\varepsilon_0-\vartheta_0)=\frac{\sigma_2}{h_2}+g_0(\sigma_2),$$

$$\sigma_2(\varepsilon_0-\vartheta_0)=\frac{\sigma_4}{h_1}+g_0(\sigma_4).$$

Mit Hülfe derselben findet man:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \\ g_0(\mathfrak{E}) & g_0(\mathfrak{F}) & g_0(\mathfrak{G}) \\ g_{00}(\mathfrak{E}) & g_{00}(\mathfrak{F}) & g_{00}(\mathfrak{G}) \end{vmatrix} = -4(\sigma_1\sigma_4-\sigma_2\sigma_3)^3\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)^2(\varepsilon_0-\vartheta_0).$$

Diese Formel liefert für $\varepsilon_0=0$ den vorhin gefundenen Werth von A; denn man hat:

$$\Delta=(\sigma_1\sigma_4-\sigma_2\sigma_3)^2,\quad g_0(\Delta)=-2(\sigma_1\sigma_4-\sigma_2\sigma_3)^2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right),$$

$$\Delta'=4(\sigma_1\sigma_4-\sigma_2\sigma_3)^2\frac{1}{h_1h_2}.$$

Herr Weingarten geht in der citirten Arbeit von der Bemerkung aus, dass sich die in Rede stehende Bedingung in der Form einer Integrabilitätsbedingung darstellen lässt. Von dem hier eingenommenen Standpunkt aus kann man diese Bemerkung auf folgende Weise bestätigen. Wenn $\varepsilon_0=0$, so liefert die Integration des simultanen Systems (I, S. 548):

$$\frac{\partial r}{\partial p}=-\frac{a_{12}}{a_{22}},\qquad \frac{\partial r}{\partial q}=-\frac{a_{23}}{a_{33}}$$

für r eine Function $f(p,q,t)$, in welcher t einen Parameter bedeutet, der für jede Einzelfläche der betrachteten Flächenschaar sich nicht ändert. Ist φ eine Function von p, q, r und denkt man sich r durch $f(p,q,t)$ ersetzt, so gehen die partiellen Ableitungen von φ nach p und q in φ_p, φ_q über und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ wird zu $\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}$. Bezeichnet man den Ausdruck $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2$ mit a'_{33}, so ergiebt sich:

$$\frac{(\sqrt{a'_{33}})_p}{\sqrt{a'_{33}}}=\frac{(a_{33})_p}{2a_{33}}-\frac{\partial\frac{a_{12}}{a_{33}}}{\partial r},\qquad \frac{(\sqrt{a'_{33}})_q}{\sqrt{a'_{33}}}=\frac{(a_{33})_q}{2a_{33}}-\frac{\partial\frac{a_{23}}{a_{33}}}{\partial r}.$$

Sind nun ξ, η, ζ die Richtungscosinus der Normalen der betrachteten Flächen, so kann man nach der Bedingung fragen, unter der der Ausdruck

$$\mathsf{E}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}d\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial v}d\eta+\frac{\partial\varphi}{\partial w}d\zeta$$

längs jeder Fläche $t =$ const. ein vollständiges Differential ist. Längs jeder dieser Flächen wird:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi_p \frac{\partial p}{\partial u} + \varphi_q \frac{\partial q}{\partial u}$$

und da hier:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{u_p \mathfrak{G} - u_q \mathfrak{F}}{\Delta}, \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\mathfrak{E} u_q - \mathfrak{F} u_p}{\Delta},$$

so geht E in:

$$\left\{\varphi_p \frac{\mathfrak{G} g_0(\mathfrak{E}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{F})}{2\Delta} + \varphi_q \frac{\mathfrak{E} g_0(\mathfrak{F}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{E})}{2\Delta}\right\} dp$$

$$+ \left\{\varphi_p \frac{\mathfrak{G} g_0(\mathfrak{F}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{G})}{2\Delta} + \varphi_q \frac{\mathfrak{E} g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{F})}{2\Delta}\right\} dq$$

über. Die fragliche Bedingung wird daher durch das Verschwinden des Ausdrucks

$$\left\{\varphi_p \frac{\mathfrak{G} g_0(\mathfrak{E}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{F})}{\Delta} + \varphi_q \frac{\mathfrak{E} g_0(\mathfrak{F}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{E})}{\Delta}\right\}_q$$

$$- \left\{\varphi_p \frac{\mathfrak{G} g_0(\mathfrak{F}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{G})}{\Delta} + \varphi_q \frac{\mathfrak{E} g_0(\mathfrak{G}) - \mathfrak{F} g_0(\mathfrak{F})}{\Delta}\right\}_p$$

geliefert, welcher bis auf einen von Null verschiedenen Factor von Herrn Frobenius in der citirten Arbeit mit $\Lambda(\varphi)$ bezeichnet wird. Bei Benutzung der II, S. 433 und S. 436 angegebenen Formeln entsteht, wenn $t =$ const. oder $\mathfrak{S}_0 = 0$:

$$\mathsf{E} = -\frac{g_1(\varphi)}{h_2} \mathfrak{S}_1 - \frac{g_2(\varphi)}{h_1} \mathfrak{S}_2.$$

Wendet man auf diesen Ausdruck die erste Integrabilitätsbedingung II, S. 438 an und berücksichtigt die beiden ersten Gleichungen II, S. 439, so folgt:

$$\frac{g_1 g_2(\varphi)}{h_1} - \frac{g_2 g_1(\varphi)}{h_2} + \frac{g_1(\varphi)}{R_1 h_1} - \frac{g_2(\varphi)}{R_2 h_2} = 0,$$

welche Beziehung in Folge von:

$$g_2 g_1(\varphi) - g_1 g_2(\varphi) = \frac{g_1(\varphi)}{R_1} - \frac{g_2(\varphi)}{R_2}$$

durch:

$$g_1 g_2(\varphi) + \frac{g_1(\varphi)}{R_1} = 0$$

oder durch:

$$g_2 g_1(\varphi) + \frac{g_2(\varphi)}{R_2} = 0$$

ersetzt werden kann. In Folge zweier S. 454 gefundener Gleichungen hat man aber:

$$\frac{(\sqrt{a'_{33}})_p}{\sqrt{a'_{33}}} = -\frac{\sigma_1}{\mathsf{P}_1} - \frac{\sigma_3}{\mathsf{P}_2}, \qquad \frac{(\sqrt{a'_{33}})_q}{\sqrt{a'_{33}}} = -\frac{\sigma_2}{\mathsf{P}_1} - \frac{\sigma_4}{\mathsf{P}_2},$$

so dass:

$$\frac{g_1(\sqrt{a'_{33}})}{\sqrt{a'_{33}}} = -\frac{1}{\mathsf{P}_1}, \qquad \frac{g_2(\sqrt{a'_{33}})}{\sqrt{a'_{33}}} = -\frac{1}{\mathsf{P}_2}.$$

Berücksichtigt man nun die Gleichung (II, S. 439):

$$g_2\left(\frac{1}{P_1}\right) = \vartheta_0\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) - \frac{1}{P_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{P_1}\right),$$

so wird:

$$g_2 g_1\left(\sqrt{a'_{33}}\right) + \frac{g_2\left(\sqrt{a'_{33}}\right)}{R_2} = -\vartheta_0\sqrt{a'_{33}}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right).$$

Es besagt daher das Verschwinden von ϑ_0 analytisch, dass der Ausdruck

$$\frac{\partial\sqrt{a'_{33}}}{\partial u}\,d\xi + \frac{\partial\sqrt{a'_{33}}}{\partial v}\,d\eta + \frac{\partial\sqrt{a'_{33}}}{\partial w}\,d\zeta$$

längs jeder Einzelfläche der betrachteten Schaar ein vollständiges Differential ist, aber geometrisch, dass die Tangente in einem Punkte P einer Krümmungslinie der Flächenschaar in ihre längs der Flächennormalen benachbarte Lage durch parallele Verschiebung und Drehung um die Tangente der anderen durch P gehenden Krümmungslinie übergeführt wird.

Um eine Anwendung der gefundenen Bedingungsgleichung $A = 0$ zu machen, will ich mit Hülfe derselben den Ribaucour'schen Satz beweisen, nach welchem eine Flächenschaar, deren orthogonale Trajectorien Kreise sind, stets einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört. (Vergl. Darboux, Leçons Bd. II, S. 330, Bianchi, Giornale di Matem. Vol. 22, S. 333.)

Eine doppelt unendliche Kreisschaar wird durch die Gleichungen:

$$u = x + R(\alpha_1 \cos r + \beta_1 \sin r), \qquad v = y + R(\alpha_2 \cos r + \beta_2 \sin r),$$
$$w = z + R(\alpha_3 \cos r + \beta_3 \sin r)$$

dargestellt, in denen x, y, z — die Coordinaten der von den Mittelpunkten der Kreise beschriebenen Fläche —, sowie R; α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3 Functionen von p und q allein sind. Dabei erfüllen die Richtungscosinus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die Relation $\sum \alpha_1\beta_1 = 0$. Die Richtungscosinus der Normalen der Ebenen der Kreise sollen mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bezeichnet werden. Setzt man nun:

$$c_{11} = \frac{\partial R}{\partial p} + \sin r \sum \beta_1 \frac{\partial x}{\partial p} + \cos r \sum \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial p},$$

$$c_{21} = \frac{\partial R}{\partial q} + \sin r \sum \beta_1 \frac{\partial x}{\partial q} + \cos r \sum \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial q},$$

$$c_{12} = \sum \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial p} + R\cos r \sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p} + R \sin r \sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial p},$$

$$c_{22} = \sum \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial q} + R\cos r \sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q} + R \sin r \sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q},$$

so findet sich:

$$u_p = (\alpha_1 \cos r + \beta_1 \sin r) c_{11} + \gamma_1 c_{12}, \quad u_q = (\alpha_1 \cos r + \beta_1 \sin r) c_{21} + \gamma_1 c_{22},$$

$$\xi_p = \frac{\alpha_1 \cos r + \beta_1 \sin r}{R} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} + \frac{\gamma_1}{R} \frac{\partial c_{12}}{\partial r}, \quad \xi_q = \frac{\alpha_1 \cos r + \beta_1 \sin r}{R} \frac{\partial c_{21}}{\partial r} + \frac{\gamma_1}{R} \frac{\partial c_{22}}{\partial r}.$$

Damit die betrachteten Kreise die orthogonalen Trajectorien einer Flächenschaar sind, muss die Bedingung:

$$\text{a)} \quad c_{11} \frac{\partial c_{21}}{\partial r} + c_{12} \frac{\partial c_{22}}{\partial r} = c_{21} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} + c_{22} \frac{\partial c_{12}}{\partial r}$$

erfüllt sein, welche in folgende drei Gleichungen zerfällt:

$$\text{b)} \quad \begin{cases} R^2 \left(\sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p} \sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q} - \sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q} \sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial p} \right) \\ \qquad + \sum \beta_1 \frac{\partial x}{\partial q} \sum \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial p} - \sum \beta_1 \frac{\partial x}{\partial p} \sum \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial q} = 0, \\ R \left(\sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p} \sum \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial q} - \sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q} \sum \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial p} \right) \\ \qquad - \frac{\partial R}{\partial p} \sum \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial q} \sum \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial p} = 0, \\ R \left(\sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial p} \sum \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial q} - \sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q} \sum \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial p} \right) \\ \qquad - \frac{\partial R}{\partial p} \sum \beta_1 \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial q} \sum \beta_1 \frac{\partial x}{\partial p} = 0. \end{cases}$$

Die Bedingung a) bewirkt nun, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \\ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} & \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r} & \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial r^2} \end{vmatrix}$$

proportional wird dem Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 c_{11}}{\partial r^2} \frac{\partial c_{21}}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_{12}}{\partial r^2} \frac{\partial c_{22}}{\partial r} - \frac{\partial^2 c_{21}}{\partial r^2} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} - \frac{\partial^2 c_{22}}{\partial r^2} \frac{\partial c_{12}}{\partial r},$$

welcher in Folge der ersten Gleichung b) verschwindet.

Münster i./W., den 31. October 1893.

Theorie der Flächenelemente höherer Ordnung des Raums von 3 Dimensionen.

Von

Eduard v. Weber in München.

Der von Hrn. Lie in die Geometrie eingeführte Begriff des Flächenelements, der für die moderne Theorie der partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung fundamental ist, hat in seiner Anwendung auf Gleichungen höherer Ordnungen wohl aus dem Grunde noch keine ähnliche Bedeutung erlangt, weil er in der sich zunächst darbietenden Form keine vom Coordinatensystem unabhängige Bedeutung besitzt, dann aber auch wohl desshalb, weil gerade die elementarsten Fragen über die gegenseitige Lagenbeziehung von Flächenelementen höherer Ordnung und den Aufbau von Flächen aus solchen noch erst wenig untersucht sind. Der Ausfüllung der genannten Lücken ist die vorliegende Arbeit gewidmet. In § 1 und 2 verallgemeinern wir zunächst die üblichen Definitionen eines Flächenelements n. Ordnung und der vereinigten Lage zweier Elemente. In § 3 zeigen wir, dass die Theorie der partiellen Differentialgleichungen unter Zugrundelegung unserer Definition eine Gestalt annimmt, die als Verallgemeinerung sowohl der Lie'schen Theorie der Gleichungen I. Ordnung als auch der Clebsch'schen Connextheorie anzusehen ist. Der letzte § endlich enthält eine neue Interpretation der Gleichungen der Charakteristiken, sowie die Verallgemeinerung des Satzes von den conjugirten Tangenten einer Fläche.

Man wird leicht erkennen, dass sich die im folgenden entwickelten Begriffsbestimmungen und Sätze, ausgenommen die des letzten §, ohne weiteres auch für Räume von mehr als 3 Dimensionen bez. Differentialgleichungen mit mehr als 2 unabhängigen Veränderlichen aussprechen lassen.

§ 1.

Begriff des Flächenelements höherer Ordnung.

1. Ist

$$z = \varphi(x, y) \tag{1}$$

die Gleichung einer beliebigen Fläche, so setzen wir

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-i}\, \partial y^i};$$

doch schreiben wir für $\alpha_0^{(0)}$, $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_0^{(2)}$ ... in der Regel bez. z, p, q, r.... Wir bezeichnen dann als „Flächenelement n. Ordnung" oder $E^{(n)}\left(xyzp \ldots \alpha_n^{(n)}\right)$, den Inbegriff der Grössen $x \ldots \alpha_n^{(n)}$. Durch die Angabe derselben ist eine Fläche n. O:

$$W = 0 = -\zeta + z \cdot \tag{2}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{r}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha_i^{(k)} (\xi - x)^{k-i} (\eta - y)^i *)$$

bestimmt, welche die vorgelegte Fläche (1) im Punkte xyz n-fach berührt, deren Schnittcurve mit (1) demnach dortselbst einen $n+1$-fachen Punkt aufweist. Die $n+1$ Tangentenrichtungen der Schnittcurve in diesem Punkte sind gegeben durch

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \alpha_i^{(n+1)}\, dx^{n+1-i} dy^i = 0. \tag{3}$$

2. Setzen wir der Kürze wegen

$$\mu_n = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2},$$

so definirt uns Gleichung (2) eine μ_n-gliedrige Schaar von Flächen, die gegen das Coordinatensystem eine sehr specielle Lage einnehmen. Wir betrachten nun statt (2) eine beliebige μ_n-gliedrige Schaar von Flächen

$$U(x, y, z, a_1, a_2, \ldots a_{\mu_n}) = 0, \tag{4}$$

die nicht alle derselben partiellen Differentialgleichung n. O. genügen mögen, und bezeichnen als Flächenelement $E^{(n)}(xyza_1 \ldots a_{\mu_n})$ jedes System von Werthen der Coordinaten xyz und der Parameter $a_1 \ldots a_{\mu_n}$, das die Gleichung (4) befriedigt. Wir können diese Definition leicht mit der vorigen in Verbindung setzen, indem wir eine Fläche der

*) $\binom{k}{0} = 1$.

Schaar (4) bestimmen, welche die Fläche (1) im Punkte xyz n-fach berührt. Nennen wir $\beta_i^{(k)}$ die Ableitungen der durch (4) definirten Function z, so hat man also

$$\beta_i^{(k)} = \alpha_i^{(k)} \quad (i = 0, 1, \ldots k;\ k = 0, \ldots n) \tag{5}$$

oder:

$$U = 0,\ \frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + p^2\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + r\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \text{ etc.}$$

wofür wir zur Abkürzung schreiben:

$$U = 0,\ D_i^{(k)} + \frac{\partial U}{\partial z}\alpha_i^{(k)} = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots k, k = 1, 2 \ldots n). \tag{6}$$

Lösen wir diese μ_n Gleichungen nach den a_i auf, was mit Rücksicht auf unsere Annahmen über die Schaar (4) stets möglich ist, so erhalten wir eine discrete Zahl, sagen wir eine endliche Anzahl μ von Flächen der Schaar (4), die alle die Fläche (1) im Punkte xyz n-fach berühren. Die $n+1$ Tangenten der Schnittcurve einer solchen Fläche mit (1) sind durch die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(\alpha_i^{(n+1)} - \beta_i^{(n+1)})\,dx^{n+1-i}dy^i = 0 \tag{7}$$

gegeben, wo $\beta_i^{(n+1)}$ aus

$$D_i^{(n+1)} + \frac{\partial U}{\partial z}\beta_i^{(n+1)} = 0$$

zu entnehmen ist. Jedem Element $E^{(n)}\left(x \ldots \alpha_n^{(n)}\right)$ sind also μ Elemente $x \ldots a_{\mu_n}$ zugeordnet, jedem der letzteren ein bestimmtes der ursprünglichen Definition.

§ 2.

Vereinigte Lage zweier Flächenelemente.

3. Durch totale Differentiation der Gl. (2) nach $xyz\alpha_0^{(1)} \ldots \alpha_n^{(n)}$ ergiebt sich für die Schnittcurve der beiden zu den Werthen $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ und $x + dx \ldots \alpha_n^{(n)} + d\alpha_n^{(n)}$ gehörigen Flächen $W = 0$ und $W + dW = 0$ die Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}(d\alpha_\nu^{(k)} - \alpha_\nu^{(k+1)}dx - \alpha_{\nu+1}^{(k+1)}dy)(\xi - x)^{k-\nu}(\eta - y)^\nu$$
$$+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}d\alpha_i^{(n)}(\xi - x)^{n-i}(\eta - y)^i = 0.$$

Bestehen also die Relationen

$$d\alpha_\nu^{(k)} = \alpha_\nu^{(k+1)}\,dx + \alpha_{\nu+1}^{(k+1)}\,dy \tag{8}$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots k,\ k = 0, 1, \ldots n-1)$$

so berühren sich die beiden benachbarten Flächen n — 1-fach, wobei das n-Tupel der Tangenten ihrer Schnittcurve im Punkte xyz durch

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d\alpha_i^{(n)}\,dx^{n-i}\,dy^i = 0 \tag{9}$$

dargestellt wird.

Zwei Flächenelemente, welche die Relationen (8) befriedigen, nennen wir wie üblich *vereinigt liegend*; die n Richtungen (9) bezeichnen wir kurz als ihr *Schnitt-n-tupel.*

4. Erleiden beim Uebergang vom Punkte xyz zu $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ die durch (6) definirten Grössen a_i die Incremente da_i, und setzen wir

$$d' = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz,$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{\mu_\nu} \frac{\partial}{\partial a_i}da_i,$$

$$d = d' + \delta, \tag{10}$$

so hat man für $d\alpha_i^{(k)}$ einerseits den Werth $\alpha_i^{(k+1)}dx + \alpha_{i+1}^{(k+1)}dy$ und andererseits aus (6):

$$dD_i^{(k)} + \alpha_i^{(k)}\,d\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}\,d\alpha_i^{(k)} = 0 \tag{11}$$
$$(i = 0 \ldots k;\ k = 1, \ldots n).$$

Die Fläche U mit den Parameterwerthen $a_i + da_i$ besitze im ursprünglichen Punkt xyz die Ableitungen $\alpha_i^{(k)} + \delta\alpha_i^{(k)}$; dann hat man

$$\delta D_i^{(k)} + \alpha_i^{(k)}\,\delta\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\delta\alpha_i^{(k)} = 0. \tag{12}$$

Die Grösse $\delta\beta_i^{(k)}$ (vgl. Nr. 2) hat nun einerseits den Werth

$$\beta_i^{(k+1)}dx + \beta_{i+1}^{(k+1)}dy$$

und andererseits folgt aus (6):

$$d'D_i^{(k)} + \alpha_i^{(k)}\,d'\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}\,d\beta_i^{(k)} = 0$$
$$(i = 0, \ldots k,\ k = 1, \ldots n).$$

Aus (10), (11), (12), (13) folgt sofort

$$\delta\alpha_i^{(k)} = (\alpha_i^{(k+1)} - \beta_i^{(k+1)})\,dx + (\alpha_{i+1}^{(k+1)} - \beta_{i+1}^{(k+1)})\,dy$$
$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

oder wegen (5):

$$\delta a_i^{(k)} = 0, \quad (i = 0, \ldots k, k = 1, 2 \ldots n-1) \tag{14}$$

$$\delta a_i^{(n)} = (a_i^{(n+1)} - \beta_i^{(n+1)})\, dx + (a_{i+1}^{(n+1)} - \beta_{i+1}^{(n+1)})\, dy, \tag{15}$$

(14) zeigt, dass die beiden benachbarten Flächen sich $n-1$-fach berühren, wie vorauszusehen war; ihr Schnitt-n-tupel ist durch die Gleichung

$$\sum \binom{n}{i} \delta a_i^{(n)} dx^{n-i} dy^i = 0 \tag{16}$$

gegeben, wo die $\delta a_i^{(n)}$ aus (15) zu entnehmen sind.

5. Zwei Elemente $E^{(n)}(x, \ldots a_{\mu_n})$ und $E^{(n)}(x+dx, \ldots a_{\mu_n} + da_{\mu_n})$ nennen wir *vereinigt liegend*, wenn ihre zugehörigen Flächen (4) sich im Punkte xyz $n-1$-fach berühren. Setzt man

$$U = U_1(\xi - x) + U_2(\eta - y) + U_3(\zeta - z) + \tfrac{1}{2}\left(U_{11}(\xi - x)^2 + \cdots\right) \cdots$$
$$= U^{(1)} + U^{(2)} + \cdots$$

indem man die Glieder k^{ten} Grades in $(\xi - x) \ldots$ mit $U^{(k)}$ bezeichnet, so erhält man als Bedingungen vereinigter Lage zunächst

$$\delta U = 0, \quad d' U = 0,$$
$$U_1 : U_2 : U_3 = \delta U_1 : \delta U_2 : \delta U_3,$$

ferner hat man für $n > 2$ auszudrücken dass $U^{(1)}$ in

$$U^{(k)} \delta U_1 - U_1 \delta U^{(k)} \quad \text{für} \quad k = 2, 3, \ldots n-1$$

als Factor enthalten ist. Solcherweise findet man im ganzen $\mu_{n-1} + 1$ Bedingungen:

$$\begin{cases} U = 0, \quad \delta U = 0, \\ \quad (\text{oder } d' U = 0, \quad \delta U = 0), \\ \sum_{i=1}^{\mu_n} \left(\dfrac{\partial U}{\partial x} \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial a_i \partial z} - \dfrac{\partial U}{\partial z} \dfrac{\partial^2 U}{\partial a_i \partial x} \right) da_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{\mu_n} \left(\dfrac{\partial U}{\partial y} \dfrac{\partial^2 U}{\partial a_i \partial z} - \dfrac{\partial U}{\partial z} \dfrac{\partial^2 U}{\partial a_i \partial y} \right) da_i = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{etc.} \end{cases} \tag{17}$$

6. Eine continuirliche Schaar von ∞^1 Flächenelementen, deren jedes mit dem folgenden vereinigt liegt, nennen wir mit Lie einen Streifen (eine Element $= M_1^{(n)}$); die zugehörige Punktmannigfaltigkeit ist entweder eine Curve oder ein Punkt. Eine continuirliche Schaar von ∞^2 Elementen, deren jedes mit allen benachbarten vereinigt liegt, bezeichnen wir als eine Elementen-$M_2^{(n)}$; das entsprechende Punktgebilde

ist ein Fläche, eine Curve oder ein Punkt. Eine Elementen-$M_2^{(n)}$ wird dargestellt durch $\mu_n + 1$ Gleichungen:

$$(18) \qquad U(x \ldots a_{\mu_n}) = 0, \quad V_1(x \ldots a_{\mu_n}) = 0, \ldots V_{\mu_n} = 0,$$

vermöge deren die totalen Differentialgleichungen (17) identisch bestehen. Durch Elimination der a_i aus (18) erhält man die Gleichungen des Punktgebildes, durch Elimination von xyz aber ein System von $\mu_n - 2$ Gleichungen, das unsere Elementen-$M_2^{(n)}$ als Enveloppe von ∞^2 Flächen (4) definirt, und zwar als *Enveloppe n. Ordnung*; diese Bezeichnung soll andeuten, dass jede der ∞^2 Flächen U mit dem Umhüllungsgebilde ein Element n. O. gemein hat. Damit haben wir eine Verallgemeinerung des Begriffs „Tangentialgleichung".

7. Wir betrachten nun eines der μ verschiedenen Systeme von Flächen (4), deren jede eine beliebige Fläche (1) in einem ihrer Punkte xyz n-fach berührt. Die zu den Punkten xyz und $x + d'x$, $y + d'y$, $z + d'z$ gehörigen Flächen (2) des Systems bestimmen eine Schnittcurve mit n-fachem Punkt in xyz; die n Tangentenrichtungen derselben sind nach (15) und (16) gegeben durch:

$$(19) \qquad \sum \binom{n}{1} [(\alpha_i^{(n+1)} - \beta_i^{(n+1)}) d'x + (\alpha_{i+1}^{(n+1)} - \beta_{i+1}^{(n+1)}) d'y] dx^{n-i} dy^i = 0.$$

Man erkennt in der linken Seite dieser Gleichung die erste Polarform des Strahls $d'x : d'y$ in Bezug auf die binäre Form (7). Soll die Richtung $d'x : d'y$ mit einem der durch (19) dargestellten Strahlen zusammenfallen, so erhält man Gleichung (7). Bezeichnen wir nach bekannter Analogie als *„Schmiegungsstreifen"* einen Streifen von der Beschaffenheit, dass das Schnitt-n-tupel zweier benachbarter Elemente $x \ldots a_{\mu_n}$ und $x + dx, \ldots a_{\mu_n} + da_{\mu_n}$ die Fortschreitungsrichtung $dx : dy : dz$ enthält, so haben wir das

Theorem. *Bestimmt man zu einer beliebigen Fläche F eine Schaar von ∞^2 Flächen U von der Eigenschaft, dass F in jedem seiner Punkte von einer Fläche der Schaar n-fach berührt wird, so ist hierdurch auf F eine Curvenschaar definirt, die jedem Punkte xyz von F $n + 1$ Richtungen, „die Schmiegungsrichtungen", zuordnet, bestimmt als die Tangentenrichtungen an die Schnittcurve von F mit der zugehörigen Fläche U. Die den Punkten einer solchen Curve zugeordneten ∞^1 Flächen U bilden einen Schmiegungsstreifen. Schreitet man von xyz aus in der Richtung $dx : dy : dz$ fort, so ist das Schnitt-n-tupel der zu den Punkten $x \ldots$ und $x + dx \ldots$ gehörenden Flächen U mit dem ersten Polarsystem der Richtung $dx : dy : dz$ in Bezug auf die $n + 1$ Schmiegungsrichtungen von xyz identisch.*

Für $n = 1$ wurde der Satz zuerst von Herrn Darboux*) gegeben.

*) Solutions singulières etc. Savants étrangers 27, 1883. p. 60.

Stellt in diesem Falle die Gleichung (4) insbesondere die Gesammtheit der Ebenen dar, so erhält man das Theorem der conjugirten Tangenten.

Gebraucht man statt (4) die Schaar (2), so folgt für die Curven, die auf einer Fläche durch Nullsetzen der Glieder n. O. ihrer Taylor'schen Entwickelung, d. h. durch:

$$\sum \binom{n}{i} \alpha_i^{(n)} dx^{n-i} dy^i = 0$$

bestimmt werden, eine geometrische Eigenschaft, welche die nächstliegende Verallgemeinerung des Theorems der Asymptotencurven darstellt; doch besitzen diese Curven keine vom Coordinatensystem unabhängige Bedeutung.

§ 3.

Partielle Differentialgleichungen; Connexe.

8. Aus der Gesammtheit der ∞^{μ_n+2} Flächenelemente (4) scheidet eine beliebige Gleichung

$$V(xyza_1a_2 \ldots a_{\mu_n}) = 0 \tag{20}$$

eine Schaar von ∞^{μ_n+1} Elementen aus, und es entsteht die Aufgabe, innerhalb dieser Schaar alle $M_2^{(n)}$ zu finden, d. h. zwischen den Grössen $x \ldots a_{\mu_n}$ $\mu_n - 1$ Gleichungen $V_i = 0$ in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass das System (17) totaler Differentialgleichungen vermöge

$$U = 0,\ V = 0,\ V_1 = 0 \ldots V_{\mu_n - 1} = 0 \tag{21}$$

erfüllt ist. Man kann dieses Problem sofort auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zurückführen, indem man die Grössen $a_1 \ldots a_{\mu_n}$ aus (6) und (20) eliminirt, was nach unseren Voraussetzungen über die Flächenschaar (4) stets möglich ist. Umgekehrt wird jede Gleichung:

$$F^{(n)}(xyzp \ldots \alpha_n^{(n)}) = 0 \tag{22}$$

auf die vorliegende Fragestellung zurückgebracht, indem man $p \ldots \alpha_n^{(n)}$ aus (6) berechnet und in (20) substituirt; dabei kann die Schaar $U = 0$ ganz willkürlich gewählt werden.

9. Es liegt nahe, auf das solchergestalt formulirte Problem die Terminologie der Connextheorie anzuwenden. Verstehen wir dementsprechend unter „Raumelement" die Combination eines Punktes und einer Fläche der Schaar (4), so scheidet eine Relation (20) aus der Gesammtheit der ∞^{μ_n+3} Raumelemente einen aus ∞^{μ_n+2} Raumelementen bestehenden „*Connex*" aus. In demselben entsprechen jedem Punkte ∞^{μ_n-1} Flächen U, jeder Fläche U ∞^2 Punkte. Die Gleichung

(4) selbst ordnet jedem Punkte die $\infty^{\mu_n - 1}$ durch ihn hindurchgehenden Flächen U, jeder Fläche U die auf ihr liegenden Punkte zu; die Gesammtheit der Raumelemente, welche die Gleichung $U = 0$ befriedigen, nennen wir den „*identischen Connex*". Die bisher gebrauchten Flächenelemente sind nichts anderes als die Raumelemente des identischen Connexes. Bezeichnen wir ferner als „*Coincidens*" die gemeinsamen Raumelemente zweier Connexe, insbesondere als „*Hauptcoincidens*" eines Connexes seine Coincidenz mit dem identischen Connexe, so können wir der vorher besprochenen Aufgabe folgende Fassung geben: „Innerhalb der Hauptcoincidenz eines beliebigen Connexes alle Enveloppen n. Ordnung zu bestimmen."

10. Denken wir uns ein Element $E^n(x \ldots \alpha_n^{(n)})$, welches der durch (22) definirten $\mu_n + 1$ gliedrigen Schaar von Elementen angehört, zur zugehörigen Fläche (2) erweitert, so ist auf dieser eine durch den Punkt xyz gehende Curve bestimmt, in deren Punkten ihre Ableitungen $p \ldots \alpha_n^{(n)}$ der Gleichung (22) genügen, längs welcher sie also mit Elementen der Schaar (22) belegt ist, wie wir sagen wollen. Substituirt man in (22) für $xyz \cdots \alpha_i^{(k)} \cdots$ bez. $\xi\eta\zeta \cdots \frac{\partial^k \zeta}{\partial \xi^{k-i} \partial \eta^i} \cdots$, wo ζ und seine Ableitungen aus (2) zu berechnen sind, so erhält man eine Gleichung $\Phi^{(n)}(\xi\eta\zeta) = 0$, die mit (2) zusammen die gesuchte Curve darstellt. Ihre Tangentenrichtung im Punkte xyz, welche wir die dem Elemente zugeordnete *ausgezeichnete Richtung* nennen und mit L bezeichnen wollen, erhält man durch totale Differentiation von $\Phi^{(n)}$ nach $\xi\eta\zeta$.

Setzen wir

$$A_i^{(k)} = \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \alpha_i^{(n)}}, \quad X = \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y}.$$

$$(23) \qquad \begin{cases} M = X + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} \alpha_i^{(k+1)} \right), \\ N = Y + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} \alpha_{i+1}^{(k+1)} \right) \end{cases}$$

und schreiben wir $dx\,dy\,dz$ statt $d\xi\,d\eta\,d\zeta$, so folgt wegen

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

für L nach leichter Rechnung die Gleichung

$$(24) \qquad M dx + N dy = 0.$$

11. Analog ist die zu einem Element $xyz a_1 \ldots a_{\mu_n}$ gehörige Fläche U längs der Curve

$$(25) \qquad U(\xi\eta\zeta a_1 \ldots a_{\mu_n}) = 0, \quad V(\xi \ldots a_{\mu_n}) = 0$$

von Elementen der $\mu_n + 1$-gliedrigen Elementenschaar $U = 0$, $V = 0$ belegt. Die „ausgezeichnete Richtung L'“, d. h. die Tangentenrichtung der Curve (25) im Punkte xyz, ist dann durch

$$M'dx + N'dy = 0 \tag{26}$$

gegeben, wo

$$\begin{cases} M' = \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z}, \\ N' = \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \tag{27}$$

und die Werthe p, q aus (6) pag. 460 zu entnehmen sind. Ist nun (22) die partielle Differentialgleichung, die im Sinne der Nr. 9 dem Problem (20) äquivalent ist, so haben wir zur Berechnung von $M'N'$ in (27) $F^{(n)}$ statt V einzusetzen, und erhalten nach leichter Rechnung die für das Folgende wichtigen Formeln:

$$\begin{cases} M' = M + \sum A_i^{(n)} \beta_i^{(n+1)}, \\ N' = N + \sum A_i^{(n)} \beta_{i+1}^{(n+1)}. \end{cases} \tag{28}$$

Hierin sind rechts für $p \ldots \alpha_n^{(n)}$ ihre Werthe aus (6) pag. 460 zu substituiren; die Grössen $\beta_i^{(n+1)}$ haben die in Nr. 2 angegebene Bedeutung.

§ 4.

Die Charakteristiken; Verallgemeinerung des Theorems der conjugirten Tangenten.

12. Durch Differentiation von (22) nach x bez. y erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} M + \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} \alpha_i^{(n+1)} = 0, \\ N + \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} \alpha_{i+1}^{(n+1)} = 0, \end{cases} \tag{29}$$

die jedem Element $E^{(n)}(x \ldots \alpha_n^{(n)})$, das (22) befriedigt, $\infty^{(n)}$ Elemente $E^{(n+1)}$ zuordnen die jenes enthalten. Wir sagen, dass ein $E^{(n+1)}$ der Gleichung (22) genügt, wenn es die Relationen (29) befriedigt.

Die Gleichungen

$$d\alpha_k^{(n)} = \alpha_k^{(n+1)} dx + \alpha_{k+1}^{(n+1)} dy \tag{30}$$
$$k = 0, 1 \ldots n$$

bestimmen ∞^1 Elemente $E^{(n+1)}$, die ausser $E^{(n)}$ auch noch ein benachbartes mit ihm vereinigt liegendes Element

$$x + dx \cdots \alpha_n^{(n)} + d\alpha_n^{(n)}$$

enthalten.

Aus (30) folgt

$$(31)\quad \alpha_i^{(n+1)} = \sum_{\nu=0}^{n-i}(-1)^\nu \frac{d\alpha_{i+\nu}^{(n)}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^\nu + (-1)^{n+1-i}\,\alpha_{n+1}^{(n+1)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+1-i}$$
$$(i = 0, 1 \ldots n).$$

Durch Substitution dieser Werthe in (29) erhält man:

$$(32)\quad \begin{cases} M + \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)}\left[\sum_{\nu=0}^{n-i}(-1)^\nu \frac{d\alpha_{i+\nu}^{(n)}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^\nu\right] \\ \qquad - \alpha_{n+1}^{(n+1)}\frac{dy}{dx}\left[\sum_{i=0}(-1)^{n-i}A_i^{(n)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-i}\right] = 0, \\ N + \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}^{(n)}\left[\sum_{\nu=0}^{n-i}(-1)^\nu \frac{d\alpha_{i+\nu}^{(n)}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^\nu\right] \\ \qquad + \alpha_{n+1}^{(n+1)}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}A_i^{(n)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-i} = 0. \end{cases}$$

Eliminiren wir hieraus $\alpha_{n+1}^{(n+1)}$, indem wir die zweite Gleichung mit $\frac{dy}{dx}$ multipliciren und zu der ersten addiren, so folgt

$$(33)\quad M\,dx + N\,dy + \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)}\,d\alpha_i^{(n)} = 0,$$

d. h. genügen 2 vereinigt liegende Elemente beide der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, so ordnen ihnen die Gleichungen (29) im allgemeinen ein und nur ein Element $E^{(n+1)}$ zu, das sie beide enthält.

13. Soll die Grösse $\alpha_{n+1}^{(n+1)}$ unbestimmt bleiben, d. h. sollen alle $E^{(n+1)}$, die sich an die beiden vereinigt liegenden Elemente *n. O.* anschliessen, der Gl. (22) genügen, so hat man zunächst:

$$(34)\quad \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}A_i^{(n)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-i} = 0.$$

Durch Nullsetzen des von $\alpha_{n+1}^{(n+1)}$ freien Gliedes in der ersten Gl. (32) kommt eine Gleichung, der man mit Hilfe von (34) leicht die Form giebt

$$(35)\quad M + \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}^{(n)}\left(\sum_{\nu=0}^{n-i}(-1)^\nu \frac{d\alpha_{\nu+i-1}^{(n)}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^\nu\right) = 0;$$

endlich folgt noch aus der 2. Gleichung (32):

$$(36) \qquad N + \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}^{(n)} \left(\sum_{\nu=0}^{n-i} (-1)^{\nu} \frac{d\alpha_{\nu+i}^{(n)}}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\nu} \right) = 0.$$

Die eine der beiden letzten Gleichungen kann durch (22) oder (33) ersetzt werden.

Ein Streifen n. O., dessen Elemente der Gleichung (22) genügen und der ausser den Relationen (8) pag. 461 auch noch die Gleichungen (34), (35), (36) befriedigt, hat also die Eigenschaft, dass *alle* Elemente $n+1^{ter}$ Ordnung, die sich an ihn, d. h. an je 2 benachbarte Elemente derselben anschliessen, die vorgelegte Differentialgleichung erfüllen, mit andern Worten, dass durch ihn ∞ viele Integralflächen von (22) hindurchgehen, während doch ein beliebiger, der partiellen Differentialgleichung genügender Streifen n. O. im allgemeinen eine und nur eine ihn enthaltende Integralfläche festlegt. Jede (nicht singuläre) Integralfläche ist bekanntlich aus n Schaaren von je ∞^1 dieser Streifen aufgebaut; man bezeichnet sie als *charakteristische Streifen* oder *Charakteristiken* der vorgelegten Gleichung.

Von den Grössen $\frac{d\alpha_i^{(n)}}{dx}$ können $n-1$ als willkürliche Functionen von $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ gewählt werden, oder, etwas anders ausgedrückt:

Zu jeder der n Richtungen, welche Gleichung (34) *einem beliebigen Element $E^{(n)}$ der vorgelegten Gleichung* (22) *zuordnet, gehört eine $n-1$-gliedrige Schaar benachbarter, mit $E^{(n)}$ vereinigt liegender Elemente, deren jedes mit $E^{(n)}$ zusammen auf einem charakteristischen Streifen gelegen ist.*

14. Als Charakteristiken der Hauptcoincidenz eines beliebigen Connexes (20) pag. 464 bezeichnen wir dem Vorigen entsprechend solche Streifen n. Ordnung, durch die ∞ viele Enveloppen n. O. der Coincidenz hindurchgehen. Ist (22) die zugehörige Differentialgleichung, so gehen unsere Charakteristiken vermöge der Transformation (6) augenscheinlich in diejenigen von (22) über. Die n charakteristischen Richtungen, die einem Element $x \ldots a_{\mu_n}$ zugeordnet, sind, werden durch (34) dargestellt, wenn man darin für $pq \ldots \alpha_n^{(n)}$ ihre Werthe aus (6) setzt. Mit Rücksicht auf die Formeln (28) der Nr. 11 verwandeln sich die Gleichungen (29) pag. 466 in die folgenden:

$$(37) \qquad \begin{cases} M' + \sum A_i^{(n)} (\alpha_i^{(n+1)} - \beta_i^{(n+1)}) = 0, \\ N' + \sum A_i^{(n)} (\alpha_{i+1}^{(n+1)} - \beta_{i+1}^{(n+1)}) = 0, \end{cases}$$

die Gleichung (33) ebenso in:

$$M'\,dx + N'\,dy + A_i^{(n)}\,\delta\alpha_i^{(n)} = 0, \tag{38}$$

wobei nach Nr. 4

$$\delta\alpha_i^{(n)} = (\alpha_i^{(n+1)} - \beta_i^{(n+1)})\,dx + (\alpha_{i+1}^{(n+1)} - \beta_{i+1}^{(n+1)})\,dy. \tag{15}$$

Diese Formeln lehren, dass man in die Gleichungen (35), (36) nur $\delta\alpha_i^{(n)}$ statt $d\alpha_i^{(n)}$ und M', N' für M, N einzusetzen braucht, um die Gleichungen für die Charakteristiken der Hauptcoincidenz von $V = 0$ zu erhalten.

15. Wir gehen nunmehr dazu über, die Theorie der Charakteristiken mit den in den ersten beiden §§ entwickelten Principien in Verbindung zu setzen.

Multipliciren wir die erste Gleichung (29) mit N, die zweite mit M, und subtrahiren, so kommt:

$$A_0^{(n)} N\alpha_0^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} (NA_i^{(n)} - MA_{i-1}^{(n)})\,\alpha_i^{(n+1)} - MA_n^{(n)}\,\alpha_{n+1}^{(n+1)} = 0. \tag{39}$$

Diese Gleichung gestattet eine sehr einfache Interpretation

Multiplicirt man nämlich die Gleichung (34) mit $N\frac{dy}{dx} + M$, so folgt

$$NA_0^{(n)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(NA_i^{(n)} - MA_{i-1}^{(n)})\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-i+1} + (-1)^n MA_n^{(n)} = 0. \tag{40}$$

Betrachtet man die linke Seite dieser Gleichung als binäre Form mit den homogenen Variabelen dx, dy so erkennt man in der linken Seite von (39) sofort die n^{te} Ueberschiebung dieser Form über die folgende:

$$\sum \binom{n+1}{i} \alpha_0^{(n+1)} dx^{n+1-i} dy^i = 0, \tag{41}$$

welche gleich Null gesetzt, die in Nr. 5 definirten $n+1$ „Schmiegungsrichtungen" definirt. Hat man 2 binäre Formen k^{ten} Grades mit verschwindende bilinearer Invariante, so pflegt man die beiden Systeme von k Elementargebilden, die durch Nullsetzen der beiden Formen bestimmt sind, als „vereinigt liegend" zu bezeichnen. Da wir diesen Ausdruck bereits in einem andern Sinne verwendet haben, so wollen wir für die genannte Beziehung das Wort „harmonisch" gebrauchen.

Sind also $\Lambda_1 \Lambda_2 \ldots \Lambda_n$ die n Wurzeln der Gleichung (34), L die ausgezeichnete Richtung: so haben wir das

Theorem. *Die Schmiegungsrichtungen, welche die specielle μ_n-gliedrige Flächenschaar (2) in einem beliebigen Punkt einer Integralfläche bestimmt, sind zu dem aus den n charakteristischen Richtungen Λ_i und der ausgezeichneten Richtung L bestehenden $n+1$-tupel von Strahlen harmonisch.*

Dies ist die Verallgemeinerung des von Herrn Darboux gegebenen Satzes:*)

„In einem beliebigen Punkte einer Integralfläche der partiellen Differentialgleichung I. O.:

$$F(xyzpq) = 0$$

sind die charakteristische Richtung: $dx : dy = \frac{\partial F}{\partial p} : \frac{\partial F}{\partial q}$ und die ausgezeichnete Richtung: $dx : dy = -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\,\frac{\partial F}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial z}\right)$ conjugirt (d. i. harmonisch zu den beiden Asymptotenrichtungen)."

16. Wir schreiben die Gleichungen (35), (36) in der Form

$$M + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d\alpha_k^{(n)}}{dx} \left(\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu A_{k-\nu}^{(n)} \left(\frac{dy}{dx}\right)^\nu \right) = 0,$$

$$N + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d\alpha_{k+1}^{(n)}}{dx} \left(\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu A_{k-\nu}^{(n)} \left(\frac{dy}{dx}\right)^\nu \right) = 0.$$

Indem wir die erste dieser Gleichungen mit M, die zweite mit N multipliciren und $\frac{dy}{dx} = \Lambda_i$ setzen, folgt durch Subtraction

$$N A_0^{(n)} \frac{d\alpha_0^{(n)}}{dx} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[N \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu A_{k-\nu}^{(n)} \Lambda_i^\nu - M \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu A_{k-\nu-1}^{(n)} \Lambda_i^\nu \right] \frac{d\alpha_k^{(n)}}{dx}$$

$$- M \frac{d\alpha_n^{(n)}}{dx} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu A_{k-\nu-1}^{(n)} \Lambda_i^\nu = 0.$$

Man erkennt in der rechten Seite dieser Gleichung die n^{te} Ueberschiebung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d\alpha_i^{(n)} dx^{n-i} dy^i \tag{42}$$

über die Form, welche, gleich Null gesetzt, die n Strahlen:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \ldots \Lambda_{i-1} L, \Lambda_{i+1} \ldots \Lambda_n \tag{43}$$

darstellt.

Dies liefert das Theorem:

Die ∞^{n-1} Elemente n. O., die mit einem beliebigen $E^{(n)}$ der Gleichung (22) vereinigt liegen und mit ihm zusammen dem i^{ten} Charakteristikensystem angehören, sind dadurch definirt, dass das Schnitt-n-tupel, welches jedes von ihnen mit E^n bestimmt, zu dem n-tupel (43) harmonisch liegt.

---

*) l. c. p. 24.

Setzt man $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$, so verschwindet nach (33) pag. 467 die n^{te} Ueberschiebung der Formen (34) und (42), also:

Schreitet man von dem Punkte xyz der Integralfläche zu einem benachbarten $x + dx \cdots$ in der ausgezeichneten Richtung fort, so schneiden sich die zugehörigen Elemente $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ und

$$x + dx \cdots \alpha_n^{(n)} + d\alpha_n^{(n)}$$

in einem n-tupel von Strahlen, das zu den n charakteristischen Richtungen harmonisch ist.

17. Nach Nr. 11 bleiben diese Gesetze auch für die Charakteristiken der Hauptcoincidenz eines beliebigen Connexes erhalten, wenn wir nur statt der Elemente $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ der partiellen Differentialgleichung die Elemente $x \ldots a_{\mu_n}$ der Coincidenz, statt der Richtung L die Richtung L' der Nr. 11, statt der Schmiegungsrichtungen (41) die der Flächenschaar (4) entsprechenden Richtungen (7) substituiren; dabei ist zu beachten, dass im allgemeinen nur eines der μ Systeme von ∞^2 Flächenelementen $x \ldots a_{\mu_n}$, aus denen sich eine Integralfläche der Hauptcoincidenz aufbaut, der letzteren angehört.

18. Dividirt man irgend eine algebraische Gleichung:

$$\sum_{\varrho=0}^{m} a_\varrho x^{m-\varrho} = 0 \tag{44}$$

durch $x - y$, wo y eine ihrer Wurzeln ist, so erhält man

$$\sum_{\varrho=0}^{m-1} a'_\varrho x^{m-1-\varrho} = 0 \tag{45}$$

worin:

$$a'_\varrho = \sum_{i=0}^{\varrho} a_i y^{\varrho-i}.$$

Die Polare von y in Bezug auf eine beliebige Form m. O.:

$$\sum_{\varrho=0}^{m} \binom{m}{\varrho} b_\varrho x^{m-\varrho} = 0 \tag{46}$$

ist:

$$\sum_{\varrho=0}^{m-1} \binom{m-1}{\varrho} b'_\varrho y^{m-1-\varrho} = 0 \tag{47}$$

worin

$$b_\varrho' = y b_\varrho + b_{\varrho+1}.$$

Man erhält dann nach einfacher Rechnung die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu a'_\nu b'_{m-1-\nu} = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu a_\nu b_{m-\nu}$$

d. h. die bilineare Invariante der binären Formen (47), (45) ist derjenigen der Formen (46), (44) gleich. Indem man $m = n + 1$ setzt, die Form (44) mit (40), ebenso (46) mit (7) identificirt und sich an das Theorem der Nr. 7 pag. 463 erinnert, erkennt man, dass die Sätze der Nr. 16 mit dem Theorem der Nr. 15 vollständig äquivalent sind; überdies folgt das Theorem:

Denkt man sich eine Fläche auf irgend eine Weise aus einer Schaar von ∞^2 vereinigt liegenden Elementen $xyz a_1 \ldots a_{\mu_n}$ aufgebaut und in jedem Punkte xyz die zugehörigen Schmiegungsrichtungen bestimmt, so besteht zwischen den Strahlen $l_1 \ldots l_{n+1}$ eines $n+1$-tupels von Tangentenrichtungen, das zu den Schmiegungsrichtungen harmonisch liegt, eine Reciprocität in dem folgenden Sinne. Geht man von einem Elemente $E^{(n)}(xyz \ldots a_{\mu_n})$ der Fläche in der Richtung l_i zu einem benachbarten Elemente weiter, so bestimmt dieses mit $E^{(n)}$ ein Schnitt-n-tupel, das zu den n übrigen Strahlen $l_1 \ldots l_{i-1} l_{i+1} \ldots l_{n+1}$ harmonisch liegt.

Dies ist die Verallgemeinerung des Theorems der conjugirten Tangenten.

München, den 15. Oktober 1893.

Ueber die in recurrirender Weise gebildeten Grössen und ihren Zusammenhang mit den algebraischen Gleichungen.

Von

Fritz Cohn in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

Daniel Bernoulli giebt im Band III der Comm. Petrop. eine Methode an, die absolut grösste und kleinste Wurzel einer algebraischen Gleichung, falls diese reell sind, mit Hülfe der recurrirenden Reihen näherungsweise zu berechnen, eine Methode, welche dann von Euler in seiner „Introductio in analysin infinitorum" Bd. I, Cap. 17 weiter ausgebildet und auch auf den Fall imaginärer Wurzeln ausgedehnt wurde. Auch Lagrange und Legendre beschäftigten sich mit dieser Frage; ein wesentlicher Fortschritt gelang jedoch erst Fourier, welcher in der Einleitung zu seiner unvollendet gebliebenen „Analyse des équations déterminées" eine Erweiterung dieser Methode in Aussicht stellte, die nach den von ihm gemachten Andeutungen in gewisser Hinsicht von Stern*) und Jacobi**) ausgeführt wurde.

In neuerer Zeit ist auf die Methode nur selten näher eingegangen, in Serret's „Cours d'Algèbre supérieure" ist sie nicht einmal erwähnt; eine Arbeit von Laisant***) enthält nichts wesentlich Neues. Auch der 2te Theil der Abhandlung von Schröder†), in der er eine neue Methode der numerischen Auflösung von Gleichungen entwickelt, die er eine Erweiterung der Bernoulli'schen Methode nennt, ist nichts anderes als diese Methode in anderer Darstellung, wenigstens in der Erweiterung, die ihr schon Euler gegeben hat.

Nur eine Arbeit von Runge††) ist hier zu nennen, in der, abgesehen von der Ausdehnung auf variable Coefficienten, *sämmtliche*

*) Crelle's Journal Bd. 11, S. 293: Theorie der Kettenbrüche.

**) Crelle's Journal Bd. 13, S. 349: Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes.

***) Darboux Bulletin des sciences ... Série II, T. V, S. 218—249.

†) Mathematische Annalen Bd. 2, S. 333—349.

††) Acta Mathematica Bd. VI, S. 305—318. — Diese Arbeit wurde mir erst bekannt, als ich den grössten Theil der folgenden Entwicklungen, insbesondere

Wurzeln auf rationalem Wege dargestellt werden; sie beschränkt sich jedoch auf den Fall der Potenzsummen der Wurzeln, von dem auch Bernoulli ausging, und nimmt keinen Bezug auf die recurrirende Berechnung der auftretenden Grössen.

Losgelöst von dem Gesichtspunkte der Auflösung der algebraischen Gleichungen ist die Frage nach den in recurrirender Weise gebildeten Grössen [abgesehen von dem bekannten Satze, dass sie als Coefficienten in der Potenzreihenentwicklung einer rationalen Function auftreten] niemals behandelt worden. Diese Loslösung soll in dem Folgenden geschehen, indem die Entwicklungen nicht den besonderen Zweck verfolgen, eine für die numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen geeignete Methode, als vielmehr allgemeiner die Eigenschaften der in recurrirender Weise gebildeten Grössen zu entwickeln, unter denen jene specielle von Daniel Bernoulli entdeckte nur eine einzelne Thatsache ist.

So werden insbesondere die Bedingungen untersucht, unter denen jener Bernoulli'sche Satz gilt. In allgemein gültiger Form lautet derselbe:

Werden die Grössen P_n durch die Recursionsformel

$$P_{n+\nu} = a_1 P_{n+\nu-1} + a_2 P_{n+\nu-2} + \cdots + a_\nu P_n \quad (n = 1, 2, \cdots, \infty)$$

bestimmt, wo die $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ gegebene, reelle oder complexe Zahlengrössen, die Anfangsgrössen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ völlig willkürlich sind, so nähert sich der Quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ mit wachsendem n einem von der Wahl der Anfangsgrössen ganz unabhängigen Grenzwerth, wenn die algebraische Gleichung

$$f(z) = z^\nu - a_1 z^{\nu-1} - a_2 z^{\nu-2} - \cdots - a_\nu = 0$$

eine absolut grösste Wurzel z_1 besitzt (d. h. nicht zwei dem absoluten Betrage nach gleiche, grösste) und in dem durch $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$; $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ constituirten Rationalitätsbereich irreducibel ist, und dieser Grenzwerth ist z_1.

Die practische Anwendung, die durch diesen Satz gegeben ist, tritt hier nur in zweiter Linie auf. Daneben treten andere Sätze, die den Fall einer reducibeln Gleichung, den absolut gleicher Wurzeln, sowie die Art der Annäherung an den Grenzwerth betreffen.

Dazu kommen Sätze über die aus den P_n gebildeten Unterdeterminanten und die Grenzwerthe, denen sich ihre Quotienten nähern, mit deren Hülfe sich das algebraische Resultat dieses ersten Theils so

---

die Sätze über die Unterdeterminanten, aus denen sich gerade die rationale Entwicklung sämmtlicher Wurzeln ergiebt, sowie die Ausdehnung auf variable Coefficienten schon gemacht hatte. Einiges in dem Folgenden ist daher schon in den Runge'schen Resultaten enthalten.

zusammenfassen lässt, *dass sich in jedem Falle sämmtliche Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch die in recurrirender Weise gebildeten Grössen P_n auf rationalem Wege mit beliebiger Annäherung ermitteln lassen.**)

Im zweiten Theile werden sodann die Betrachtungen auf variable Coefficienten ausgedehnt. Eine solche Ausdehnung ist bisher nur von Runge in der erwähnten Arbeit vorgenommen. Derselbe fasst die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ theils als vollständig unbestimmte Variable auf, sodass sie eine 2ν-fache Mannigfaltigkeit repräsentiren, theils als in irgend einer Weise auf eine geringere, aus der 2ν-fachen herausgehobene Mannigfaltigkeit beschränkt. Da jedoch der Fall, in welchem die a_k Functionen *einer* complexen Variabeln $x = \xi + i\eta$ sind, fast alle Eigenthümlichkeiten des allgemeinen Falls hervortreten lässt, beschränken wir uns im 2ten Theil lediglich auf diesen Fall, indem wir noch die Coefficienten als ganze, rationale Functionen von x voraussetzen.

Es werden so die Sätze des ersten Theils auf die recurrirend gebildeten Functionen einer complexen Variabeln ausgedehnt und die Beschränkungen dieser Variabilität untersucht, unter denen die Quotienten der im ersten Theile gebildeten rationalen Ausdrücke der P_n sich einem Grenzwerth nähern. Sämmtliche Zweige der algebraischen Function z von x werden als Grenzwerthe rationaler Functionen $R_{n,k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$ dargestellt, die sich in einfacher Weise recurrirend bestimmen; nur in den Punkten einer gewissen, algebraischen Curve hört diese Annäherung auf. Die Gesammtheit der ν rationalen Ausdrücke $R_{n,k}(x)$ stellt für alle Werthe von x, ausgenommen die Punkte der Curve $F(\xi, \eta) = 0$, mit wachsendem n die Gesammtheit der ν Functionszweige dar. Da jedoch gewisse dieser Grenzwerthe $\lim_{n=\infty} R_{n,k}(x)$ beim Ueberschreiten von $F(\xi, \eta) = 0$ Sprünge erleiden, indem sie vorher eine andere Wurzel liefern als nachher, so werden die Vertauschungen untersucht, die eine Fortsetzung der $R_{n,k}(x)$ über die Unstetigkeitscurve hinaus unter den Wurzeln erzeugt, und gezeigt, dass dieses Aufhören der Convergenz darin beruht, dass sich die Nullstellen der ganzen rationalen Functionen, aus denen $R_{n,k}(x)$ durch Quotientenbildung entsteht, auf den verschiedenen Theilen der Unstetigkeitscurve mit wachsendem n mehr und mehr anhäufen.

Einige Anwendungen der allgemeinen Betrachtungen beschliessen die Untersuchung.

---

*) Danach sind die Schlusssätze der Abhandlung von Franz Meyer (Math. Ann. Bd. 33, S. 524) zu ergänzen.

I. Die recurrirend gebildeten Zahlengrössen.

Cap. 1.

Allgemeine Eigenschaften.

§ 1.

Darstellung durch die Wurzeln der algebraischen Gleichung und Beweis des Hauptsatzes.

Es sei die Recursionsformel ν^{ter} Ordnung

(1) $P_{n+\nu} = a_1 P_{n+\nu-1} + a_2 P_{n+\nu-2} + \cdots + a_\nu P_n \quad (n = 1, 2, \cdots, \infty)$

vorgelegt, in welcher $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ reelle oder imaginäre Zahlengrössen irgend eines Rationalitätsbereichs bezeichnen, die, was wesentlich ist, vom Index n nicht abhängen. Die ν ersten Grössen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ bleiben hierdurch unbestimmt und willkürliche Grössen desselben Bereichs. Dann ist durch Formel (1) eine unendliche Reihe von Grössen $P_{\nu+1}, P_{\nu+2}, \ldots$ recurrirend bestimmt, deren jede aus den ν vorhergehenden durch dieselbe Operation gewonnen wird. Die Eigenschaften dieser unendlichen Reihe von Grössen sollen uns im Folgenden beschäftigen. Es zeigt sich dabei eine nahe Beziehung zu der algebraischen Gleichung

$$(2) \qquad f(z) = z^\nu - a_1 z^{\nu-1} - \cdots - a_\nu = \prod_{i=1}^{i=\nu} (z - z_i) = 0,$$

deren Wurzeln wir uns dem absoluten Betrage nach ($|z_i| > |z_{i+1}|$) geordnet denken, sodass wir häufig, der kürzeren Ausdrucksweise wegen, sagen werden, dass die Grössen P_n selbst der algebraischen Gleichung genügen.

Es gilt nämlich der schon von Daniel Bernoulli bewiesene

Satz: *Der Quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ nähert sich mit wachsendem n einem festen Grenzwerthe — und dieser ist die dem absoluten Betrage nach grösste Wurzel z_1 von $f(z) = 0$ —, falls nicht zwei Wurzeln den gleichen, grössten, absoluten Betrag haben.*

Anmerkung: Führt man, wie dies z. B. Schröder (Math. Ann. Bd. 2) und Runge (Acta Math. Bd. 6) thun, noch einen willkürlichen Parameter ζ ein, indem man $z = z' - \zeta$ setzt, so findet die Annäherung des Quotienten an einen Grenzwerth statt, falls nicht die beiden Wurzeln, die am weitesten von ζ [in der complexen Zahlenebene] entfernt sind, den gleichen Abstand von ζ haben. Da es sich jedoch hier nicht um die algebraische Gleichung, sondern um die durch eine vorgelegte Recursionsformel gegebenen Grössen P_n handelt, setzen

wir in diesem allgemeinen Theile $\xi = 0$ und werden nur im 2^ten Capitel gelegentlich darauf zurückkommen.

Zum Beweise des Bernoulli'schen Satzes brauchen wir eine Darstellung der P_n als symmetrische Functionen der Wurzeln der Gleichung, während sie durch (1) als rationale Functionen der Coefficienten gegeben sind. Nun lassen sich bekanntlich die durch eine solche Recursionsformel dargestellten Grössen als Entwicklungscoefficienten einer rationalen, gebrochenen Function ansehen. Setzen wir nämlich

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{P_n}{z^n},$$

worin $g(z)$ eine ganze Function höchstens $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet, die mit $f(z)$ keinen gemeinsamen Theiler besitzt, so folgt sofort, wenn wir beide Seiten mit $f(z)$ multipliciren und die Coefficienten der negativen Potenzen der rechten Seite gleich 0 setzen, dass die P_n der Recursionsformel (1) genügen müssen; aus den $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ bestimmen sich dabei die ν Coefficienten von $g(z)$, resp. umgekehrt. Andrerseits können wir jenen Quotienten zuerst in Partialbrüche zerlegen und jeden Bruch einzeln entwickeln:

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{g(z_i)}{f'(z_i)(z-z_i)} = \sum_{(i)} \frac{g(z_i)}{z f'(z_i)} \frac{1}{1-\frac{z_i}{z}}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{z^n} \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{z_i^{n-1} g(z_i)}{f'(z_i)}.$$

Sonach ist

$$(3) \qquad P_n = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{z_i^{n-1} g(z_i)}{f'(z_i)} = C_1 z_1^{n-1} + C_2 z_2^{n-1} + \cdots + C_\nu z_\nu^{n-1},$$

$$(n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

wobei die $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ von n unabhängig sind. *In* (3) *haben wir die Darstellung der* P_n *durch die Wurzeln von* $f(z) = 0$, *falls diese von einander verschieden sind.*

Specielle Fälle der P_n, die von Interesse sind, erhalten wir

1) für $g(z) = 1$:

Dann ist

$$P_n = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{z_i^{n-1}}{f'(z_i)} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

woraus

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0, \ldots, P_{\nu-1} = 0,\ P_\nu = 1$$

folgt.

2) für $g(z) = f'(z)$:

$$P_n = \sum_{i=1}^{i=\nu} z_i^{n-1} = s_{n-1},$$

d. h. die P_n werden in diesem Falle die Potenzsummen s_{n-1} der Wurzeln. In der That ist für diese die Formel (1) nichts anderes als die Newton'sche Formel

$$s_{n+\nu} = a_1 s_{n+\nu-1} + \cdots + a_\nu s_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

nur bestimmen sich hier die Anfangsgrössen in specieller Weise

$$s_k = a_1 s_{k-1} + a_2 s_{k-2} + \cdots + a_{k-1} s_1 + a_k k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Anm. Diesen letzteren Specialfall der Potenzsummen fasst Bernoulli allein ins Auge, Euler macht schon die Verallgemeinerung, während wieder Lagrange einige Vortheile des speciellen Falles bei der numerischen Berechnung hervorhebt. Wir lassen $g(z)$ ganz unbestimmt. Einen speciellen Fall der P_n stellen auch die Potenzen der Wurzeln selbst dar, für welche 1) in 2) übergeht, nur gehören dann $P_1, P_2', \ldots, P_\nu$ nicht dem Rationalitätsbereich der Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ an. —

Mit Hülfe von (3) folgt nun der Beweis unseres Satzes so:

Lassen wir n unter der Annahme, dass z_1 die dem absoluten Betrage nach grösste Wurzel sei, ins Unendliche wachsen, so wird unter Vernachlässigung verschwindend kleiner Terme

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = z_1, \tag{4}$$

womit der oben aufgestellte Satz bewiesen ist.

Nur wenn $|z_1| = |z_2| = \varrho$ ist, bleibt die Frage der Convergenz gegen einen Grenzwerth noch unentschieden. Wir wollen annehmen, dass nicht auch $|z_3| = \varrho$ sei und drei Fälle gesondert betrachten, deren Trennung sich von selbst ergiebt, wenn wir uns, wie es später zeitweise geschehen wird, auf reelle Coefficienten a_k beschränken:

a) $z_1 = z_2$, b) $z_1 = -z_2$, c) $|z_1| = |z_2|$ und nicht $z_1^2 = z_2^2$.

Im ersten Falle hat $f(z)$ mit $f'(z)$, im zweiten $f(z)$ mit $f(-z)$ einen gemeinsamen Theiler, welche sich beide, wenn es sich allein um die algebraische Gleichung handelt, rational beseitigen lassen. Betrachten wir hingegen die P_n für sich, so gilt im ersten Falle immer noch unser Satz, im zweiten und dritten indessen findet keine Convergenz statt.

a) $z_1 = z_2$.

In diesem Falle tritt an die Stelle des Ausdrucks (3) für die P_n, der nur für verschiedene z_i gilt, ein anderer, den wir sofort für μ

gleiche Wurzeln $z_1 = z_2 = \cdots = z_\mu$ aufstellen wollen. Zu den μ zusammenfallenden Termen $z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \ldots, z_\mu^{n-1}$ von P_n treten nämlich in bekannter Weise die $\mu - 1$ Differentialquotienten

$$(n-1)z_1^{n-2}, \binom{n-1}{2} z_1^{n-3}, \ldots, \binom{n-1}{\mu-1} z_1^{n-\mu},$$

hinzu, wie sich natürlich auch direct aus der Entwicklung von

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{A_k}{(z-z_1)^k} + \sum_{k=\mu+1}^{k=\nu} \frac{B_k}{z-z_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{A_k}{z^k}\left\{1 + \binom{k}{1}\frac{z_1}{z} + \binom{k+1}{2}\frac{z_1^2}{z^2} + \cdots\right\} + \sum_{k=\mu+1}^{k=\nu} \frac{B_k}{z-z_k}$$

ergeben würde. Dann hat P_n die Form

$$(3a) \quad P_n = C_1' z_1^{n-1} + C_2' \binom{n-1}{1} z_1^{n-2} + \cdots + C_\mu' \binom{n-1}{\mu-1} z_1^{n-\mu} + C_{\mu+1} z_{\mu+1}^{n-1} + \cdots + C_\nu z_\nu^{n-1}$$

$$= z_1^{n-\mu}\left\{C_1' z_1^{\mu-1} + C_2' \binom{n-1}{1} z_1^{\mu-2} + \cdots + C_\mu' \binom{n-1}{\mu-1}\right\} + \sum_{k=\mu+1}^{k=\nu} C_k z_k^{n-1}.$$

Gehen wir hierin zur Grenze $n = \infty$ über, so wird der letzte Term des Klammerausdrucks, dessen Coefficient C_1' nicht verschwindet, alle andern überragen. Sonach wird

$$(5) \quad \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\binom{n}{\lambda-1} z_1^{n-\lambda+1}}{\binom{n-1}{\lambda-1} z_1^{n-\lambda}} = \frac{n}{n-\lambda+1} z_1 = z_1,$$

sodass unser Satz auch für μ gleiche Wurzeln Geltung hat.

b) $z_1 = -z_2$.

Dann ist

$$P_{n+1} = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \cdots + C_\nu z_\nu^n = [C_1 + (-1)^n C_2] z_1^n + \sum_{i=3}^{i=\nu} C_i z_i^n.$$

Ist nun

$$C_1 \gtrless \pm C_2,$$

so wird mit wachsendem n das erste Glied alle folgenden überragen und

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{C_1 + (-1)^n C_2}{C_1 + (-1)^{n-1} C_2} z_1 = a z_1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a} z_1,$$

wenn

$$\frac{C_1 + C_2}{C_1 - C_2} = a$$

gesetzt wird.

Der Quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ nähert sich sonach nicht einem bestimmten Grenzwerthe; aber es wird

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+2}}{P_n} = z_1^2. \tag{6}$$

D. h. der Quotient zweier durch ein anderes getrennter P_n convergirt gegen z_1^2.

Ist aber

$$C_1 = \pm C_2$$

[was eine Bedingung für $P_1, P_2, \ldots, P_r$ enthält, die z. B. im Falle der Potenzsummen erfüllt ist], so wird entweder

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{C_3 z_3^n}{2 z_1^{n-1}}, \quad \frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = \frac{2 z_1^{n+1}}{C_3 z_3^n},$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+2}}{P_n} = z_1^2$$

oder

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2 z_1^n}{C_3 z_3^{n-1}}, \quad \frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = \frac{C_3 z_3^{n+1}}{2 z_1^n},$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+2}}{P_n} = z_3^2$$

und zwar wechseln die Grenzwerthe ab. Ist

$$\frac{P_{n+2}}{P_n} = z_1^2 + \delta_n,$$

so wird

$$\frac{P_{n+3}}{P_{n+1}} = z_3^2 + \delta_n', \quad \frac{P_{n+4}}{P_{n+2}} = z_1^2 + \delta_n'', \ldots,$$

wo

$$\lim_{n=\infty} \delta_n^{(k)} = 0$$

ist.

Sonach treten hier sogar in der Reihe der Quotienten

$$\frac{P_{n+2}}{P_n}, \frac{P_{n+3}}{P_{n+1}}, \ldots$$

zwei Grenzwerthe auf, wir könnten auch sagen

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1} P_{n+2}}{P_{n-1} P_n} = z_1^2 z_3^2. \tag{7}$$

c) $|z_1| = |z_2|$

$$z_1 = \varrho e^{\varphi i}, \quad z_2 = \varrho e^{\psi i}$$

und weder

$$\varphi = \psi$$

noch

$$\varphi = \pi + \psi.$$

Dann gilt zunächst der Satz:

Wenn sich der Quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ *mit wachsendem n einem Grenzwerth* ξ *nähert, so ist* ξ *eine Wurzel von* $f(z) = 0$.

Unter der gemachten Voraussetzung muss sich nämlich bei gegebenem δ ein Werth von n so gross bestimmen lassen, dass

$$\left| \frac{P_{n+m}}{P_{n+m-1}} - \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| < \delta \quad \text{für} \quad m = 2, 3, \ldots,$$

wird. Also

$$\frac{P_{n+m}}{P_{n+m-1}} = \xi + \delta_m' \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

wo

$$|\delta_m'| < \delta$$

ist.

Nun wird mit Benutzung der Recursionsformel (1)

$$(\xi + \delta_\nu')(\xi + \delta_{\nu-1}') \cdots (\xi + \delta_1') = a_1(\xi + \delta_{\nu-1}') \cdots (\xi + \delta_1') + \cdots$$
$$\cdots + a_{\nu-1}(\xi + \delta_1') + a_\nu$$

oder

$$f(\xi) = \xi^\nu - a_1\xi^{\nu-1} - a_2\xi^{\nu-2} - \cdots - a_{\nu-1}\xi - a_\nu = \varepsilon_n,$$

wobei ε_n mit wachsendem n gegen Null abnimmt, w. z. b. w.

Betrachten wir zunächst den speciellen Fall der Potenzsummen, so wird

$$\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = \frac{z_1^{n+1} + z_2^{n+1} + \cdots + z_\nu^{n+1}}{z_1^n + z_2^n + \cdots + z_\nu^n}$$

Nun ist

$$|z_1^n + z_2^n| = \varrho^n \sqrt{(\cos n\varphi + \cos n\psi)^2 + (\sin n\varphi + \sin n\psi)^2}$$
$$= 2\varrho^n \cos \frac{n(\varphi - \psi)}{2}.$$

Da $\varrho > |z_3|$ ist, wird mit wachsendem n

$$\lim_{n=\infty} \frac{|z_1^n + z_2^n|}{|z_3^n|} = 2 \left| \cos \frac{n(\varphi - \psi)}{2} \right| \left| \frac{\varrho}{z_3} \right|^n = \infty$$

werden, mit Ausnahme einzelner discreter Werthe von n [die Fälle $\varphi = \psi$, $\varphi = \pi + \psi$ sind schon erledigt, im letzteren nehmen diese discreten Werthe von n die Hälfte aller Werthe ein]. Also wird im Allgemeinen

$$\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = \frac{z_1^{n+1} + z_2^{n+1}}{z_1^n + z_2^n}$$

zu setzen sein. Wenn sich dieser Quotient einem Grenzwerth näherte,

so kann es nur ε_1 (oder, was dasselbe ist, ε_2) sein, denn ε_3 könnte nur für einzelne Werthe von n in Betracht kommen. Da aber

$$\left| \frac{\varepsilon_1^{n+1} + \varepsilon_2^{n+1}}{\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n} - \varepsilon_1 \right| = \left| \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2^n}{\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n} \right| = \left| \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2 \cos \frac{n(\varphi - \psi)}{2}} \right|$$

ist, so ist diese Annahme falsch, der Quotient hat keinen Grenzwerth.

Im Falle der allgemeinen P_n lassen sich nun stets die Potenzsummen durch die P_n linear und homogen darstellen. Denn aus

$$\begin{aligned} P_{n+\nu} &= C_1 \varepsilon_1^{n+\nu-1} + \cdots + C_\nu \varepsilon_\nu^{n+\nu-1}, \\ P_{n+\nu-1} &= C_1 \varepsilon_1^{n+\nu-2} + \cdots + C_\nu \varepsilon_\nu^{n+\nu-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{n+1} &= C_1 \varepsilon_1^n \quad + \cdots + C_\nu \varepsilon_\nu^n \end{aligned}$$

folgt:

$$s_n = \varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \cdots + \varepsilon_\nu^n = b_1 P_{n+\nu} + b_2 P_{n+\nu-1} + \cdots + b_\nu P_{n+1},$$

wenn die $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ so bestimmt werden, dass

$$C_k [b_1 \varepsilon_k^{\nu-1} + b_2 \varepsilon_k^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1} \varepsilon_k + b_\nu] = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

wird.

Würde nun der Quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ sich dem Grenzwerth ε_k nähern, so müsste sich eine Zahl m so gross bestimmen lassen, dass

$$\left| \frac{P_{n+1}}{P_n} - \varepsilon_k \right| < \delta \quad \text{für} \quad n = m, m+1, \ldots, \infty$$

wird, wo δ eine beliebig vorgeschriebene Grösse bezeichnet, oder noch weitergehend so, dass

$$\left| \frac{P_{n+l}}{P_n} - \varepsilon_k^l \right| < \delta \quad \text{für} \quad \begin{matrix} l = 1, 2, \ldots, \nu \\ n = m, m+1, \ldots, \infty \end{matrix}$$

wird. Also

$$P_{n+l} = (\varepsilon_k^l + \varepsilon_{n+l}\delta) P_n,$$

wobei

$$|\varepsilon_{n+l}| < 1$$

ist. Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= b_1 P_{n+\nu-1} + b_2 P_{n+\nu-2} + \cdots + b_\nu P_n \\ &= P_n \{b_1 \varepsilon_k^{\nu-1} + b_2 \varepsilon_k^{\nu-2} + \cdots + b_\nu + \delta(b_1 \varepsilon_{n+\nu-1} + b_2 \varepsilon_{n+\nu-2} \\ &\qquad + \cdots + b_\nu \varepsilon_n)\} \\ &= P_n \left\{ \frac{1}{C_k} + \delta_n' \right\}, \end{aligned}$$

wobei wieder δ'_n unter eine gegebene Grösse δ' gebracht werden kann. Folglich

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{\frac{1}{C_k} + \delta'_{n+1}}{\frac{1}{C_k} + \delta'_n} \frac{P_{n+1}}{P_n}.$$

Mit wachsendem n wird demnach, da C_k endlich ist [$C_k = \infty$ würde $f'(z_k) = 0$ bedeuten, und in der That findet ja im Falle einer Doppelwurzel Annäherung an einen Grenzwerth statt]

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{s_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = z_k.$$

Dieses ist aber unmöglich. *Sonach kann für keine irgendwie gewählten Werthe von $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ Annäherung an einen Grenzwerth stattfinden, sobald die beiden, grössten Wurzeln z_1, z_2 denselben Betrag haben, ohne gleich zu sein.*

Analoges ergiebt sich, wenn mehr als zwei dem absoluten Betrage nach gleiche, grösste Wurzeln vorhanden sind.

Für den Fall reeller Coefficienten a_k spricht sich das Resultat kurz so aus:

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = z_1$$

gilt stets, sobald die absolut grösste Wurzel z_1 reell und keine andere ihr entgegengesetzt gleich ist.

Die Wahl der Anfangsgrössen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, d. h. von $g(z)$, hat hingegen keinen Einfluss auf den Grenzwerth, wenigstens solange $f(z)$ und $g(z)$ keinen gemeinsamen Theiler haben.

§ 2.

Fall einer reducibeln Gleichung $f(z) = 0$.

Solange $g(z)$ unbestimmt bleibt, können die bisherigen Betrachtungen keine Ausnahme erleiden; sobald jedoch $g(z)$ speciell gewählt wird, kann es vorkommen, dass der Quotient sich einer andern Wurzel als z_1 nähert. Es wurde nämlich vorausgesetzt, dass $f(z)$ und $g(z)$ keinen gemeinsamen Theiler haben, was sicher der Fall ist, wenn $f(z)$ in dem durch $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ gebildeten Rationalitätsbereich irreducibel ist. Haben jedoch $f(z)$ und $g(z)$ einen gemeinsamen Theiler $h(z)$, so fällt dieser aus dem Quotienten $\frac{g(z)}{f(z)}$ heraus.

$$g(z) = g_1(z)\, h(z), \qquad \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{g_1(z)}{f_1(z)}.$$
$$f(z) = f_1(z)\, h(z),$$

Demnach wird sich der Quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ der absolut grössten Wurzel von $f_1(z) = 0$ nähern. In welcher Weise dieses an den P_n selbst hervortritt, ergiebt sich leicht. Die P_n genügen schon der Recursionsformel niederer Ordnung

$$f_1(z) = 0.$$

Wir fragen daher jetzt allgemeiner:

Können die P_n zwei verschiedenen Recursionsformeln genügen? Es sei in abgekürzter Schreibweise

$$(1) \qquad P_{n+\nu} - a_1 P_{n+\nu-1} - \cdots - a_\nu P_n = f(z) = 0,$$

$$(2) \qquad P_{n+\mu} - b_1 P_{n+\mu-1} - \cdots - b_\mu P_n = \varphi(z) = 0.$$

Dann gelten die beiden Entwicklungen

$$(3) \qquad \frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{P_n}{z^n} = \frac{\gamma(z)}{\varphi(z)}.$$

Sei nun $T(f, \varphi) = T(z)$ der grösste gemeinsame Theiler von $f(z)$ und $\varphi(z)$, so ist

$$(4) \qquad f(z) = f_1(z) T(z), \qquad \varphi(z) = \varphi_1(z) T(z).$$

Also

$$(5) \qquad \frac{g(z)}{f_1(z)} = \frac{\gamma(z)}{\varphi_1(z)}.$$

Da nun $f_1(z)$ und $\varphi_1(z)$ theilerfremd sind, muss $g(z)$ durch $f_1(z)$, $\gamma(z)$ durch $\varphi_1(z)$ theilbar sein. Sonach wird

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{P_n}{z^n} = \frac{\bar{g}(z)}{T(f, \varphi)}.$$

D. h. genügen die P_n zwei verschiedenen Recursionsformeln, so genügen sie auch dem grössten, gemeinsamen Theiler derselben.

Genügen die P_n unserer Recursionsformel (1), *so muss die Recursionsformel niedrigster Ordnung, der sie genügen, ein Theiler von $f(z) = 0$ sein.*

Genügen die P_n der Formel (1), *so genügen sie auch allen Recursionsformeln*

$$f(z)\varphi(z) = 0,$$

in denen $f(z)$ als Factor enthalten ist.

Sonach folgt sofort:

Eine rationale Recursionsformel niederer Ordnung als (1) kann für die P_n nur bestehen, wenn $f(z)$ reducibel ist.

Einer irrationalen Recursionsformel können die P_n überhaupt nicht genügen; denn wäre eine solche niedrigster Ordnung von der

μ^{ten} Ordnung, so würden sie auch allen andern μ^{ter} Ordnung genügen, die dadurch entstehen, dass wir die irrationalen Coefficienten durch ihre conjugirten Werthe ersetzen, da ja die P_n rational sind. Daraus würde sich aber eine Recursionsformel niederer als μ^{ter} Ordnung ergeben, was der Voraussetzung widerspricht.

Ist nun aber $f_1(z)$ ein rationaler Factor von $f(z)$, so ist klar, dass die P_n wirklich der Recursionsformel $f_1(z) = 0$ schon genügen, wenn nur die Anfangsgrössen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ diese Eigenschaft haben. Es sei nämlich

$$f(z) = z^{\nu+1} - (a_1 + \zeta) z^\nu - (a_2 - a_1\zeta) z^{\nu-1} - \cdots - (a_\nu - a_{\nu-1}\zeta)\, z + a_\nu \zeta$$
$$= (z - \zeta)(z^\nu - a_1 z^{\nu-1} - \cdots - a_\nu) = 0$$

die vorgelegte Gleichung, so ist

$$P_{n+\nu+1} = (a_1 + \zeta) P_{n+\nu} + (a_2 - a_1\zeta) P_{n+\nu-1} + \cdots$$
$$\cdots + (a_\nu - a_{\nu-1}\zeta) P_{n+1} - a_\nu \zeta P_n \quad (n = 1, 2, \ldots \infty)$$

oder

$$(7)\quad P_{n+\nu+1} - a_1 P_{n+\nu} - \cdots - a_\nu P_{n+1} = \zeta(P_{n+\nu} - a_1 P_{n+\nu-1} - \cdots - a_\nu P_n)$$
$$= \zeta^n (P_{\nu+1} - a_1 P_\nu - \cdots - a_\nu P_1) = \zeta^n A,$$

wobei A nur von den Anfangsgrössen $P_1, P_2, \ldots, P_{\nu+1}$ abhängt.

Im Allgemeinen sind dann die beiden Recursionsformeln, die zu $f(z) = 0$ und $\frac{f(z)}{z - \zeta} = 0$ gehören, nicht äquivalent. Ist die zweite erfüllt, so allerdings auch die erste, aber nicht nothwendig umgekehrt, sondern nur dann, wenn den Anfangsgrössen die Bedingung

$$(8)\qquad P_{\nu+1} = a_1 P_\nu + a_2 P_{\nu-1} + \cdots + a_\nu P_1$$

auferlegt wird; in diesem Falle sind die durch die beiden Recursionsformeln gelieferten Grössen P_n einander gleich. Sonach folgt der

Satz: *Damit die Grössen P_n schon einer Recursionsformel niederer Ordnung als* (1) *genügen, muss $f(z) = 0$ reducibel sein; damit dann die P_n dem rationalen Factor $f_1(z) = 0$ genügen, müssen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ dieses thun; dann gilt es allgemein.*

In diesem Falle nähert sich der Quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ natürlich der absolut grössten Wurzel von $f_1(z) = 0$. Umgekehrt:

Nähert sich mit wachsendem n der Quotient der Wurzel z_k, und nicht z_1, so muss die Gleichung $f(z) = 0$ rational zerfallen und die P_n genügen einer Recursionsformel niederer Ordnung, deren absolut grösste Wurzel z_k ist. —

Somit können wir nunmehr in jedem Falle über den Grenzwerth, dem sich der Quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ mit wachsendem n nähert, Bestimmtes aussagen und unsern Hauptsatz so aussprechen:

Satz: *Der Quotient* $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ *der durch die Recursionsformel*

$$P_{n+\nu} = a_1 P_{n+\nu-1} + \cdots + a_\nu P_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

definirten Grössen P_n *nähert sich mit wachsendem n der absolut grössten Wurzel von*

$$f(z) = z^\nu - a_1 z^{\nu-1} - \cdots - a_\nu = 0,$$

falls $f(z)$ *in dem durch* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ [*und* $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, *falls wir diese einem erweiterten Bereich entnehmen wollen,*] *gebildeten Rationalitätsbereich irreducibel ist, auch noch wenn* $z_1 = z_2$ *ist. Nur wenn bei zerfallendem* $f(z)$ $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ *schon einem rationalen Factor von* $f(z) = 0$ *genügen, kann ein anderer Grenzwerth auftreten. Ist endlich* $|z_1| = |z_2|$, *ohne dass* $z_1 = z_2$ *ist, so findet keine Annäherung an einen Grenzwerth statt.*

In den beiden oben erwähnten Specialfällen $g(z) = 1$, $g(z) = f'(z)$ kann stets nur die absolut grösste Wurzel als Grenzwerth auftreten, und auch sonst kann nur im besonderen Falle die Wahl von $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ auf den Grenzwerth von Einfluss sein.

Heben wir hier noch den speciellen Fall hervor, dass $f(z)$ ein Factor von $z^k - a$ sei, sodass sämmtliche Wurzeln denselben absoluten Betrag haben. Die P_n genügen dann nicht nur der Recursionsformel $f(z) = 0$, sondern auch

$$z^k - a = 0,$$

d. h. es ist

$$P_{n+k} = a P_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Die P_n wiederholen sich dann periodisch unter Multiplication mit dem constanten Factor a. Umgekehrt können sich die P_n nur dann periodisch (abgesehen von einem constanten Multiplicator) wiederholen, wenn die Recursionsformel niedrigster Ordnung, der sie genügen, ein Factor von $z^k - a = 0$ ist.

Es tritt nun weiterhin die Frage auf, in welcher Weise die Annäherung des Quotienten $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ an den Grenzwerth stattfindet. Setzen wir

$$q_n^{(1)} = \frac{P_{n+1}}{P_n}, \tag{9}$$

also

$$\lim_{n=\infty} q_n^{(1)} = z_1$$

und

$$\delta_n^{(1)} = \frac{P_{n+1}}{P_n} - \frac{P_n}{P_{n-1}} = q_n^{(1)} - q_{n-1}^{(1)} = \frac{P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2}{P_n P_{n-1}} \tag{10}$$

$$= \left(\frac{P_{n+1}}{P_n} - z_1\right) - \left(\frac{P_n}{P_{n-1}} - z_1\right),$$

so giebt $\delta_n^{(1)}$, die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quotienten oder auch zweier aufeinanderfolgender Abweichungen vom Grenzwerthe, ein Mass für die Schnelligkeit der Annäherung. Nun war

$$P_n = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{g(z_i)}{f'(z_i)} z_i^{n-1}.$$

Also

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = \sum (z_i^{n-2} z_k^n - z_i^{n-1} z_k^{n-1}) \frac{g(z_i)\, g(z_k)}{f'(z_i) f'(z_k)}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Sonach wird für wachsendes n, wenn

$$|z_1| > |z_2| > |z_3|$$

ist,

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = z_1^{n-2} z_2^{n-2} (z_1 - z_2)^2 \frac{g(z_1)\, g(z_2)}{f'(z_1) f'(z_2)} = C z_1^{n-2} z_2^{n-2},$$

$$(11) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+2} P_n - P_{n+1}^2}{P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2} = z_1 z_2,$$

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} q_n^{(2)} = \lim_{n=\infty} \frac{\delta_{n+1}^{(1)}}{\delta_n^{(1)}} = \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+2} P_n - P_{n+1}^2}{P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2} \frac{P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Satz: *Die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Quotienten nehmen im Verhältniss* $\frac{z_2}{z_1}$ *ab*, sodass die Annäherung um so schneller vor sich geht, je mehr z_1 die Wurzel z_2 überragt.

Um nun auch weiterhin die Annäherung zu bestimmen, mit der sich der Quotient $q_n^{(2)}$ dem Werthe $\frac{z_2}{z_1}$ nähert, müssen wir einige allgemeine Sätze einschieben.

§ 3.

Einige allgemeine Sätze über recurrirende Reihen.

Satz I. *Genügen zwei Reihen von Grössen* P_n, Q_n *den Recursionsformeln*

$$(1) \quad \begin{cases} P_{n+\nu_1} - a_1 P_{n+\nu_1-1} - \cdots - a_{\nu_1} P_n = f(x) = \prod_{i=1}^{i=\nu_1} (x - x_i) = 0, \\ Q_{n+\nu_2} - b_1 Q_{n+\nu_2-1} - \cdots - b_{\nu_2} Q_n = \varphi(y) = \prod_{k=1}^{k=\nu_2} (y - y_k) = 0, \end{cases}$$

wobei $f(z)$ *und* $\varphi(z)$ *keinen gemeinsamen Theiler haben, so genügt*

a) *die Summe oder Differenz*

$$(2) \qquad R_n = P_n \pm Q_n$$

der Formel

$$R_{n+\nu} - c_1 R_{n+\nu-1} - \cdots - c_\nu R_n = f(z)\varphi(z)$$

$$= \prod_{i=1}^{i=\nu_1}(z - x_i) \prod_{k=1}^{k=\nu_2}(z - y_k) = 0, \tag{3}$$

$$(\nu = \nu_1 + \nu_2),$$

b) *das Product*

$$R_n = P_n Q_n \tag{4}$$

der Recursionsformel

$$R_{n+\nu} - c_1 R_{n+\nu-1} - \cdots - c_\nu R_n = \prod_{\substack{i=1,2,\cdots\nu_1 \\ k=1,2,\cdots\nu_2}} (z - x_i y_k) = 0 \tag{5}$$

$$(\nu = \nu_1 \nu_2).$$

Beweis zu a):

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_1^\infty \frac{P_n}{x^n}, \qquad \frac{\gamma(y)}{\varphi(y)} = \sum_1^\infty \frac{Q_n}{y^n},$$

$$\frac{g(z)}{f(z)} \pm \frac{\gamma(z)}{\varphi(z)} = \frac{g(z)\varphi(z) \pm \gamma(z) f(z)}{f(z)\varphi(z)} = \sum_1^\infty \frac{R_n}{z^n},$$

sodass R_n nach dem Früheren der Recursionsformel

$$f(z)\varphi(z) = 0$$

genügt.

Haben $f(z)$ und $\varphi(z)$ den grössten gemeinsamen Theiler $T(f, \varphi)$, so fällt dieser aus dem Quotienten $\frac{g\varphi \pm \gamma f}{f\varphi}$ heraus, und es genügen die R_n sonach schon der Formel

$$\frac{f(z)\varphi(z)}{T(f, \varphi)} = 0.$$

Ferner folgt, dass, wenn eine vorgelegte Recursionsformel zwei rationale Factoren besitzt, und die P_n dem einen, die Q_n dem andern Factor genügen, $P_n \pm Q_n$ dann der vorgelegten Formel genügt.

Beweis zu b):

Aus

$$P_n = \sum_{i=1}^{i=\nu_1} A_i x_i^{n-1}, \qquad Q_n = \sum_{k=1}^{k=\nu_2} B_k y_k^{n-1}$$

ergiebt sich

$$R_n = P_n Q_n = \sum_{\substack{i=1,2,\cdots,\nu_1 \\ k=1,2,\cdots,\nu_2}} A_i B_k (x_i y_k)^{n-1}.$$

Hieraus aber folgt unter Anwendung des eben bewiesenen Satzes

auf irrationale Factoren, dass R_n einer Recursionsformel genügt, deren zugehörige, algebraische Gleichung die Wurzeln $x_i y_k$ besitzt.

Wir können übrigens auch so schliessen: Da von den Producten $P_n Q_n$ nur $\nu_1 \nu_2$ linear unabhängig sind, so muss für die R_n eine rationale Recursionsformel $\nu_1 \nu_2^{\text{ter}}$ Ordnung $h(z) = 0$ bestehen. Da nun

$$\lim_{n=\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n} = \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} \lim_{n=\infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = x_1 y_1$$

ist, so ist $x_1 y_1$ die absolut grösste Wurzel von $h(z) = 0$; dann müssen aber auch alle übrigen Combinationen $x_i y_k$ Wurzeln von $h(z) = 0$ sein, und da ihre Anzahl $= \nu_1 \nu_2$ ist, so wird

$$h(z) = \prod_{\substack{i=1,2,\cdots \nu_1 \\ k=1,2,\cdots \nu_2}} (z - x_i y_k).$$

Satz 2. *Besteht die Recursionsformel*

(6) $$P_{n+\nu} = a_1 P_{n+\nu-1} + a_2 P_{n+\nu-2} - \cdots + a_\nu P_n \quad (n = 1, 2, \cdots \infty),$$

so genügt die Unterdeterminante k^{ter} Ordnung

(7) $$\begin{vmatrix} P_{n+k-1}, & P_{n+k-2}, & \ldots, & P_n \\ P_{n+k-2}, & P_{n+k-3}, & \ldots, & P_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_n, & P_{n-1}, & \ldots, & P_{n-k+1} \end{vmatrix} = \pm |P_{n+g-h}| = P_{n,k} \quad (g, h = 1, 2, \ldots k)$$

einer Recursionsformel

(8) $$f_k(z) = 0,$$

deren Wurzeln die Producte der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung zu je k (verschiedenen) sind:

(8a) $$f_k(z) = \prod_{\substack{(i_1, i_2, \cdots i_k = 1, 2, \cdots \nu) \\ i_\lambda < i_\mu}} (z - z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_k}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots \nu).$$

Daraus folgt dann weiter sofort

(9) $$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}} = z_1 z_2 \ldots z_k,$$

falls $|z_k| > |z_{k+1}|$ ist.

Beweis. Aus

$$P_n = \sum_{i=1}^{i=\nu} C_i z_i^{n-1}$$

folgt

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = \sum_{\binom{g,h}{g<h}} C_{g,h}(z_g z_h)^{n-2},$$

woraus sofort die Richtigkeit des Satzes für $k = 2$ erhellt:

Die Unterdeterminanten 2ter Ordnung genügen der Recursionsformel

$$\prod_{\binom{g,h=1,2,\cdots\nu}{g<h}} (z - z_g z_h) = 0,$$

deren Wurzeln die Producte der Wurzeln von $f(z)=0$ zu je zweien sind.

Auch den allgemeinen Fall würden wir ähnlich beweisen können; doch ist der Beweis noch kürzer mit Hülfe des Determinanten-Satzes

$$\left|\begin{vmatrix} P_{n+k}, & \cdots, & P_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n+1}, & \cdots, & P_{n-k+2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} P_{n+k-1}, & \cdots, & P_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n, & \cdots, & P_{n-k+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} P_{n+k-1}, & \cdots, & P_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n, & \cdots, & P_{n-k+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} P_{n+k-2}, & \cdots, & P_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n-1}, & \cdots, & P_{n-k} \end{vmatrix}\right| = \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} P_{n+k}, & \cdots, & P_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n, & \cdots, & P_{n-k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{n+k-2}, & \cdots, & P_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n, & \cdots, & P_{n-k+2} \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{vmatrix} P_{n+1,k-1}, & P_{n,k-1} \\ P_{n,k-1}, & P_{n-1,k-1} \end{vmatrix} = P_{n,k}\,P_{n,k-2}, \tag{10}$$

durch den die Determinante k^{ter} Ordnung $P_{n,k}$ auf solche $(k-1)^{\text{ter}}$ und $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückgeführt wird. Mit Hülfe des soeben für $k = 2$ schon bewiesenen Satzes und der Umkehrung von 1b) folgt hieraus, dass Satz 2) für allgemeines k gilt, wenn er für $k-1$ und $k-2$ gilt. Nun ist er für $k = 1$ und $k = 2$ bewiesen. Also gilt er allgemein.

Sonach wird auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}} = z_1 z_2 \ldots z_k, \tag{9}$$

falls nicht

$$|z_k| = |z_{k+1}|$$

ist, und die Annäherung geschieht im Verhältniss $\frac{z_{k+1}}{z_k}$, falls

$$|z_{k+1}| > |z_{k+2}|$$

ist.

§ 4.

Die Art der Annäherung an den Grenzwerth.

Setzen wir

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{P_{n+1}}{P_n} = q_n^{(1)}, \quad q_{n+1}^{(1)} - q_n^{(1)} = \delta_n^{(1)},\\ &\frac{\delta_{n+1}^{(1)}}{\delta_n^{(1)}} = q_n^{(2)}, \quad q_{n+1}^{(2)} - q_n^{(2)} = \delta_n^{(2)},\\ &\frac{\delta_{n+1}^{(2)}}{\delta_n^{(2)}} = q_n^{(3)}, \quad q_{n+1}^{(3)} - q_n^{(3)} = \delta_n^{(3)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so wollen wir zeigen, dass die δ_n mit wachsendem n im Allgemeinen gegen 0 abnehmen, die q_n aber sich festen Grenzwerthen nähern.

Oben fanden wir schon

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} q_n^{(1)} = z_1, \quad \lim q_n^{(2)} = \frac{z_2}{z_1},$$

wenn

$$|z_1| > |z_2| > |z_3|$$

ist.

Die Bestimmung von $q_n^{(3)}$ wird schon complicirter. Aus

$$(3)\qquad q_n^{(2)} = \frac{P_{n+2}P_n - P_{n+1}^2}{P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2}\frac{P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{P_{n+1,2}}{P_{n,2}}\frac{P_{n-1}}{P_{n+1}}$$

folgt

$$q_n^{(3)} = \frac{\dfrac{P_{n+2,2}}{P_{n+1,2}}\dfrac{P_n}{P_{n+2}} - \dfrac{P_{n+1,2}}{P_{n,2}}\dfrac{P_{n-1}}{P_{n+1}}}{\dfrac{P_{n+1,2}}{P_{n,2}}\dfrac{P_{n-1}}{P_{n+1}} - \dfrac{P_{n,2}}{P_{n-1,2}}\dfrac{P_{n-2}}{P_n}}.$$

Es fragt sich, gegen welchen Grenzwerth dieser Ausdruck convergirt. Der Quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ nähert sich dem Werthe z_1 im Verhältniss $\frac{z_2}{z_1}$ (d. h. so, dass die Abweichungen im Verhältniss $\frac{z_2}{z_1}$ abnehmen), der Quotient $\frac{P_{n+1,2}}{P_{n,2}}$ dem Werthe $z_1 z_2$ im Verhältniss $\frac{z_3}{z_2}$ ($|z_3| > |z_4|$). Ist nun

$$\text{a)}\quad \left|\frac{z_2}{z_1}\right| > \left|\frac{z_3}{z_2}\right|,$$

so wird die letztere Annäherung schneller vor sich gehen; man wird bei wachsendem n

$$\frac{P_{n+2,2}}{P_{n+1,2}} = \frac{P_{n+1,2}}{P_{n,2}} = \frac{P_{n,2}}{P_{n-1,2}}$$

setzen können und erhält dann

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} q_n^{(3)} = \lim_{n=\infty} \frac{P_n P_{n+1} - P_{n-1} P_{n+2}}{P_{n-1} P_n - P_{n-2} P_{n+1}} \frac{P_n}{P_{n+2}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

$$\text{b)} \quad \left|\frac{z_2}{z_1}\right| < \left|\frac{z_3}{z_2}\right|,$$

so wird umgekehrt die erstere Annäherung schneller vor sich gehen, also

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} q_n^{(3)} = \lim_{n=\infty} \left(\frac{P_{n+2,2}}{P_{n+1,2}} - \frac{P_{n+1,2}}{P_{n,2}}\right) : \left(\frac{P_{n+1,2}}{P_{n,2}} - \frac{P_{n,2}}{P_{n-1,2}}\right) = \frac{z_3}{z_2}$$

werden.

D. h. Die Annäherung des 2ten Quotienten $q_n^{(2)}$ an den Grenzwerth $\frac{z_2}{z_1}$ erfolgt im Verhältniss $\frac{z_2}{z_1}$ oder $\frac{z_3}{z_2}$, und zwar immer im langsameren, d. h. grösseren. —

Der Grenzfall

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \left|\frac{z_3}{z_2}\right|$$

ist noch besonders zu behandeln.

Nun wird

$$q_n^{(3)} = \frac{(z_1 z_2 + \varepsilon_n')(z_1 + \varepsilon_{n-1}) - (z_1 z_2 + \varepsilon_{n-1}')(z_1 + \varepsilon_{n+1})}{(z_1 z_2 + \varepsilon_{n-1}')(z_1 + \varepsilon_{n-2}) - (z_1 z_2 + \varepsilon_{n-2}')(z_1 + \varepsilon_n)}$$

$$= \frac{\varepsilon_n' - \varepsilon_{n-1}' + z_2(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n+1})}{\varepsilon_{n-1}' - \varepsilon_{n-2}' + z_2(\varepsilon_{n-2} - \varepsilon_n)},$$

wenn

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = z_1 + \varepsilon_n, \qquad \frac{P_{n+1,2}}{P_{n,2}} = z_1 z_2 + \varepsilon_{n-1}'$$

gesetzt wird und kleine Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden. Ferner ist aber

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n'}{\varepsilon_{n-1}'} = \frac{z_3}{z_2}, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Sonach

$$q_n^{(3)} = \frac{\frac{z_3}{z_2}\left(\frac{z_3}{z_2} - 1\right)\varepsilon_{n-2}' + z_2 \frac{z_2}{z_1}\left(1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right)\varepsilon_{n-2}}{\left(\frac{z_3}{z_2} - 1\right)\varepsilon_{n-2}' + z_2\left(1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right)\varepsilon_{n-2}}.$$

Wir wollen nun die beiden Specialfälle

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2}, \qquad \frac{z_2}{z_1} = -\frac{z_3}{z_2}$$

vorwegnehmen, weil sie bei reellen Coefficienten allein auftreten können. [Ist nämlich

$$|z_1| > |z_2| > |z_3| > |z_4|,$$

so müssen in jenem Falle z_1, z_2, z_3 reell sein].

Für $\frac{z_2}{z_1} = +\frac{z_3}{z_2}$ wird $\lim_{n=\infty} q_n^{(3)} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2}$,

$\frac{z_2}{z_1} = -\frac{z_3}{z_2}$ wird $\lim_{n=\infty} q_n^{(3)} q_{n+1}^{(3)} = \lim_{n=\infty} \frac{\delta_{n+2}^{(2)}}{\delta_n^{(2)}} = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 = \left(\frac{z_3}{z_2}\right)^2$.

Ist hingegen

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \left|\frac{z_3}{z_2}\right|,$$

ohne dass

$$\frac{z_2^2}{z_1^2} = \frac{z_3^2}{z_2^2}$$

ist, so nähert sich $q_n^{(3)}$ keinem Grenzwerthe.

So verschiedenartige Fälle treten z. B. schon bei Gleichungen 3ten Grades auf, wie wir später noch an einigen Beispielen sehen werden.

Wir könnten nun ebenso wie $q_n^{(3)}$ auch die folgenden Quotienten untersuchen; da jedoch aus der Art der Ueberlegung an sich klar ist, dass die Trennung in verschiedene Unterfälle sich mehr und mehr steigert, so führen wir nur noch das Resultat für $q_n^{(4)}$, wie es eine Discussion der vereinfachten Ausdrücke für $q_n^{(3)}$ ergiebt, an:

$$\lim q_n^{(1)} = z_1, \quad \lim q_n^{(2)} = \frac{z_2}{z_1},$$

(6)
$$\begin{aligned}
&\text{a)} \ \left|\frac{z_2}{z_1}\right| > \left|\frac{z_3}{z_2}\right|, \quad \lim q_n^{(3)} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \lim q_n^{(4)} = \frac{z_2}{z_1},\\
&\text{b)} \ \left|\frac{z_2}{z_1}\right| < \left|\frac{z_3}{z_2}\right|, \quad \lim q_n^{(3)} = \frac{z_3}{z_2},\\
&\qquad \alpha) \ \left|\frac{z_3}{z_2}\right| > \left|\frac{z_4}{z_3}\right|, \quad \lim q_n^{(4)} = \frac{z_3}{z_2},\\
&\qquad \beta) \ \left|\frac{z_3}{z_2}\right| < \left|\frac{z_4}{z_3}\right|, \quad \lim q_n^{(4)} = \frac{z_4}{z_3}.
\end{aligned}$$

Es lässt sich dieses Schema dann leicht erweitern:

$$\lim q_n^{(1)} = z_1, \quad \lim q_n^{(2)} = \frac{z_2}{z_1},$$

(7)
$$\begin{aligned}
&\text{a)} \ \left|\frac{z_2}{z_1}\right| > \left|\frac{z_3}{z_2}\right|, \quad \lim q_n^{(k)} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (k = 3, 4, \ldots)\\
&\text{b)} \ \left|\frac{z_2}{z_1}\right| < \left|\frac{z_3}{z_2}\right|, \quad \lim q_n^{(3)} = \frac{z_3}{z_2},\\
&\qquad \alpha) \ \left|\frac{z_3}{z_2}\right| > \left|\frac{z_4}{z_3}\right|, \quad \lim q_n^{(k)} = \frac{z_3}{z_2}, \quad (k = 4, 5, \ldots)\\
&\qquad \beta) \ \left|\frac{z_3}{z_2}\right| < \left|\frac{z_4}{z_3}\right|, \quad \lim q_n^{(4)} = \frac{z_4}{z_3},\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Doch gilt dasselbe nur unter gewissen Beschränkungen, die theils die Irreducibilität der Gleichung $f(z) = 0$, theils die Wurzeln

selbst betreffen. Wird nämlich die vorgelegte Gleichung reducibel, so kann z. B.

$$\lim_{n=\infty} q_n^{(1)} = z_1,$$

aber

$$\lim_{n=\infty} q_n^{(2)} = \frac{z_2}{z_1}$$

werden; nach dem Früheren genügen dann die P_n schon einem rationalen Factor von $f(z) = 0$, welcher die Wurzel z_2 nicht enthält.

Zum Schluss dieser allgemeinen Betrachtungen wollen wir noch einige Folgerungen für den Specialfall von lauter reellen Coefficienten a_k ziehen, bei dem wir uns etwaige gleiche oder entgegengesetzt gleiche Wurzeln beseitigt denken. Die Annäherung der verschiedenen Quotienten an ihre Grenzwerthe geschieht dann bei lauter reellen Wurzeln in geometrischer Progression und ist um so schneller, je verschiedenere absolute Beträge die Wurzeln haben.

Treten hingegen imaginäre Wurzeln auf, so findet eine durchgängige Convergenz gegen Grenzwerthe nicht mehr statt. Ist z. B. z_1 imaginär, so nähert sich $q_n^{(1)}$ nicht einem Grenzwerthe, da z_2 dann denselben absoluten Betrag hat. Dagegen wird

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+2} P_n - P_{n+1}^2}{P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2} = z_1 z_2$$

sein.

Ist aber z_1 reell und z_2 imaginär, so wird zwar

$$\lim_{n=\infty} q_n^{(1)} = z_1$$

sein, aber die Annäherung wird nicht mehr in geometrischer Progression stattfinden.

Es ergiebt sich hier also ein Zusammenhang zwischen den auf rationale Weise gebildeten Grössen P_n und den Realitätsverhältnissen der Wurzeln der algebraischen Gleichung, indem die Bedingungen der Convergenz gewisser Reihen von diesen Realitätsverhältnissen abhängen. So convergirt z. B. für $\nu = 2$ der Kettenbruch

$$a + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \cdots$$

für $\frac{a^2}{4} > b$. Sind allgemein $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ die ν ihrem absoluten Betrage nach geordneten Wurzeln von $f(z) = 0$ und $z_1, z_2, \ldots z_{\mu-1}$ reell, z_μ hingegen imaginär, so wird

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, \mu - 1$$

einen Sinn haben, hingegen nicht mehr für $k = \mu$. — Umgekehrt lässt sich daraus der Schluss ziehen:

Nähern sich die Werthe des Quotienten $\frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}}$ mit wachsendem n einem Grenzwerth für $k = 1, 2, \ldots, \mu - 1$, dagegen nicht für $k = \mu$, so sind die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_{\mu-1}$ reell, dagegen sind z_μ und $z_{\mu+1}$ conjugirt imaginär. Daher muss dann wieder für $k = \mu + 1$ ein Grenzwerth existiren.

Dieser Satz bietet ein Mittel, die Anzahl der reellen und imaginären Wurzeln einer vorgelegten Gleichung zu bestimmen. Denn es folgt sofort der

Satz: *Nähern sich von den Quotienten* $\frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}}$ *mit wachsendem* n *keinem Grenzwerth die für*

$$k = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l,$$

so existiren l *Paare conjugirt complexer Wurzeln, und dieselben sind*

$$z_{\mu_1}, z_{\mu_1+1}; \; z_{\mu_2}, z_{\mu_2+1}; \; \ldots; \; z_{\mu_l}, z_{\mu_l+1},$$

wenn die Wurzeln so geordnet sind, dass

$$|z_g| \geq |z_h| \quad \text{für} \quad g > h.$$

Alle übrigen $v - 2l$ *Wurzeln sind reell.*

Wenngleich sich nun strenge die Existenz eines solchen Grenzwerthes nicht anders feststellen lässt, als eben dadurch, dass die betreffende Wurzel reell ist, so wird es doch in jedem Falle leicht zu erkennen sein. Daher wird sich die Bestimmung der Anzahl der reellen und der imaginären Wurzeln einer Gleichung nach diesem Satze [oder nach dem analogen aus der unten zu besprechenden Gräffe'schen Methode folgenden Satze] häufig einfacher bewerkstelligen lassen, als nach dem Sturm'schen Satze, der sonst denselben Zweck verfolgt, zumal hier nicht nur die Anzahl, sondern auch die Lage der imaginären Wurzeln, wenn sämmtliche Wurzeln ihrem absoluten Betrage nach geordnet werden, sich ergiebt.

Durch das Bisherige sind die Fragen, unter welchen Umständen der Quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ der durch die Recursionsformel

$$P_{n+v} = a_1 P_{n+v-1} + a_2 P_{n+v-2} + \cdots + a_v P_n \quad (n = 1, 2, \cdots, \infty)$$

gebildeten Grössen P_n, sowie ihrer Unterdeterminanten gegen einen Grenzwerth convergirt, welches diese Grenzwerthe sind, und in welcher Weise die Convergenz vor sich geht, erledigt und der Zusammenhang mit den Wurzeln der Gleichung

$$f(z) = z^v - a_1 z^{v-1} - a_2 z^{v-2} - \cdots - a_v = 0$$

hergestellt.

Cap. 2.

Anwendung auf die numerische Bestimmung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Die im ersten Capitel abgeleiteten Eigenschaften der P_n sollen hier dazu dienen, *sämmtliche Wurzeln einer beliebig vorgelegten, algebraischen Gleichung mit reellen oder imaginären Coefficienten auf rationalem Wege mit beliebig grosser Annäherung zu bestimmen*, und zwar soll zunächst nachgewiesen werden, dass die Bernoulli'sche Methode [wir wollen ihr hier diesen Namen geben, weil wenigstens die erste Idee derselben von Daniel Bernoulli herrührt] dieses in jedem Falle ermöglicht.

§ 1.

Bestimmung sämmtlicher Wurzeln durch die Methode von Bernoulli.

Es sei eine algebraische Gleichung

$$f(z) = z^\nu - a_1 z^{\nu-1} - \cdots - a_\nu = 0 \tag{1}$$

vorgelegt, in der wir uns etwaige gleiche oder entgegengesetzt gleiche Wurzeln beseitigt denken. Würden wir eine angenäherte Kenntniss der Wurzeln voraussetzen, so könnten wir stets durch die Substitution

$$z = z' - \zeta$$

jede Wurzel zur absolut grössten machen und sonach allein durch die Bildung der Quotienten $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ jede Wurzel mit beliebig grosser Annäherung auf rationale Weise ermitteln. Abgesehen jedoch davon, dass dieses für den allgemeineren Fall variabler Coefficienten, der im zweiten Theile behandelt wird, nicht angeht, ist es gerade ein Hauptvorzug der Bernoulli'schen Methode, ohne irgend welche Kenntniss der Wurzeln ihre Bestimmung zu geben.

Hingegen können wir von vornherein annehmen, dass nicht zwei Wurzeln der vorgelegten Gleichung denselben absoluten Betrag haben; denn wenn dieses doch der Fall wäre, so könnten wir *diesen* besonderen Fall durch jene Substitution

$$z = z' - \zeta$$

leicht beseitigen, wobei nun ζ irgend eine dem Rationalitätsbereich angehörige reelle oder complexe Grösse bezeichnet. Wir brauchen hierbei von den Wurzeln selbst nichts zu wissen; nur muss ζ so gewählt werden, dass jetzt *nicht* zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben; dies würde allerdings die Möglichkeit der Entscheidung voraussetzen, ob zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben. Da aber,

wie leicht zu übersehen, nur für eine einfache Mannigfaltigkeit von Werthen ζ aus der zweifachen, aus der ζ gewählt werden kann, dieser Fall eintreten würde, wollen wir ζ zweckentsprechend gewählt ansehen. Dann finden wir

$$z_1 = \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} \tag{2}$$

nur durch Bildung dieses Quotienten. Ebenso wie z_1, die absolut grösste Wurzel, lässt sich auch die absolut kleinste, z_ν, bestimmen, wenn man $z = \frac{1}{y}$ setzt, da für die transformirte Gleichung $y_\nu = \frac{1}{z_\nu}$ die absolut grösste Wurzel ist.

In anderer Art folgt dieses auch so:

Wir entwickeln den Quotienten $\frac{g(z)}{f(z)}$ nach *steigenden* Potenzen von z

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{g(z_i)}{(z - z_i) f'(z_i)} = \sum_{1}^{\nu} \frac{g(z_i)}{z_i f'(z_i)} \frac{-1}{1 - \frac{z}{z_i}}$$

$$= -\sum_{n=1}^{n=\infty} z^{n-1} \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{g(z_i)}{z_i^n f'(z_i)}.$$

Setzen wir also

$$\frac{g(z)}{f(z)} = -\sum_{n=1}^{n=\infty} P_n' z^{n-1}, \tag{3}$$

so wird

$$P_n' = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{g(z_i)}{z_i^n f'(z_i)} = C_1 z_1^{-n} + C_2 z_2^{-n} + \cdots + C_\nu z_\nu^{-n} \tag{4}$$

$$(n = 1, 2, \cdots \infty)$$

und

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_n'}{P_{n+1}'} = z_\nu, \tag{5}$$

wobei die P_n' der durch $z = \frac{1}{y}$ transformirten Recursionsformel der P_n genügen.

Anmerkung. Wir können hier kurz zeigen, dass die von Schröder (Math. Ann. Bd. 2) eingeführten Functionen $C_\infty^{(\lambda)}(\zeta)$ nichts anderes sind als diese Functionen P_n', wenn in diese durch

$$z = z' + \zeta$$

ein willkürlicher Parameter ζ eingeführt wird. Dort ist nämlich

$$C_n^{(\lambda)}(\zeta) = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{z_i^\lambda \chi(z_i)}{(z_i - \zeta)^{n+1}}.$$

Setzen wir nun in die obige Entwicklung

$$\frac{g(z)}{f(z)} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} z^n \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{g(z_i)}{z_i^{n+1} f'(z_i)} = -\sum_{0}^{\infty} P'_{n+1}\, z^n$$

$z + \zeta$ für z, so folgt

$$\frac{g(z+\zeta)}{f(z+\zeta)} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} z^n \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{g(z_i)}{(z_i-\zeta)^{n+1} f'(z_i)}.$$

Unsere Grössen P'_{n+1} sind also für

$$\chi(z) = \frac{g(z)}{f'(z)} z^{-\lambda},$$

worin, da $g(z)$ beliebig ist, keine Beschränkung für $\chi(z)$ liegt, direct identisch mit jenen symmetrischen Functionen $C_n^{(\lambda)}(\zeta)$. — Nun ist es klar, dass je nach der Wahl von ζ der Quotient $\frac{C^{(\lambda+1)}}{C^{(\lambda)}}$, die eine oder die andere Wurzel der vorgelegten Gleichung liefert, sowie dass es nur gewisse Ausnahmelinien für ζ giebt, für welche die Convergenz aufhört, wenn nämlich durch die Transformation

$$z = z' + \zeta$$

zwei Wurzeln denselben kleinsten absoluten Betrag erhalten, d. h. wenn ζ von zwei Wurzeln gleich weit entfernt und ihnen näher als jeder andern Wurzel ist.

Sonach ist dieser Theil der Schröder'schen Entwicklungen (S. 333—349) nur eine andere Darstellung der Bernoulli'schen Methode. —

Zur Bestimmung der andern Wurzeln dient der Satz über die aus den P_n gebildeten Unterdeterminanten. Es war

$$(6)\quad \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}} = z_1 z_2 \ldots z_k; \quad \text{d. h.} \quad z_k = \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}} \cdot \frac{P_{n,k-1}}{P_{n+1,k-1}}.$$
$$(k = 1, 2, \ldots \nu)$$

Hierdurch ist die Möglichkeit gegeben, auf rationale Weise alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung zu bestimmen.

Wir wollen jetzt jedoch noch zeigen, dass man auch, ohne irgendwie von der Transformation $z = z' - \zeta$ Gebrauch zu machen, doch sämmtliche Wurzeln mit Hülfe der P_n, allerdings nicht mehr rational, bestimmen kann, auf eine von Jacobi*) angegebene Weise, der sich dabei im Wesentlichen auf Andeutungen Fouriers stützt.

Wir fanden oben

$$(7)\quad P_n = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \cdots + C_\nu z_\nu^n.$$

*) Crelle's Journal Bd. 13, S. 349.

Dadurch dass Bernoulli für grosses n

$$P_n = C_1 z_1^n$$

setzt, indem er alle übrigen Glieder vernachlässigt, werden die P_n als die Glieder einer gewöhnlichen geometrischen Reihe angesehen, da dann

$$P_{n+1} = z_1 P_n$$

ist. Da ferner der Exponent dieser geometrischen Reihe die absolut grösste Wurzel z_1 der Gleichung ist, gelingt es, z_1 aus P_n und P_{n+1} näherungsweise zu bestimmen. Vernachlässigen wir nun nicht alle auf das erste Glied folgenden Glieder, sondern nehmen die ersten k Glieder zusammen, sehen wir also, wie Jacobi es ausdrückt, die P_n für grosse Werthe von n als die Elemente einer geometrischen Reihe höherer, nämlich k^{ter} Ordnung an, so werden wir erstens eine grössere Genauigkeit erlangen und zweitens die Fälle, in denen jene erste Vernachlässigung unstatthaft ist [, wenn etwa die ersten k Wurzeln denselben absoluten Betrag haben,] mit behandeln können. Dadurch gelingt es, gleichzeitig jene k Wurzeln aus den P_n zu bestimmen, indem nämlich, wie sich oben z_1 aus einer linearen Gleichung bestimmen liess, jetzt die k grössten Wurzeln als die Wurzeln einer Gleichung k^{ter} Ordnung auftreten werden, deren Coefficienten ganze, rationale Functionen der P_n sind. Setzen wir zu dem Zwecke

$$P_{n+1} = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \cdots + C_k z_k^n \tag{8}$$

und

$$\prod_{i=1}^{i=k} (z - z_i) = f_k(z) = z^k - A_1 z^{k-1} - \cdots - A_k, \tag{9}$$

so werden die P_n schon der Recursionsformel $f_k(z) = 0$ näherungsweise genügen, wie oben näherungsweise

$$P_{n+1} - z_1 P_n = 0$$

war. Eliminiren wir nun die unbekannten Grössen $A_1, A_2, \ldots A_k$ aus dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
z^k - A_1 z^{k-1} &- \cdots - A_k &&= 0,\\
P_{n+k} - A_1 P_{n+k-1} &- \cdots - A_k P_n &&= 0,\\
P_{n+k+1} - A_1 P_{n+k} &- \cdots - A_k P_{n+1} &&= 0,\\
\cdots\cdots\cdots

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} z^k, & z^{k-1}, & \ldots, & 1 \\ P_{n+k}, & P_{n+k-1}, & \ldots, & P_n \\ P_{n+k+1}, & P_{n+k}, & \ldots, & P_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n+2k-1}, & P_{n+2k-2}, & \ldots, & P_{n+k-1} \end{vmatrix} = 0$$

näherungsweise die k absolutgrössten Wurzeln von $f(z) = 0$. [Beiläufig folgt hieraus ein einfacher Beweis unseres früheren Satzes

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}} = z_1 z_2 \cdots z_k].$$

Dieses gilt nun zwar allgemein, auch wenn $z_1, z_2, \ldots z_k$ verschiedene, absolute Beträge haben; doch wird dann die Berechnung unnöthig complicirt. Der Vortheil dieser Jacobi'schen Entwicklung wird gerade der sein, dass sie, wenn

$$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_k| > |z_{k+1}|$$

ist, die Bestimmung von $z_1, z_2, \ldots z_k$ nur von einer Gleichung k^{ter} Ordnung abhängig macht. Ist z. B. $k = 2$, haben also z_1 und z_2 denselben absoluten Betrag, so lautet die quadratische Gleichung, welcher z_1 und z_2 näherungsweise genügen

$$(11)\qquad z^2 (P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2) - z (P_{n+2} P_{n-1} - P_{n+1} P_n) + (P_{n+2} P_n - P_{n+1}^2) = 0.$$

Diese Gleichung hat auch schon Euler für die Bestimmung der imaginären Wurzeln einer Gleichung abgeleitet, jedoch auf anderem Wege, und nur für den Fall reeller Coefficienten.

Diesen in der Theorie der algebraischen Gleichungen gewöhnlich nur behandelten Fall einer Gleichung mit reellen, sonst beliebigen Zahlencoefficienten wollen wir jetzt noch kurz erörtern, da er allein in Anwendungen vorkommt.

Sind in diesem Falle alle Wurzeln reell, so wird einfach

$$(12)\qquad z_k = \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}} \frac{P_{n,k-1}}{P_{n+1,k-1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu).$$

Wenn jedoch mehrere Wurzeln denselben absoluten Betrag haben, so würden durch die Substitution

$$z = z' - \xi$$

imaginäre Coefficienten eingeführt werden, was vermieden werden soll. Sind nun z. B. z_1 und z_2 conjugirt complex

$$z_1 = re^{\varphi i}, \quad z_2 = re^{-\varphi i},$$

so wird, wie bisher

$$(13)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+2} P_n - P_{n+1}^2}{P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2} = z_1 z_2 = r^2$$

werden, wodurch r schon bestimmt ist. Um φ zu bestimmen, setzt Euler

$$\lim_{n=\infty} P_n = C_1 z_1^{n-1} + C_2 z_2^{n-1}$$
$$= r^{n-1}[A \cos(n-1)\varphi + B \sin(n-1)\varphi].$$

Durch Elimination der unbekannten Grössen A und B aus mehreren solchen Gleichungen folgt leicht

$$2\cos\varphi = \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+2} + r^2 P_n}{r P_{n+1}} \tag{14}$$
$$= \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1} P_n - P_{n+2} P_{n-1}}{\sqrt{(P_{n+2} P_n - P_{n+1}^2)\,(P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2)}},$$

was ebenso aus der quadratischen Gleichung (11), die wir soeben für z_1 und z_2 aufgestellt haben, sich ergiebt.

Sind zwei andere als die absolut grössten Wurzeln conjugirt complex, etwa

$$|z_\mu| = |z_{\mu+1}|,$$

so bestimmen wir

$$z_1, z_2, \ldots z_{\mu-1}$$

wie bisher. Aus der Reihe der $P_{n,\mu}$ (für welche jetzt nicht

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1,\mu}}{P_{n,\mu}} = z_1 z_2 \cdots z_\mu$$

ist) bestimmen wir dann nach Euler's Methode die Producte

$$(z_1 z_2 \ldots z_{\mu-1})\, z_\mu \quad \text{und} \quad (z_1 z_2 \ldots z_{\mu-1})\, z_{\mu+1},$$

wodurch dann z_μ und $z_{\mu+1}$ selbst bestimmt sind.

Nur wenn mehrere Paare complexer Wurzeln von gleichem absoluten Betrage auftreten, wird diese Berechnung nicht möglich sein; auch wird es dann praktischer sein, nicht die Jacobi'sche Methode zu verfolgen, sondern auf den Vortheil der reellen Coefficienten zu verzichten und $z = z' - \xi$ zu setzen.

Wir können übrigens noch in einer andern Weise mit Benutzung eines Satzes von König*) die imaginären Wurzeln bestimmen, wenn wir die P_n als die Potenzsummen der Wurzeln annehmen, also $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ speciell so wählen, dass

$$P_n = a_1 P_{n-1} + a_2 P_{n-2} + \cdots + a_{n-1} P_1 + a_n n$$
$$(n = 1, 2, \ldots \nu)$$

wird. Ist dann wieder

$$z_1 = r e^{\varphi i}, \quad z_2 = r e^{-\varphi i},$$

so wird

$$\lim_{n=\infty} P_n = 2 r^n \cos n\varphi.$$

*) Math. Annalen, Bd. 9. S. 530—540.

Da sich r^2 nach (13) bestimmt

$$r^2 = \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+2} P_n - P_{n+1}^2}{P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2},$$

so wird

$$\cos n\varphi = \frac{P_n}{2r^n}, \tag{15}$$

und es handelt sich nur darum, φ aus $\cos n\varphi$ eindeutig zu bestimmen, während es zunächst n-deutig bestimmt ist. Wir kennen aber auch

$$P_{n-1},\ P_{n-2},\ \ldots,\quad \text{also}\quad \cos(n-1)\varphi,\ \cos(n-2)\varphi\ \ldots$$

und mit ihrer Benutzung wird die Bestimmung von φ eindeutig. Am einfachsten dürfte dies mit Hülfe des Satzes von König werden, den wir hier nur zweckmässig umformen. Wir können stets annehmen, dass $0 < \varphi < \pi$ sei.

Ist dann

$$\begin{array}{llll}
1, & \cos\varphi, & \cos 2\varphi, \ldots, \cos(l_1-1)\varphi & + \\
\cos l_1\varphi, & \cos(l_1+1)\varphi, & \ldots, \cos(l_2-1)\varphi & - \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cos l_{k-1}\varphi, & \cos(l_{k-1}+1)\varphi, & \ldots, \cos(l_k-1)\varphi & (-1)^{k-1} \\
\cos l_k\varphi = \cos n\varphi, & & & (-1)^k,
\end{array}$$

was das Vorzeichen betrifft, so folgt

$$\begin{array}{llll}
(l_1-1)\varphi < & \frac{\pi}{2}, & l_1\varphi > & \frac{\pi}{2}, \\
(l_2-1)\varphi < & \frac{3\pi}{2}, & l_2\varphi > & \frac{3\pi}{2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(l_k-1)\varphi < & \frac{2k-1}{2}\pi, & l_k\varphi > & \frac{2k-1}{2}\pi.
\end{array}$$

Dabei können wir k als die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe

$$\cos\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \ldots,\ \cos n\varphi \tag{1}$$

ansehen; wir bezeichnen sie mit w_n.

Daraus folgt

$$\frac{2w_n-1}{2}\pi < n\varphi < \frac{2w_n-1}{2}\pi + \varphi. \tag{16}$$

Da hierdurch φ in ein Intervall von der Grösse $\frac{\varphi}{n}$ eingeschlossen ist, welche mit wachsendem n gegen Null abnimmt, so folgt hieraus die Formel von König

$$\frac{\varphi}{\pi} = \lim_{n=\infty} \frac{w_n}{n}.$$

Wir wollen indessen von diesem interessanten Resultate, das kaum eine practische Anwendung zulassen dürfte, nur insoweit Gebrauch machen, als wir aus (16) den Schluss ziehen, dass $n\varphi$ *allein* durch die Vorzeichenreihe von

$$1, \cos\varphi, \ldots, \cos n\varphi$$

in ein Intervall von der Grösse φ eingeschlossen ist. Kennen wir nun noch den Werth von $\cos n\varphi$, so ist hierdurch $n\varphi$, also φ, ein- oder höchstens zweideutig bestimmt. Es ist dann aber leicht zu sehen, dass die Hinzunahme des Werthes von $\cos(n-1)\varphi$ φ eindeutig bestimmt.

Sonach können wir sagen: *Brechen wir die Reihe*

$$1, \cos\varphi, \cos 2\varphi, \ldots, \cos(n-1)\varphi, \cos n\varphi,$$

mit einem Zeichenwechsel ab, so ist φ durch den Werth von $\cos n\varphi$ und die Vorzeichen der übrigen Glieder ein- oder zweideutig bestimmt. Im letzteren Falle wird es sicher durch den Werth von $\cos(n-1)\varphi$ eindeutig bestimmt.

Wenngleich wir nun auch durch P_n nicht den genauen Werth von $2r^n \cos n\varphi$ finden, so wird doch φ stets sehr schnell und mit Sicherheit sich bestimmen lassen, wie ein späteres Beispiel zeigen wird, sodass diese Methode vielleicht noch schneller als die Euler'sche zu der Bestimmung der imaginären Wurzeln führt.

Wir gehen nunmehr zur praktischen Anwendung des Bisherigen über.

§ 2.

Anwendung der Methode; Beispiele.

Nachdem in dem vorigen Paragraphen gezeigt wurde, wie es in jedem besonderen Falle möglich ist, sämmtliche Wurzeln einer vorgelegten, numerischen Gleichung mit reellen Zahlencoefficienten mit Hülfe der Bernoulli'schen Methode näherungsweise zu bestimmen, wollen wir hier noch einige praktische Vorschriften geben, welche dieselbe befähigen, die an eine brauchbare Methode zu stellenden Anforderungen der Schnelligkeit in der Erzielung der verlangten Genauigkeit und Einfachheit der nothwendigen Rechenoperationen zu erfüllen, und die theilweise schon Euler gegeben hat:

1) Da die Wahl der $P_1, P_2, \ldots, P_r$ beliebig ist, können wir sie von vornherein so wählen, dass sie ungefähr im Verhältniss von z_1, falls dies näherungsweise bekannt ist, zunehmen.
2) Da die Annäherung an z_1 im Verhältniss $\frac{z_2}{z_1}$ geschieht, ist es praktisch, dieses Verhältniss möglichst klein zu wählen,

ferner aber auch negativ, da dann die Abweichungen vom wahren Werthe wechselndes Vorzeichen haben, also ein Herumpendeln um den wahren Werth derart eintritt, dass z_1 zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quotienten liegt, und man einen Massstab für die erlangte Genauigkeit hat. Beides kann man durch lineare Transformation erreichen. Ist z. B. a ein Näherungswerth von z_1, und setzt man $z = a + \frac{1}{y}$, so wird y_1 sehr gross im Verhältniss zu den andern Wurzeln werden. — Auch kann man noch bemerken, dass die Bestimmung von z_2, ja auch häufig von z_3, einfacher aus den Quotienten $q_n^{(2)}$, $q_n^{(3)}$, ... als durch die Quotienten der Unterdeterminanten werden wird, wie es einige Beispiele zeigen werden.

3) Endlich kann man auch durch Anbringung einer Correction, indem man die Reihe der P_n beliebig abbricht, einen Näherungswerth von z_1 finden, den man sonst erst durch bedeutend grösseres n erzielen würde. Da nämlich die Abweichungen in geometrischer Progression abnehmen, so folgt durch einfache Interpolation

$$z_1 = q_n^{(1)} + \frac{\delta_n^{(1)}}{1 + q_n^{(2)}} = q_n^{(1)} + \frac{\delta_n^{(1)}}{1 + \frac{z_2}{z_1}}.$$

Analog kann man auch den Werth von $\frac{z_2}{z_1}$ interpoliren, ähnlich bei den Gleichungen der Unterdeterminanten. Natürlich ist diese Interpolation nur möglich, wenn die in Betracht kommenden Wurzeln reell sind. —

Die Anwendung, welche Stern*) von der Bernoulli'schen Methode zur Bestimmung der Wurzeln transcendenter Gleichungen macht, übergehen wir hier, da sie auf einige, wenige Gleichungen beschränkt ist.

In gewisser Hinsicht wird allerdings der frühere Satz auch für transcendente Functionen bestehen bleiben. Ist nämlich a der absolut kleinste Werth, für den die in der Umgebung von $z = 0$ holomorphe Function $f(z)$ Null oder ∞ wird, und entwickeln wir

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n' z^n,$$

so wird der Quotient $\frac{P_n'}{P_{n+1}'}$ sich mit wachsendem n dem Werthe a

*) Crelle's Journal Bd. 22.

nähern,*) aber die recurrirende Berechnung der P_n, die im Obigen den Hauptvorzug bildete, geht hier verloren.

Um nun einen Massstab für die Genauigkeit, welche die Methode giebt, zu haben, wollen wir einige Beispiele durchrechnen und dann einen Vergleich mit andern, bekannten Methoden anstellen.

Für den Fall von lauter reellen Wurzeln wählen wir die beiden Gleichungen

$$z^3 - 10z - 10 = 0$$

und

$$z^3 - 7z - 7 = 0,$$

welche die beiden Hauptfälle für $q_n^{(3)}$

$$\left(\left|\frac{z_2}{z_1}\right| > \left|\frac{z_3}{z_2}\right|, \quad \left|\frac{z_2}{z_1}\right| < \left|\frac{z_3}{z_2}\right|\right)$$

darstellen.

Ueber die Bildung des Schema's der P_n ist zu bemerken, dass Potenzen von 10 (resp. 7) als Factoren von P_n fortgelassen sind; die Horizontalzeilen werden daher in kürzester Zeit nacheinander so gebildet, dass jede Zahl die Summe der direct und der rechts über ihr stehenden ist; die letzte Zahl jeder Zeile ist immer das zehnfache (resp. 7-fache) der Summe der ersten beiden Zahlen derselben Zeile. Die besondere Einfachheit der Berechnung beruht hier natürlich auf den speciellen Zahlen der Gleichungen.

Im zweiten Beispiele waren von vornherein die reciproken Quotienten $\frac{1}{q_n^{(2)}}$, $\frac{1}{q_n^{(3)}}$ gebildet, deren nachträgliche Umrechnung unnütze Mühe gemacht hätte. Ferner sind in den Differenzen eine Anzahl von Nullen, die direct auf das Komma folgen, wohl ohne Gefahr eines Missverständnisses, fortgelassen.

1) $z^3 = 10z + 10$ $\quad z_1 = 3{,}577\,089\,44$ $\quad \frac{z_2}{z_1} = -0{,}677\,540\,27$

$z_2 = -2{,}423\,622\,14$ $\quad \left|\frac{z_2}{z_1}\right| > \left|\frac{z_3}{z_2}\right|.$

$z_3 = -1{,}153\,467\,30$

Es muss sonach werden

$$\lim_{n=\infty} q_n^{(1)} = z_1,$$

$$\lim_{n=\infty} q_n^{(2)} = \frac{z_2}{z_1},$$

$$\lim_{n=\infty} q_n^{(3)} = \frac{z_2}{z_1},$$

---

*) Jablonski: Comptes Rend. Bd. 106, S. 19–21.

P_n			
2	7	25	90
9	32	115	410
41	147	525	1880
188	672	2405	8600
860	3077	11005	39370
3937	14082	50375	180190
18019	64457	230565	824760
82476	295022	1055325	3774980

$q_n^{(1)}$	$\delta_n^{(1)}$	$q_n^{(2)}$	$\delta_n^{(2)}$	$q_n^{(3)}$
$\frac{64457}{18019} = 3{,}577\,168\,544\,314\,335$				
	$-0{,}000\,132\,690\,954\,731$			
$3{,}577\,035\,853\,359\,604$		$-0{,}677\,536\,2714$	$+76668$	
	$+0{,}000\,089\,902\,934\,716$			$-0{,}7434$
$3{,}577\,125\,756\,294\,320$		$-0{,}677\,543\,9382$	-56993	
	$-0{,}000\,060\,913\,188\,447$			$-0{,}6354$
$3{,}577\,064\,843\,105\,873$		$-0{,}677\,538\,2389$	$+36214$	
	$+0{,}000\,041\,271\,014\,430$			
$3{,}577\,106\,114\,120\,303$		$-0{,}677\,541\,8603$		
	$-0{,}000\,027\,962\,839\,892$			
$3{,}577\,078\,151\,280\,411$				

Interpoliren wir am Schluss, so ergiebt sich

$$z_1 = 3{,}577\,106\,114 - \frac{0{,}000027963}{1 + 0{,}67754} = 3{,}577\,089\,44$$

(auf 8 Stellen richtig),

$$\frac{z_2}{z_1} = -0{,}677\,538\;24 - \frac{0{,}000003621}{1 + 0{,}6354} = -0{,}677\,540\,45$$

(18 Einh. der 8ten Decimale zu klein).

Aus Beidem

$$z_2 = -2{,}423\,622\,80.$$

---

2) $z^3 = 7z + 7$ $\quad z_1 = 3{,}048\,917\,34$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = -1{,}801\,937\,7$

$z_2 = -1{,}692\,021\,47$

$z_3 = -1{,}356\,895\,87$ $\quad \frac{z_2}{z_3} = +1{,}246\,979\,6$

$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| < \left|\frac{z_3}{z_2}\right|$

Sonach

$$\lim_{n=\infty} q_n^{(1)} = z_1,$$

$$\lim_{n=\infty} q_n^{(2)} = \frac{z_2}{z_1},$$

$$\lim_{n=\infty} q_n^{(3)} = \frac{z_3}{z_2},$$

P_n			
1	3	9	28
4	12	37	112
16	49	149	455
65	198	604	1841
263	802	2445	7455
1065	3247	9900	30184
4312	13147	40084	122213
17459	53231	162297	494830
70690	215528	657127	2003526
286218	872655	2660653	8112111

$q_n^{(1)} = \frac{P_{n+1}}{P_n}$	$\delta_n^{(1)}$	$-\frac{1}{q_n^{(2)}} = -\frac{\delta_n^{(1)}}{\delta_{n+1}^{(1)}}$	$\delta_n^{(2)}$	$\frac{1}{q_n^{(3)}}$
3,048 914 599 919 812				
3,048 918 863 068 513	− 0,000 004 263 148 701	1,798 443 723	0,000 697 355	
3,048 916 492 603 067	2 370 465 446	1,799 141 078	0,000 556 160	1,25387
3,048 917 810 157 023 6	1 317 553 957	1,799 697 238	0,000 445 848	1,24742
3,048 917 078 059 463 3	− 0,000 000 732 097 560 3	1,800 143 086	0,000 356 434	1,25086
3,048 917 484 748 001 5	406 688 538 2	1,800 499 520	0,000 285 687	1,24764
3,048 917 258 872 607 59	225 875 393 9	1,800 785 207	0,000 228 708	1,24913
3,048 917 384 304 221 03	125 431 613 44	1,801 013 915		
3,048 917 314 659 220 88	− 0,000 000 069 645 000 15			

Interpolirt man hier zum Schluss, so erhält man für z_1 10 richtige, für z_2 allerdings nur 5 richtige Stellen, was daran liegt, dass z_2 und z_3 nahezu gleich gross sind. — Würden wir $z = 3 + \frac{1}{y}$ setzen, wodurch die Gleichung in

$$y^3 = 20y^2 + 9y + 1$$

übergeht, so wird

$$P_n = 1,\ 20,\ 400;\ 8181,\ 167240,\ 3418829,$$

$$z_1 = 3 + \frac{167240}{3418829} = 3{,}048\,917\,334 \qquad \left(\begin{matrix}\text{6 Einheiten in der} \\ 9^{\text{ten}}\text{ Stelle zu klein}\end{matrix}\right).$$

Um auch noch den Fall imaginärer Wurzeln zu behandeln, wählen wir als drittes Beispiel

3) $z^3 + z - 1 = 0$, $\qquad z_3 = +\,0{,}682\,327\,81$

z_1, z_2 conjugirt complex.

Bilden wir hier die Potenzsummen der Wurzeln, so wird

$$P_n : 3,\ 0,\ -2,\ +3,\ +2,\ -5,\ +1,\ +7,\ -6,\ -6,\ +13,\ 0,\ -19,$$
$$+13,\ +19,\ -32,\ -6,\ +51,\ -26,\ -57,\ +77,\ +31,\ -134,\ +46$$

$$P_{24} = +46,$$

$$r^2 = \frac{31 \cdot 46 - 134^2}{-134 \cdot 77 - 31^2} = \frac{16530}{11279}, \quad r = 1{,}21060 \quad \left(\begin{matrix}1\text{ Einheit der }5^{\text{ten}}\text{ Stelle}\\ \text{zu klein}\end{matrix}\right).$$

Nach der Euler'schen Methode wird dann

$$\cos\varphi = \frac{-7696}{2\sqrt{16530 \cdot 11279}}, \qquad \varphi = 106^0\ 22'\ 7''.$$

Die andere Methode giebt zunächst

$$\cos 23\varphi = \frac{46}{2 \cdot r^{23}} = \frac{23}{r^{23}}.$$

Nun ist

$$w_{23} = 14$$

und sonach wird

$$\frac{27\pi}{46} < \varphi < \frac{27\pi}{44}$$

oder

$$27\pi < 46\varphi < 27\pi + \frac{27}{22}\pi,$$

$\log\cos 23\varphi = 9{,}4527014$,

$$23\varphi = 14\pi - 73^0\ 31'\ 30'' = 2446^0\ 29'\ 30'', \quad \varphi = 106^0\ 22'\ 5''.$$

Beide Werthe stimmen sonach sehr genau überein, der wahre Werth ist

$$\varphi = 106^0\ 22'\ 6'',2.$$

Fassen wir die hier gewonnenen, practischen Resultate zusammen, so können wir sagen: Die Bernoulli'sche Methode ist stets mit Erfolg anwendbar, wenn ihre Eigenthümlichkeiten in passender Weise verwerthet werden; insbesondere führt sie auch sehr schnell zur Bestimmung der imaginären Wurzeln.

§ 3.

Vergleichung mit einigen anderen Methoden.

Die verschiedenen Methoden der numerischen Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen können wir in zwei Classen zerlegen, je nachdem sie durch eine einzige Operation sämmtliche Wurzeln (aber auf verschiedene Art) oder jede Wurzel einzeln durch Wiederholung derselben Operation liefern. Zu der ersten Classe gehören die Bernoulli'sche und die Gräffe'sche Methode.

1) Das Princip der *Gräffe'schen Methode* ist es, die k^{ten} Potenzsummen s_k der Wurzeln zu bilden und unter Vernachlässigung kleinerer Terme

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[k]{s_k} = z_1$$

zu setzen; sie ist sonach unserer Bernoulli'schen Methode sehr nahe verwandt, ja, da die P_n im speciellen Fall in die Potenzsummen übergehen, eigentlich nur eine andere Benutzung derselben Idee. Oben fand sich nämlich näherungsweise

$$P_n = \frac{g(z_1)}{f'(z_1)} z_1^{n-1} = C_1 z_1^{n-1}.$$

Den unbekannten Factor C_1 können wir nun auf zwei Arten beseitigen; erstens durch Division zweier aufeinanderfolgender P_n:

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = z_1;$$

dann aber auch, indem wir

$$g(z) = f'(z)$$

setzen, wodurch

$$P_n = s_{n-1}, \quad \lim_{n=\infty} P_n = z_1^{n-1}, \quad z_1 = \sqrt[n-1]{P_n}$$

wird.

Dieses wäre nun kein besonderer Vortheil, wenn nicht die Potenzsummen s_k eine besonders bequeme Berechnung zuliessen. Statt die Recursionsformel

$$s_{n+\nu} = a_1 s_{n+\nu-1} + \cdots + a_\nu s_n$$

anzuwenden, bestimmt man direct s_{2k} aus s_k. Ist nämlich

$$f(z) = 0$$

die vorgelegte Gleichung, so setzt man

$$z = \sqrt{y}.$$

Die neue Gleichung laute in rationaler Form

$$f_2(y) = 0,$$

so genügen ihr die Quadrate der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung; geht man so weiter bis

$$f_{k+1}(u) = u^\nu - b_1 u^{\nu-1} - \cdots - b_\nu = 0 = \prod_{i=1}^{i=\nu} (u - u_i),$$

so ist

$$u_i = z_i^{2^k}$$

und sonach finden wir für die Coefficienten b_m

$$\left.\begin{aligned} \lim_{k=\infty} b_1 &= \pm z_1^{2^k} \\ \lim_{k=\infty} b_2 &= \pm (z_1 z_2)^{2^k} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \lim_{k=\infty} b_\nu &= \pm (z_1 z_2 \cdots z_\nu)^{2^k} \end{aligned}\right\}, \text{ falls alle Wurzeln reell sind.}$$

Die $b_2, b_3, \ldots, b_\nu$ sind also Analoga zu unsern Unterdeterminanten $P_{n,k}$. Die z_i selbst bestimmen sich dann durch Ausziehen von $2^{k\text{ten}}$ Wurzeln.

Die Bedingungen der Anwendbarkeit dieser Methode sind daher ähnlich, wie bei der Bernoulli'schen Methode. Ihr besonderer Vortheil ist der, dass sie mit einem Schlage sämmtliche Wurzeln liefert und auch durch einfaches Betrachten der b_n die Anzahl der reellen und der imaginären Wurzeln angiebt. Auch ist die Annäherung eine ungemein rasche, mehr als bei jeder andern Methode. Ihre Nachtheile, die ihren Gebrauch sehr einschränken, sind, dass man auf Logarithmenrechnung beim Ausziehen der $2^{k\text{ten}}$ Wurzel angewiesen ist und daher nur eine beschränkte Genauigkeit erlangen kann, sowie die Unförmlichkeit der auftretenden Zahlen, während die Bernouilli'sche Methode nur die Division zweier ganzen Zahlen erfordert.

Ausserdem tritt noch ein besonderer Uebelstand bei der Bestimmung imaginärer Wurzeln auf. Ist nämlich

$$z_1 = r e^{\varphi i}, \qquad z_2 = r e^{-\varphi i},$$

so wird

$$\lim b_1 = 2 r^{2^k} \cos 2^k \varphi, \quad \lim b_2 = r^{2^{k+1}}.$$

Aus der zweiten Gleichung bestimmt sich r, aus der ersten $\cos 2^k \varphi$, woraus aber eine eindeutige Bestimmung von φ unmöglich ist. Wenn Encke (Crelle's Journal Bd. 22, S. 193—248) dennoch nach dieser Methode auch die imaginären Wurzeln zu bestimmen versucht, so benutzt er die Gräffe'sche Methode doch nur zum kleinen Theil. Er entnimmt ihr nur den Werth von r und bestimmt φ, indem er die beiden Theile, in welche die algebraische Gleichung durch Zerlegung in ihren reellen und imaginären Theil zerfällt, in geeigneter Weise combinirt. Zur Bestimmung der imaginären Wurzeln dürfte daher nur die Bernoulli'sche Methode geeignet sein.

Als Beispiel wählen wir die oben behandelte Gleichung

$$z^3 - 7z - 7 = 0.$$

Dabei bilden wir die transformirten Gleichungen nach dem Schema

$$z^3 - a_1 z^2 + b_1 z - c_1 = 0, \qquad z^2 = y,$$
$$y^3 - (a^2 - 2b) + (b^2 - 2ac)\, y - c^2 = 0 = y^3 - a_2 y^2 + b_2 y - c_2.$$

Potenz	a_i	b_i	c_i
1.	0	-7	7
2.	14	49	7^2
4.	98	1029	7^4
8.	7546	588245	7^8
16.	55765626	[12,4133497]	7^{16}
32.	[15,4926608],	[24,8020203],	[27,0431360].

Daraus folgt

z_1	$-z_2$	$-z_3$
3,15	1,8001	1,236
3,05291	1,7238	1,3302
3,0489328	1,69506	1,35445
3,0489172	1,69207	1,35686.

An diesem Beispiele treten die besonderen Vorzüge der Bernoulli'schen und der Gräffe'schen Methode, dass sie nämlich sämmtliche Wurzeln gleichzeitig liefern und nicht von einem Näherungswerthe der Wurzeln ausgehen, klar hervor.

Die andern Methoden liefern jede Wurzel einzeln durch Wiederholung desselben Verfahrens, wodurch die Rechnung wesentlich verlängert wird. Wir wollen dieselben nur kurz erwähnen und auf dasselbe Beispiel $z^3 - 7z - 7 = 0$ anwenden.

2) *Die Newton'sche Methode.*

Ist a ein Näherungswerth einer Wurzel z_1, so ist ein genauerer Werth

$$z_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

falls das Fourier'sche Criterium über die Genauigkeit von a erfüllt ist. Diese Methode ist, wenn auch nicht gerade bequem, zur Bestimmung imaginärer Wurzeln verwendbar.

3) *Die Laguerre'sche Methode.*

Laguerre giebt*) die folgende Formel für die Bestimmung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit lauter reellen Wurzeln

$$z_1 = a + \frac{\nu f(a)}{-f'(a) \pm \sqrt{(\nu-1)^2 f'^2(a) - \nu(\nu-1) f(a) f''(a)}},$$

wobei die Wurzel das Zeichen von $-f'(a)$ hat. Sie stellt offenbar eine Verbesserung der Newton'schen Methode dar, in welche sie bei Vernachlässigung des 2^{ten} Gliedes unter dem Wurzelzeichen übergeht.

*) Nouvelles annales de math. Série II, T. XIX.

Ein grosser Vortheil dieser Methode ist, dass sie stets, wie auch a gewählt ist, gegen die a nächst gelegene Wurzel der Gleichung convergirt. Indessen hängt die Schnelligkeit doch wesentlich von der Wahl von a ab, ein Nachtheil, von dem die Gräffe'sche Methode —, die überhaupt von einem Näherungswerthe gar keinen Gebrauch machen kann — ganz, die Bernoulli'sche fast ganz frei ist.

Merkwürdiger Weise tritt übrigens die grosse Schnelligkeit der Methode von Laguerre bei ihm selbst in Folge mehrerer Rechenfehler gar nicht hervor, sodass sie dort ungünstiger als die Newton'sche Methode erscheint.

Als Beispiel wählt Laguerre auch

$$z^3 = 7z + 7.$$

Die Newton'sche Näherung giebt dann für

$$a = 3, \qquad z_1 = 3{,}05,$$
$$a = 3{,}05, \qquad z_1 = 3{,}048\,917\,9,$$
$$a = 3{,}048918, \qquad z_1 = 3{,}048\,917\,339\,522\,496.$$

Nach der Laguerre'schen Formel folgt für

$a = 3$, $z_1 = 3{,}048\,917\,332$ (nur 8 Einh. der 9ten Decimale zu klein),

$a = 3{,}05$, $z_1 = 3{,}048\,917\,339\,522\,387$ (nur 82 Einh. der 15ten Decimale zu gross),

also eine überaus grosse Genauigkeit, die die Newton'sche Näherung bedeutend übertrifft. Laguerre giebt hingegen für $a = 3{,}05$ einen viel weniger genauen Werth an

$$z_1 = 3{,}05 - \frac{0{,}067875}{20{,}9075 + \sqrt{1745{,}655}} = 3{,}0489154.$$

Statt 1745,655 muss es 1746,0080004 heissen; aber auch in der Ausrechnung des angegebenen Ausdrucks findet sich noch ein Rechenfehler, der die Genauigkeit vermindert.

Uebrigens lässt sich die Laguerre'sche Methode auch auf die Bestimmung reeller Wurzeln von Gleichungen, welche auch imaginäre Wurzeln besitzen, anwenden; so liefert sie für $a = 3$ als Wurzel von

$$z^3 - 6z - 6 = 0,$$

$$z_1 = 3 - \frac{7}{7 + 4\sqrt{10}} = 3 - \frac{4\sqrt{10} - 7}{37} = 2{,}8473214,$$

einen nur um 7 Einheiten der 7ten Decimale zu kleinen Werth —, ist jedoch stets auf die Bestimmung der reellen Wurzeln beschränkt.

4) *Die Kettenbruchmethode von Lagrange.*

Nach dieser Methode wird die Wurzel in einen Kettenbruch ent-

wickelt, dieser nach einigen Gliedern abgebrochen und nun durch ein Schlussverfahren ein genauerer Werth erlangt. Legendre hat eine recht interessante Vermischung der Lagrange'schen und der Bernoulli'schen Methode gegeben, indem er die bei Lagrange ziemlich mühsame Kettenbruchentwicklung nach der Bernoulli'schen Methode für den Quotienten $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ vornimmt und dann sogleich das Schlussverfahren anwendet.

Nach Lagrange setzt man in

$$z^3 - 7z - 7 = 0, \quad z = 3 + \frac{1}{y}, \quad y = 20 + \frac{1}{x}.$$

Wendet man jetzt schon das Schlussverfahren an, so wird

$$z_1 = \frac{509962}{167260} = 3{,}0489179;$$

nach der Berechnung ist der Fehler

$$\Delta < 0{,}000001.$$

Uebrigens ist auch diese Methode nur zur Bestimmung der reellen Wurzeln verwendbar.

II. Die recurrirend gebildeten Functionen.

Cap. 1.

Der allgemeine Fall einer Recursionsformel ν^{ter} Ordnung.

§ 1.

Verschiedene Formen der P_n.

Es mögen jetzt die $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ nicht mehr Zahlen, sondern Functionen einer Veränderlichen x bedeuten

$$a_k = g_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu), \tag{1}$$

wo nun $g_k(x)$ eine ganze rationale Function des complexen Arguments

$$x = \xi + i\eta \tag{2}$$

sei. Wählen wir die $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ ebenfalls als ganze Functionen von x, so haben alle P_n diese Eigenschaft. Ferner sind dann die Wurzeln der als irreducibel vorausgesetzten, algebraischen Gleichung

$$f(z) = z^\nu - g_1(x) z^{\nu-1} - \cdots - g_\nu(x) = \prod_{i=1}^{i=\nu} (z - z_i) = 0 \tag{3}$$

ganze, algebraische Functionen von x.

Die P_n sind dann einmal durch die Recursionsformel

$$P_{n+\nu}(x) = g_1(x) P_{n+\nu-1}(x) + \cdots + g_\nu(x) P_n(x) \tag{4}$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

als ganze Function von x, andrerseits aber auch, da sie die Coefficienten der Entwicklung von $\frac{g(z)}{f(z)}$ nach fallenden Potenzen von z sind

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{P_n(x)}{z^n}, \tag{3}$$

durch die Wurzeln von $f(z) = 0$ in der Form darstellbar

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{g(z_i)}{f'(z_i)} z_i^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{6}$$

Bilden wir nun verschiedene Functionenreihen

$$P_n^{(1)}(x),\ P_n^{(2)}(x), \ldots,$$

indem wir von verschiedenen Systemen von Anfangswerthen ausgehen, so besteht der Satz:

Aus n linear unabhängigen Functionenreihen

$$P_n^{(1)}(x),\ P_n^{(2)}(x), \ldots, P_n^{(\nu)}(x),$$

die derselben Relation

$$P_{n+\nu}(x) = \sum_{k=1}^{k=\nu} g_k(x) P_{n+\nu-k}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{7}$$

genügen, lässt sich jede andere Functionenreihe derselben Eigenschaft in der Form darstellen

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{k=\nu} A_k(x) P_n^{(k)}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{8}$$

wobei die $A_k(x)$ rationale, von n unabhängige Functionen von x bezeichnen. —

Denn in jeder einzelnen Functionenreihe lassen sich alle Elemente linear und homogen durch die ν ersten darstellen

$$\begin{aligned}
P_n^{(1)} &= a_{n,1} P_\nu^{(1)} + a_{n,2} P_{\nu-1}^{(1)} + \cdots + a_{n,\nu} P_1^{(1)},\\
P_n^{(2)} &= a_{n,1} P_\nu^{(2)} + a_{n,2} P_{\nu-1}^{(2)} + \cdots + a_{n,\nu} P_1^{(2)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P_n^{(\nu)} &= a_{n,1} P_\nu^{(\nu)} + a_{n,2} P_{\nu-1}^{(\nu)} + \cdots + a_{n,\nu} P_1^{(\nu)},\\
F_n &= a_{n,1} F_\nu + a_{n,2} F_{\nu-1} + \cdots + a_{n,\nu} F_1.
\end{aligned}$$

Durch Elimination von $a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,\nu}$ folgt daraus

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{k=\nu} A_k(x) P_n^{(k)}(x). \tag{9}$$

Hiebei sind die $a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,\nu}$ ν specielle Functionenreihen P_n, nämlich die den Systemen $\delta_{i,k}$ als Anfangswerthen entsprechenden, wobei

$$\delta_{i,i} = 1, \quad \delta_{i,k} = 0 \qquad (i \gtrless k)$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

ist.

Aus diesen speciellen ν, offenbar linear unabhängigen Functionenreihen lassen sich alle andern linear und homogen zusammensetzen, und umgekehrt. Jede Function $F_n(x)$ von dieser Form befriedigt die Recursionsformel.

Das Bisherige gilt übrigens ganz allgemein, auch wenn die Coefficienten der Recursionsformel von n abhängen; sind sie jedoch von n unabhängig, so folgt specieller

$$(10)\quad F_n(x) = A_1(x) P_{n+\nu-1}(x) + A_2(x) P_{n+\nu-2}(x) + \cdots + A_\nu(x) P_n(x),$$

wenn $P_n(x)$ irgend eine der Functionen $P_n^{(k)}(x)$ bezeichnet, sodass sich also alle Functionenreihen F_n durch eine einzige in dieser Weise darstellen lassen; so hatten wir oben (S. 482) die Potenzsummen der Wurzeln durch ein beliebiges P_n ausgedrückt.

Anm. ν solche speciellen Functionenreihen, deren Anfangswerthe allerdings nicht rational in den Coefficienten sind, sind z. B.

$$P_n^{(1)} = z_1^{n-1}, \; P_n^{(2)} = z_2^{n-1}, \ldots, \; P_n^{(\nu)} = z_\nu^{n-1},$$

sodass allgemein

$$P_n = \sum_{i=1}^{i=\nu} C_i z_i^{n-1}$$

sich ergiebt ohne Benutzung der Entwicklung von $\frac{g(z)}{f(z)}$.

§ 2.

Die Haupteigenschaften der $P_n(x)$.

Der im ersten Theile bewiesene Hauptsatz lässt sich für die Functionen $P_n(x)$ so aussprechen:

Satz: *Bezeichnet z_1 eine Wurzel von $f(z, x) = 0$, so nähert sich mit wachsendem n der Quotient $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ dem Grenzwerth z_1 für alle Werthe von x, für welche z_1 die dem absoluten Betrage nach grösste Wurzel ist. Hingegen existirt kein Grenzwerth, wenn eine andere Wurzel denselben absoluten Betrag hat, ohne ihr gleich zu sein.*

Anm. Verändern wir den angenommenen Rationalitätsbereich der ganzen, rationalen Functionen, indem wir $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, einem erweiterten Bereich entnehmen, wodurch die Gleichung $f(z) = 0$

reducibel werden kann, so kann auch Convergenz gegen eine andere Wurzel z' eintreten, wenn nämlich $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ schon einem Factor von $f(z) = 0$, dessen absolut grösste Wurzel z' ist, genügen. — Unser Satz gilt also ausnahmslos, solange $f(z)$ in dem durch $g_k(x)$ und die $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ gebildeten Rationalitätsbereich irreducibel ist.

In analoger Weise folgt weiter:

Bezeichnen wir für alle Werthe von x, für welche nicht zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben, die ν Zweige von z in der Reihenfolge mit $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$, dass

$$|z_i| > |z_{i+1}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1) \text{ ist,}$$

[natürlich sind bei dieser Definition $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ keine stetigen Functionen] *so wird*

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}} = z_1 z_2 \cdots z_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

sobald

$$|z_k| > |z_{k+1}|$$

ist; hingegen findet für die Werthe von x, für welche

$$|z_k| = |z_{k+1}|$$

ist, die Annäherung an den Grenzwerth nur dann statt, wenn

$$z_k = z_{k+1}$$

ist.

So wird also z. B.

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+2} P_n - P_{n+1}^2}{P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2} = z_1 z_2,$$

solange x sich in einem Gebiete bewegt, in dem $|z_2| > |z_3|$ ist. — Und hieraus folgt, wie im ersten Theil, dass die Annäherung der Quotienten $\frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}}$ an den Grenzwerth $z_1 z_2 \ldots z_k$ in geometrischer Progression vor sich geht, derart, dass die Abweichungen im Verhältniss $\frac{z_{k+1}}{z_k}$ abnehmen.

Hierbei sind die Functionen $P_{n,k}(x)$ ganze rationale Functionen der $g_k(x)$ und der Anfangsgrössen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, also in dem besonderen Falle, den wir hier nur betrachten, selbst ganze rationale Functionen von x.

Wir wollen nun die Bedingung, der x genügen muss, damit zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben, genauer untersuchen.

Setzen wir

$$z = r e^{\omega i}, \tag{1}$$

so wird

$$f(z) = r^\nu e^{\nu \omega i} - \big(g_1(\xi, \eta) + i\, h_1(\xi, \eta)\big)\, r^{\nu-1} e^{(\nu-1)\omega i} - \ldots$$
$$\ldots - \big(g_\nu(\xi, \eta) + i\, h_\nu(\xi, \eta)\big) = 0. \tag{2}$$

Trennen wir den reellen und imaginären Theil und eliminiren dann ω, was in rationaler Weise möglich ist, so ergiebt sich eine Gleichung für r

$$\Phi(r) = 0, \tag{3}$$

deren Coefficienten ganze, rationale Functionen von ξ, η sind. Dasselbe gilt daher auch für ihre Discriminante $F(\xi, \eta)$. *Dann enthält die Curve*

$$F(\xi, \eta) = 0 \tag{4}$$

alle die Punkte (ξ, η) *der complexen x-Ebene, für welche zwei Wurzeln von* $f(z) = 0$ *denselben absoluten Betrag haben*, insbesondere auch die Verweigungspunkte der algebraischen Function z von x, da in ihnen $z_i = z_k$ wird. Sonach kann im Allgemeinen nur eine einfache Mannigfaltigkeit von Punkten (ξ, η) existiren, für welche zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben. Es entspricht dies dem allgemeineren Satz von Runge*), wonach nur für eine $(2\nu - 1)$-fache Mannigfaltigkeit von Werthsystemen der ν unbestimmten Coefficienten, welche eine 2ν-fache Mannigfaltigkeit repräsentiren, zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben können.

Im speciellen kann es wohl vorkommen, dass die Discriminante $F(\xi, \eta)$ identisch verschwindet, sonach in der ganzen Ebene zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben. Ist z. B. die Gleichung $z^\nu = g(x)$ vorgelegt, so haben für jeden Werth von x sämmtliche Zweige denselben Betrag. Dieser Ausnahmefall lässt sich jedoch durch die lineare Transformation $z = z' - \xi$ stets beseitigen.

Diese algebraische Curve

$$F(\xi, \eta) = 0$$

wird jedoch nicht in ihrer ganzen Ausdehnung zwei dem absoluten Betrage nach gleiche Wurzeln z', z'' von $f(z) = 0$ liefern. Denn dadurch, dass wir ω in rationaler Weise eliminirten, kommen Curventheile hinzu, die diese Eigenschaft nicht besitzen. Es werden nämlich die Coefficienten von

$$\prod_{i=1}^{i=\nu} (r - r_i) = \Psi_1(r)$$

nicht rationale Functionen von ξ, η sein, sondern es erst werden, wenn über sämmtliche conjugirten Zweige multiplicirt wird:

$$\Phi(r) = \prod_{k=1}^{k=m} \Psi_k(r) = 0.$$

Das Verschwinden der Discriminante von $\Phi(r)$ *kann* dann wohl ausdrücken, dass $\Psi_1(r)$ einen Doppelfactor besitzt; doch folgt es daraus nicht mit Nothwendigkeit.

*) Acta Math. Bd. VI, p. 305.

Während sonach die Curve $F(\xi, \eta) = 0$ aus Theilen bestehen muss, die in sich zurück oder ins Unendliche fortlaufen, können die Theile, welche zu $f(z) = 0$ gehören, plötzlich in einem Punkte der x-Ebene endigen [es sind dies, wie leicht zu erkennen, die Verzweigungspunkte von z], wie wir später auch sehen werden.

Von jetzt an wollen wir gewöhnlich unter $F(\xi, \eta) = 0$ nur den Curvenzug verstehen, für den wirklich zwei Wurzeln von $f(z) = 0$ denselben absoluten Betrag haben. —

Diese Curve $F = 0$ wird nun ferner in verschiedene Theile zerfallen, je nachdem z_1 und z_2, z_2 und z_3, ..., oder z_k und z_{k+1} denselben absoluten Betrag haben. [Im Allgemeinen werden nur einzelne Punkte existiren, in denen drei Wurzeln denselben Betrag haben]. Die algebraische Curve $F = 0$ wird sich also aus $(\nu - 1)$ Theilen zusammensetzen

$$G_k(\xi, \eta) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu - 1), \tag{4}$$

wobei $G_k(\xi, \eta) = 0$ den Curvenzug bezeichnen soll, auf dem die k^{te} und die $(k+1)^{te}$ Wurzel denselben absoluten Betrag haben. Fassen wir das Bisherige zusammen, so folgt also

$$(6)\begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = z_1 \text{ ausser für die einfache Mannigfaltigkeit } G_1(\xi, \eta) = 0, \\ \cdots\cdots \\ \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}} = z_1 z_2 \cdots z_k \quad \text{„} \quad \cdot \quad \text{„} \quad G_k(\xi, \eta) = 0 \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu - 1). \end{cases}$$

Stets ist

$$\frac{P_{n+1,\nu}}{P_{n,\nu}} = z_1 z_2 \cdots z_\nu = (-1)^{\nu-1} g_\nu(x).$$

Oder wenn wir hieraus die einzelnen Wurzeln berechnen

$$(7)\begin{cases} z_1 = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \lim\limits_{n=\infty} R_{n,1}(x), \\ z_2 = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{P_{n+2} P_n - P_{n+1}^2}{P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2} \dfrac{P_n}{P_{n+1}} = \lim\limits_{n=\infty} R_{n,2}(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_k = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}} \dfrac{P_{n,k-1}}{P_{n+1,k-1}} = \lim\limits_{n=\infty} R_{n,k}(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

wobei nun $R_{n,k}(x)$ eine rationale Function von x [im allgemeinen Falle eine rationale Function der $g_k(x)$ und der Anfangsgrössen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$] bezeichnet, die mit wachsendem n sich für alle Werthe von x einem Grenzwerth nähert, mit Ausnahme der Punkte der Curve $G_k(\xi, \eta) = 0$.

Sonach können wir sagen:

Die ν Functionszweige der durch die Gleichung $f(z, x) = 0$ definirten algebraischen Function z von x lassen sich sämmtlich als Grenzwerthe rationaler Functionen von x darstellen, welche in der ganzen x-Ebene einen Sinn haben mit Ausnahme einzelner Stücke einer algebraischen Curve $F(\xi, \eta) = 0$, in denen einzelne dieser Grenzwerthe nicht existiren. Und zwar liefert für einen bestimmten Werth von x: $R_{n,k}(x)$ die k^{te} Wurzel der Gleichung, wenn dieselben an dieser Stelle ihrem absoluten Betrage nach geordnet werden. Die Gesammtheit der ν Zweige $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ist durch die Gesammtheit der ν Functionen

$$R_{n,1}(x),\ R_{n,2}(x), \ldots, R_{n,\nu}(x)$$

mit beliebig grosser Annäherung dargestellt. Nur ist zu beachten, dass, wenn wir die ν Zweige als eindeutige, analytische Functionen von x definiren [, wobei dann z. B. die Bezeichnung z_1 in verschiedenen Gebieten verschiedenen Zweigen zukommen wird,] jeder Zweig nur in einem gewissen Gebiet durch eine bestimmte Function $R_{n,k}(x)$ dargestellt sein wird, in einem andern durch eine andere, oder, was dasselbe ist, jede der rationalen Functionen wird in verschiedenen Gebieten [, deren jedes dadurch charakterisirt ist, dass in ihm die Reihenfolge der Wurzeln, ihrem absoluten Betrage nach, eine feste ist, während sie beim Ueberschreiten der Grenzcurve des Gebiets sich ändert,] verschiedene Wurzeln von $f(z, x) = 0$ darstellen.

Um dies noch deutlicher zu machen, wollen wir die ν Functionszweige $z', z'', \ldots, z^{(\nu)}$ von x in einem beliebigen Punkte x' der x-Ebene, der nicht auf $F(\xi, \eta) = 0$ liegt, bestimmt definiren, z. B. so, dass $z' = z_1, \ldots, z^{(\nu)} = z_{(\nu)}$ wird, und um ihre Fortsetzung eindeutig zu machen, einen Verzweigungsschnitt legen. Da dieser durch sämmtliche Verzweigungspunkte geht, so kann dazu z. B. ein Theil der Curve $F(\xi, \eta) = 0$ gewählt werden, der dann nicht überschritten werden darf. In der Umgebung von x' ist dann

$$z^{(k)} = \lim_{n=\infty} R_{n,k}(x). \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{8}$$

Lasse ich x einen Weg beschreiben, der die Grenzcurve $F = 0$ nicht schneidet, so bleiben alle Grenzwerthe bestehen. Nähert sich x der Curve $G_k(\xi, \eta) = 0$, so hört die Annäherung des Quotienten $\frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}}$ gegen einen Grenzwerth allmählich auf, auf der Curve existirt kein Grenzwerth. Nach dem Ueberschreiten stellt dann $\lim R_{n,k}(x)$ nicht mehr $z^{(k)}$, sondern $z^{(k+1)}$ dar, d. h. der Grenzwerth hat einen plötzlichen Sprung gemacht. Halten wir nun die Reihenfolge der Functionen

$$R_{n,1}(x),\ R_{n,2}(x), \ldots, R_{n,\nu}(x)$$

fest, so können wir sagen: Die Reihenfolge $z', z'', \ldots, z^{(\nu)}$ erleidet

beim Ueberschreiten einer Grenzcurve eine Permutation ihrer Elemente [und zwar werden im Allgemeinen nur Transpositionen zweier benachbarter Elemente eintreten, da die Coefficienten $g_k(x)$ eine Bedingung erfüllen müssten, damit drei Wurzeln längs einer Curve denselben absoluten Betrag haben], sodass sich jedes Stück der Grenzcurve durch eine solche Permutation charakterisiren lässt. Kehren wir nun nach dem Ausgangspunkte x' zurück, ohne einen Verzweigungsschnitt überschritten zu haben, so muss die Anfangsreihenfolge $z', z'', \ldots, z^{(r)}$ wieder eingetreten sein, da die Functionen $R_{n,k}(x)$ eindeutig sind. Begeben wir uns aber auf verschiedenen Wegen an die beiden Ufer eines Verzweigungsschnitts, so wird auf beiden Seiten die Reihenfolge der Functionszweige verschieden sein, und durch diese Verschiedenheit wird die Verzweigung an jener Stelle des Schnitts charakterisirt sein. Was somit sonst durch das Puiseux'sche Verfahren erreicht wird, nämlich die Feststellung des Zusammenhanges der einzelnen Wurzeln an den Verzweigungspunkten, oder kurz die Construction der zu $f(z, x) = 0$ gehörigen Riemann'schen Fläche, wird hier allein durch die Betrachtung der Curve $F = 0$ und die Art ihres Zerfallens in die einzelnen Theile $G_k(\xi, \eta) = 0$ erreicht. An Stelle der sonstigen Potenzreihenentwicklungen der Wurzeln, die nur in begrenztem Bereich convergiren, tritt hier eine in der gesammten Ebene mit Ausnahme der Punkte von $F(\xi, \eta) = 0$ giltige, rationale Darstellung.

Um auch noch für die Punkte dieser Grenzcurve Ausdrücke für die Wurzeln zu erlangen, können wir die beiden Wurzeln, die an der betreffenden Stelle denselben absoluten Betrag haben, mit Hülfe des Euler'schen Verfahrens bestimmen, welches zwar nicht mehr rationale Ausdrücke für die beiden Wurzeln liefert, dieselben aber als Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten darstellt, also nur eine quadratische Irrationalität einführt. Ist $|z_k| = |z_{k+1}|$, so liefert die quadratische Gleichung

$$(P_{n+1,k}P_{n-1,k} - P_{n,k}^2)u^2 - (P_{n+2,k}P_{n-1,k} - P_{n+1,k}P_{n,k})u + (P_{n,k}P_{n-2,k} - P_{n-1,k}^2) = 0$$

die beiden Ausdrücke $(z_1 z_2 \ldots z_{k-1})z_k$ und $(z_1 z_2 \ldots z_{k-1})z_{k+1}$, wobei der Klammerausdruck schon vorher durch $\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1,k-1}}{P_{n,k-1}}$ gefunden ist.

Sind die $g_k(x)$ so beschaffen, dass auch Curvenzüge mit mehr als zwei, etwa h, dem absoluten Betrage nach gleichen, Wurzeln existiren, so liefert das Jakobi'sche Verfahren eine Gleichung h^{ten} Grades mit rationalen Coefficienten, deren Wurzeln diese h Zweige mit wachsendem n beliebig nahe kommen.

Da nur für die Punkte einer einfachen Mannigfaltigkeit die Annäherung der Functionen $R_{n,k}(x)$ an einen Grenzwerth aufhört, so ist im Allgemeinen die Convergenz eine gleichmässige. Denn alle Punkte in der Umgebung von a liegen im Convergenzgebiete, wenn a darin liegt. Nur für $z_k = z_{k+1}$ findet zwar noch Convergenz statt, dieselbe ist aber nicht mehr gleichmässig, da diese Punkte auf der Curve $G_k(\xi, \eta) = 0$ liegen. Sonach lässt sich für alle Werthe von x in der Umgebung von a bei beliebig klein vorgeschriebenem δ ein Werth von m so bestimmen, dass

$$\left| \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} - z_1 \right| < \delta$$

für

$$n = m,\ m+1, \ldots, \infty$$

wird.

Läge nun für Werthe von $n > m$ in dieser Umgebung von a eine Nullstelle x' von $P_n(x)$, [würde dieselbe gleichzeitig $P_{n+1}(x)$ zum Verschwinden bringen, so müsste doch in der Reihe $P_{n+2}(x')$, $P_{n+3}(x')$, ..., $P_{n+\nu-1}(x')$ mindestens eine Function von Null verschieden sein, weil sonst alle P_n durch $x - x'$ theilbar wären; wäre dieses $P_{n+k}(x)$, so gehe ich von dem Quotienten $\frac{P_{n+k}(x)}{P_{n+k-1}(x)}$ aus,] so würde, da z_1 im Endlichen nothwendig endlich ist, diese Differenz über alle Grenzen hinaus wachsen. Das kann aber nur für Punkte der Begrenzung $G_1(\xi, \eta) = 0$ stattfinden. Dehnen wir diese Ueberlegung auf die Unterdeterminanten aus, so folgt der

Satz: *Bestimmt man die ganzen rationalen Functionen $P_n(x)$ durch die Recursionsformel*

$$P_{n+\nu}(x) = g_1(x)\, P_{n+\nu-1}(x) + g_2(x)\, P_{n+\nu-2}(x) + \cdots + g_\nu(x)\, P_n(x)$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

so nähern sich mit wachsendem n die Nullstellen von $P_n(x)$ mehr und mehr der Curve

$$G_1(\xi, \eta) = 0,$$

die Nullstellen von $P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2$ der Curve

$$G_2(\xi, \eta) = 0,$$

allgemein die Nullstellen von $P_{n,k}(x)$ der Curve

$$G_k(\xi, \eta) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$$

wobei $G_k(\xi, \eta) = 0$ die einfache Mannigfaltigkeit von Punkten enthält, für welche die k^{te} und die $(k+1)^{te}$ Wurzel (ihrem absoluten Betrage nach geordnet) *denselben absoluten Betrag haben,* und hierin beruht es, dass bei der Annäherung an diese Curve die Existenz des Grenzwerthes von $\frac{P_{n+1,k}}{P_{n,k}}$ aufhört. Auch erhellt nun, in welcher Weise es

functionentheoretisch zu erklären ist, dass dieser Quotient in verschiedenen Gebieten der Ebene verschiedene Functionen darstellt, indem sich nämlich seine Unstetigkeitsstellen an der Begrenzung dieser Gebiete zu wesentlich singulären Stellen anhäufen. Sonach wird die Curve $G_k(\xi, \eta) = 0$ für unendliches n von den Nullstellen von $P_{n,k}(x)$ völlig überdeckt werden.

Anm. Dass für grosse Werthe von n die Nullstellen von $P_n(x)$ nur auf der Curve $G_1(\xi, \eta) = 0$ liegen können, folgt schon aus der Darstellung

$$P_n = C_1 z_1^{n-1} + C_2 z_2^{n-1} + \cdots + C_\nu z_\nu^{n-1}.$$

Solange $|z_1| > |z_2|$ ist, muss mit wachsendem n der erste Term alle folgenden mehr und mehr überragen, sodass ein Verschwinden von P_n ausgeschlossen ist. Hingegen wird es möglich sein, dass für $|z_1| = |z_2|$ die Summe der beiden ersten Terme sich gegen die Gesammtheit der übrigen Terme forthebt. —

Noch eine naheliegende Frage lässt sich hier beantworten. Wenn eine beliebige Function $F(x)$ nach solchen Functionen $P_n(x)$ entwickelt ist, in welchem Bereiche convergirt diese Entwicklung?

Aus der Darstellung der $P_n(x)$ folgt

$$F(x) = \sum_1^\infty c_n P_n(x) = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{g(z_i)}{f'(z_i)} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n z_i^{n-1}.$$

Diese Reihe convergirt aber offenbar für

$$|z_i| = |\varphi_i(x)| < \lim_{n=\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}},$$

d. h. so lange die absolut grösste Wurzel von $f(z) = 0$ einen gewissen absoluten Betrag nicht übersteigt, wodurch das Convergenzgebiet völlig bestimmt ist; es wird sonach durch eine geschlossene Curve (geschlossen, weil im Unendlichen sicher z_1 einen unendlich grossen absoluten Betrag hat,) begrenzt werden. —

Im Folgenden wollen wir zwei Beispiele behandeln und zum Schluss den Fall $\nu = 2$ und die in ihm auftretenden Functionen $P_n(x)$ genauer erörtern. Im ersten Beispiel ist zwar $f(z)$ reducibel; dieses hat jedoch, solange $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ unbestimmt bleiben, keinen Einfluss und erleichtert, da keine Verzweigung stattfindet, die Uebersicht.

§ 3.

Beispiele.

1) $f(z) = (z-x)(z-2x-1)(z-3x-1)$.

Hier wird

$$z' = x, \quad z'' = 2x+1, \quad z''' = 3x+1,$$

$|z'| = |z''|$ liefert $\xi^2 + \eta^2 = (2\xi+1)^2 + 4\eta^2$,

$|z''| = |z'''|$ liefert $(2\xi+1)^2 + 4\eta^2 = (3\xi+1)^2 + 9\eta^2$,
$|z'''| = |z'|$ „ $(3\xi+1)^2 + 9\eta^2 = \xi^2 + \eta^2$.

Diese Gleichungen stellen drei Kreise dar, $K_{1,2}$, $K_{2,3}$, $K_{3,1}$, welche in

$$\xi = -\frac{5}{14}, \quad \eta = \pm\frac{\sqrt{3}}{14}$$

zwei gemeinschaftliche Schnittpunkte A und B haben:

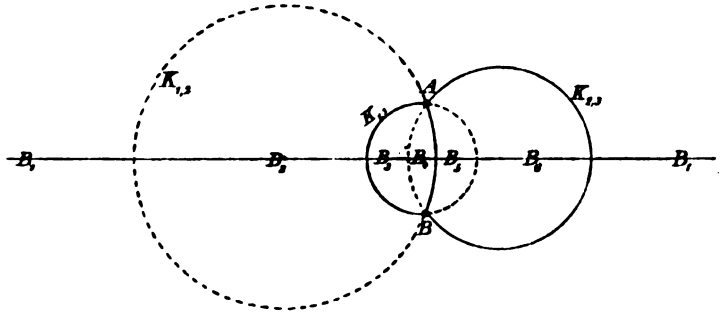
$$K_{1,2}: \left(\xi+\frac{2}{3}\right)^2 + \eta^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0,$$

$$K_{2,3}: \left(\xi+\frac{1}{5}\right)^2 + \eta^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0,$$

$$K_{3,1}: \left(\xi+\frac{3}{8}\right)^2 + \eta^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0.$$

In A und B haben alle drei Wurzeln denselben absoluten Betrag. Aus diesen 3 Kreisen setzt sich die Curve $F(\xi,\eta) = G_1(\xi,\eta)\,G_2(\xi,\eta) = 0$ zusammen. Da z. B. für $x = -2$: $z' = -2$, $z'' = -3$, $z''' = -5$ ist, so folgt leicht, dass ausserhalb des Bereichs der drei Kreise z''' die absolut grösste Wurzel ist, und dass, wenn wir diesen Bereich mit B_1 bezeichnen, in B_1 die Reihenfolge der ihrem absoluten Betrage nach geordneten Wurzeln: z''', z'', z' ist. Diese Reihenfolge ändert sich beim Ueberschreiten der Peripherie von $K_{l,m}$ derart, dass sich $z^{(l)}$ und $z^{(m)}$ vertauschen. Sonach sind die sechs Gebiete $B_1, B_2, \ldots, B_6$ durch folgende Reihenfolgen charakterisirt:

B_1: z''', z'', z', $\qquad$ B_4: z', z'', z''',
B_2: z''', z', z'', $\qquad$ B_5: z'', z', z''',
B_3: z', z''', z'', $\qquad$ B_6: z'', z''', z',



und es wird

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = \begin{Bmatrix} x \\ 2x+1 \\ 3x+1 \end{Bmatrix} \quad \text{in den Gebieten} \quad \begin{Bmatrix} B_3, B_4 \\ B_5, B_6 \\ B_1, B_2 \end{Bmatrix}.$$

Ferner wird die Curve $G_1(\xi,\eta) = 0$ von den voll ausgezogenen Kreisbogen, die Curve $G_2(\xi,\eta) = 0$ von den gestrichelten gebildet.

Die Nullstellen von $P_n(x)$ gruppiren sich mit wachsendem n auf den ersteren, die von $P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2$ auf den letzteren. —

Der Convergenzbereich von Entwicklungen nach den $P_n(x)$ wird durch gewisse Kreisbogen begrenzt, für die $|z^{(0)}| < \varrho$ ist, und zwar ist es für

$\varrho \geq 1$ der Vollkreis

$$(1) \quad \left(\xi + \tfrac{1}{3}\right)^2 + \eta^2 = \left(\tfrac{\varrho}{3}\right)^2;$$

$\frac{1}{2} < \varrho < 1$ ein Kreisbogenzweieck, gebildet aus 1) und

$$(2) \quad \left(\xi + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 = \left(\tfrac{\varrho}{2}\right)^2;$$

$\varrho < \frac{1}{2}$ ein Kreisbogendreieck, gebildet aus (1), (2) und

$$(3) \quad \xi^2 + \eta^2 = \varrho^2.$$

Dieses Beispiel lässt sich noch leicht verallgemeinern:

$$f(z) = \prod_{i=1}^{i=\nu} (z - a_i x - b_i).$$

Die Bedingung für die Gleichheit des absoluten Betrags zweier Wurzeln wird

$$(a_g\xi + b_g)^2 + (a_g\eta)^2 = (a_h\xi + b_h)^2 + (a_h\eta)^2,$$

oder

$$\left(\xi + \frac{a_g b_g - a_h b_h}{a_g^2 - a_h^2}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{a_h b_g - a_g b_h}{a_g^2 - a_h^2}\right)^2.$$

Nenne ich diesen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der reellen Axe liegt, $K_{g,h}$, so schneiden sich die drei Kreise $K_{g,h}$, $K_{h,i}$ und $K_{i,g}$ in zwei gemeinsamen Punkten $P_{g,h,i}$ und $P'_{g,h,i}$, in denen drei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben. Der Complex der $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ Kreise stellt die Curve $F(\xi, \eta) = 0$ dar. Jeder derselben wird in eine Reihe einzelner Kreisbogen zerlegt, die von einem Punkte $P_{g,h,i}$ bis zu einem andern $P_{g,h,i'}$ reichen, und aus solchen einzelnen Bogen setzt sich jede Curve $G_k(\xi, \eta) = 0$ zusammen. Die x-Ebene wird dadurch in eine Reihe von Kreispolygonen zerlegt, derart dass in jedem einzelnen die Reihenfolge der ihrem absoluten Betrage nach geordneten Wurzeln fest ist, während beim Ueberschreiten irgend einer Seite des Polygons eine Transposition zweier Wurzeln erfolgt.

$$2)\quad f(z) = z^3 + xz - 1 = 0.$$

Es wird hier vorzuziehen sein, statt der Berechnung der Function $\Phi(r)$ und ihrer Discriminante $F(\xi, \eta)$ einen andern Weg einzuschlagen. Sollen zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben, so können wir, da die Summe aller drei Wurzeln gleich Null ist, ansetzen

$$z' = re^{\varphi i},\quad z'' = re^{\psi i},\quad z''' = -r(e^{\varphi i} + e^{\psi i}).$$

Da ferner

$$z'z''z''' = +1$$

ist, so folgt

$$r^3 e^{(\varphi+\psi)i}(e^{\varphi i} + e^{\psi i}) = -1$$

oder

$$r^3(e^{(\varphi+2\psi)i} + e^{(\psi+2\varphi)i}) = -1.$$

Also

$$\sin(\varphi + 2\psi) + \sin(\psi + 2\varphi) = 0$$

und

$$r^3\{\cos(\varphi + 2\psi) + \cos(\psi + 2\varphi)\} = -1.$$

Die erstere Gleichung bietet die beiden Auflösungen

$$a)\quad 2\varphi + \psi = (2k+1)\pi + \varphi + 2\psi$$

oder

$$\varphi = (2k+1)\pi + \psi,$$

also

$$z' = -z'',$$

was unmöglich ist.

$$b)\quad 2\varphi + \psi = 2k\pi - (\varphi + 2\psi) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi + \psi = \frac{2k\pi}{3},$$

also

$$e^{3(\varphi+\psi)i} = 1.$$

Endlich wird nun

$$z'z'' + z'z''' + z'''z' = x,$$

$$r^2(e^{2\varphi i} + e^{(\varphi+\psi)i} + e^{2\psi i}) = -x,$$

$$r^2 e^{(\varphi+\psi)i}\{e^{(\varphi-\psi)i} + e^{(\psi-\varphi)i} + 1\} = -x,$$

$$r^2\{2\cos(\varphi - \psi) + 1\}\, e^{(\varphi+\psi)i} = -x.$$

Also

$$-x^3 = r^6\{2\cos(\varphi - \psi) + 1\}^3,$$

d. h. x^3 muss reell sein. Setzen wir

$$x = \xi + i\eta,$$

so zerfällt die Curve $F(\xi, \eta) = 0$ in die 3 Geraden

$$\eta = 0, \quad \eta + \sqrt{3}\xi = 0, \quad \eta - \sqrt{3}\xi = 0,$$

welche sich in dem Coordinatenanfang, in dem alle drei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben, unter Winkeln von je 60^0 schneiden. Aber nicht in ihrer ganzen Ausdehnung bilden sie die Curve $F = 0$. Die Verzweigungspunkte von z sind die Punkte

$$x^3 = -\frac{27}{4},$$

deren je einer auf jeder der drei Geraden liegt. Nur das von diesem Verzweigungspunkte durch den Nullpunkt in's Unendliche gehende Stück der Geraden enthält die Punkte, in denen zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben.

Definiren wir nun in der Umgebung des Nullpunktes die drei Functionszweige durch die Reihenentwicklungen

$$z^{(k)} = \omega_k - \omega_k^2 \frac{x}{3} + \omega^k \frac{x^3}{81} + \cdots, \quad (k = 1, 2, 3),$$

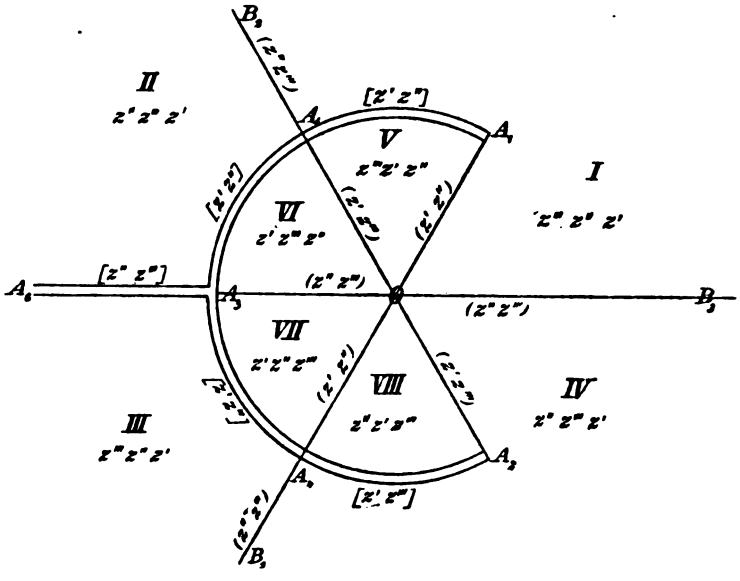
wobei

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

ist, und legen wir einen Verzweigungsschnitt, so sind die drei Wurzeln in der ganzen Ebene eindeutig bestimmt. Durch eine einfache Betrachtung ergeben sich dann die folgenden aus der Figur zu entnehmenden Resultate:

A_1OB_1, A_2OB_2, A_3OB_3 sind die drei Geraden, welche die Curve $F(\xi, \eta) = 0$ bilden. Aus dem Kreisbogen $A_1A_3A_2$, sowie der Geraden A_3A_6 setzt sich der durch doppelte Zeichnung erkennbare Verzweigungsschnitt zusammen. Dadurch zerfällt die Ebene in acht Gebiete. [Denken wir uns die Gebiete *I* und *III*, sowie *II* und *IV* im Unendlichen zusammenhängend, so bleiben sechs Gebiete übrig, deren jedes durch eine bestimmte unter den sechs möglichen Reihenfolgen der drei Wurzeln z', z'', z''' charakterisirt ist]. Die Transpositionen der Wurzeln an den Theilen der Curve $F(\xi, \eta) = 0$ sind in runden Klammern, die daraus durch einfache Betrachtung sich ergebenden Verzweigungen an den drei Theilen des Verzweigungsschnitts in eckigen Klammern angegeben. [Geht man z. B. vom Punkte P im Gebiet *I* aus und auf zwei Wegen, die den Punkt A_1 einschliessen, nach dem Punkte Q des Verzweigungsschnitts A_1A_5, so ist an dem einen Rande z''', z'', z', an dem andern z''', z', z'' die Reihenfolge der Wurzeln; es verzweigen sich sonach an dieser Stelle z', z'', woraus nun weiter folgt, dass, während längs A_2OA_5 z' und z''', längs A_5B_2 z'' und z''' denselben absoluten Betrag haben, etc.] Damit ist es nun leicht, die Verzweigung der Wurzeln z', z'', z''' und die Reihenfolge, in der sie durch die rationalen Functionen

$R_{n,1}(x)$, $R_{n,2}(x)$, $R_{n,3}(x)$ dargestellt werden, für jeden Punkt der Ebene zu ermitteln.



Wollen wir noch specieller auf die Functionen P_n etc. eingehen, so müssen wir das Zerfallen von $F(\xi, \eta) = 0$ in die beiden Theile

$$G_1(\xi, \eta) = 0 \quad \text{und} \quad G_2(\xi, \eta) = 0$$

untersuchen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{In den Gebieten } (I, III) & \text{und} \quad V & \text{ist } z''' \\ \text{„} \quad\quad (II, IV) & \text{und} \quad VIII & \text{ist } z'' \\ \text{„} \quad\quad VI & \text{und} \quad VII & \text{ist } z' \end{array}\right\}$$

die absolut grösste Wurzel. Sonach folgt sofort, dass die Strecken

$$\left.\begin{array}{l} OB_1,\ OB_2,\ OB_3 \quad \text{die Curve} \quad G_1(\xi, \eta) = 0 \\ OA_1,\ OA_2,\ OA_3 \quad \text{die Curve} \quad G_2(\xi, \eta) = 0 \end{array}\right\}$$

bilden.

Somit ergiebt sich: Der Quotient $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ nähert sich für jeden Werth von x mit wachsendem n einem Grenzwerth ausser für die Punkte der drei geradlinigen Strecken OB_1, OB_2, OB_3 und stellt in den drei, durch verschiedene Strichelung hervorgehobenen Gebieten die Wurzeln z', z'', z''' dar.

so zerfällt die Curve $F(\xi, \eta) = 0$ in die 3 Geraden

$$\eta = 0, \quad \eta + \sqrt{3}\xi = 0, \quad \eta - \sqrt{3}\xi = 0,$$

welche sich in dem Coordinatenanfang, in dem alle drei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben, unter Winkeln von je 60^0 schneiden. Aber nicht in ihrer ganzen Ausdehnung bilden sie die Curve $F = 0$. Die Verzweigungspunkte von z sind die Punkte

$$x^3 = -\frac{27}{4},$$

deren je einer auf jeder der drei Geraden liegt. Nur das von diesem Verzweigungspunkte durch den Nullpunkt in's Unendliche gehende Stück der Geraden enthält die Punkte, in denen zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben.

Definiren wir nun in der Umgebung des Nullpunktes die drei Functionszweige durch die Reihenentwicklungen

$$z^{(k)} = \omega_k - \omega_k^2 \frac{x}{3} + \omega^k \frac{x^3}{81} + \cdots, \quad (k = 1, 2, 3),$$

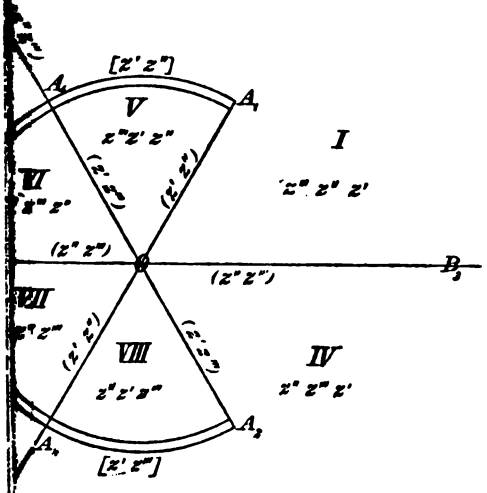
wobei

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

ist, und legen wir einen Verzweigungsschnitt, so sind die drei Wurzeln in der ganzen Ebene eindeutig bestimmt. Durch eine einfache Betrachtung ergeben sich dann die folgenden aus der Figur zu entnehmenden Resultate:

A_1OB_1, A_2OB_2, A_3OB_3 sind die drei Geraden, welche die Curve $F(\xi, \eta) = 0$ bilden. Aus dem Kreisbogen $A_1A_3A_2$, sowie der Geraden A_3A_6 setzt sich der durch doppelte Zeichnung erkennbare Verzweigungsschnitt zusammen. Dadurch zerfällt die Ebene in acht Gebiete. [Denken wir uns die Gebiete *I* und *III*, sowie *II* und *IV* im Unendlichen zusammenhängend, so bleiben sechs Gebiete übrig, deren jedes durch eine bestimmte unter den sechs möglichen Reihenfolgen der drei Wurzeln z', z'', z''' charakterisirt ist]. Die Transpositionen der Wurzeln an den Theilen der Curve $F(\xi, \eta) = 0$ sind in runden Klammern, die daraus durch einfache Betrachtung sich ergebenden Verzweigungen an den drei Theilen des Verzweigungsschnitts in eckigen Klammern angegeben. [Geht man z. B. vom Punkte P im Gebiet *I* aus und auf zwei Wegen, die den Punkt A_1 einschliessen, nach dem Punkte Q des Verzweigungsschnitts A_1A_5, so ist an dem einen Rande z''', z'', z', an dem andern z''', z', z'' die Reihenfolge der Wurzeln; es verzweigen sich sonach an dieser Stelle z', z'', woraus nun weiter folgt, dass, während längs A_2OA_5 z' und z''', längs A_5B_2 z'' und z''' denselben absoluten Betrag haben, etc.] Damit ist es nun leicht, die Verzweigung der Wurzeln z', z'', z''' und die Reihenfolge, in der sie durch die rationalen Functionen

dargestellt werden, für jeden Punkt der



eller auf die Functionen P_n etc. eingehen,
von $F(\xi, \eta) = 0$ in die beiden Theile

$= 0$ und $G_2(\xi, \eta) = 0$

(I, III) und V ist z'''
(II, IV) und $VIII$ ist z''
VI und VII ist z'

. Sonach folgt sofort, dass die Strecken

B_3 die Curve $G_1(\xi, \eta) = 0$
l_3 die Curve $G_2(\xi, \eta) = 0$

quotient $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ nähert sich für jeden Werth
inem Grenzwerth ausser für die Punkte
OB_1, OB_2, OB_3 und stellt in den drei,
ig hervorgehobenen Gebieten die Wurzeln

so zerfällt die Curve $F(\xi, \eta) = 0$ in die 3 Geraden

$$\eta = 0, \quad \eta + \sqrt{3}\xi = 0, \quad \eta - \sqrt{3}\xi = 0,$$

welche sich in dem Coordinatenanfang, in dem alle drei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben, unter Winkeln von je 60° schneiden. Aber nicht in ihrer ganzen Ausdehnung bilden sie die Curve $F = 0$. Die Verzweigungspunkte von z sind die Punkte

$$x^3 = -\frac{27}{4},$$

deren je einer auf jeder der drei Geraden liegt. Nur das von diesem Verzweigungspunkte durch den Nullpunkt in's Unendliche gehende Stück der Geraden enthält die Punkte, in denen zwei Wurzeln denselben absoluten Betrag haben.

Definiren wir nun in der Umgebung des Nullpunktes die drei Functionszweige durch die Reihenentwicklungen

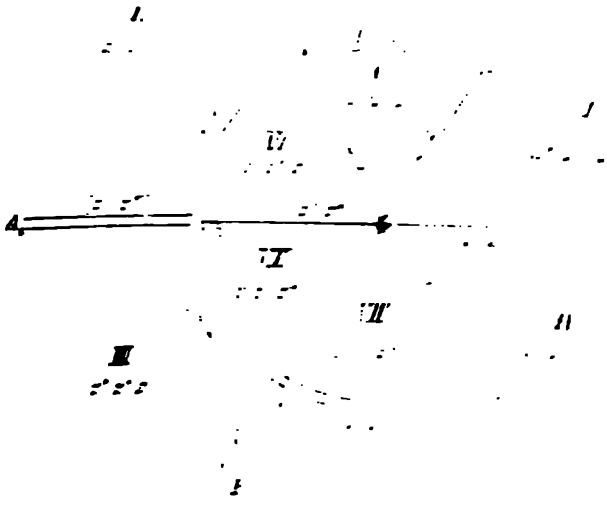
$$z^{(k)} = \omega_k - \omega_k^2 \frac{x}{3} + \omega^k \frac{x^3}{81} + \cdots, \quad (k = 1, 2, 3),$$

wobei

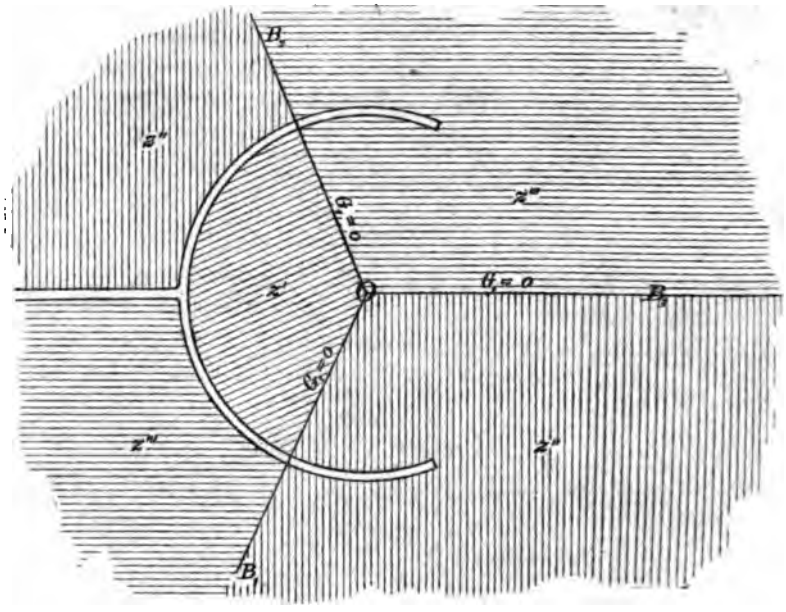
$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

ist, und legen wir einen Verzweigungsschnitt, so sind die drei Wurzeln in der ganzen Ebene eindeutig bestimmt. Durch eine einfache Betrachtung ergeben sich dann die folgenden aus der Figur zu entnehmenden Resultate:

A_1OB_1, A_2OB_2, A_3OB_3 sind die drei Geraden, welche die Curve $F(\xi, \eta) = 0$ bilden. Aus dem Kreisbogen $A_1A_3A_2$, sowie der Geraden A_3A_6 setzt sich der durch doppelte Zeichnung erkennbare Verzweigungsschnitt zusammen. Dadurch zerfällt die Ebene in acht Gebiete. [Denken wir uns die Gebiete *I* und *III*, sowie *II* und *IV* im Unendlichen zusammenhängend, so bleiben sechs Gebiete übrig, deren jedes durch eine bestimmte unter den sechs möglichen Reihenfolgen der drei Wurzeln z', z'', z''' charakterisirt ist]. Die Transpositionen der Wurzeln an den Theilen der Curve $F(\xi, \eta) = 0$ sind in runden Klammern, die daraus durch einfache Betrachtung sich ergebenden Verzweigungen an den drei Theilen des Verzweigungsschnitts in eckigen Klammern angegeben. [Geht man z. B. vom Punkte P im Gebiet I aus und auf zwei Wegen, die den Punkt A_1 einschliessen, nach dem Punkte Q des Verzweigungsschnitts A_1A_5, so ist an dem einen Rande z''', z'', z', an dem andern z''', z', z'' die Reihenfolge der Wurzeln; es verzweigen sich sonach an dieser Stelle z', z'', woraus nun weiter folgt, dass, während längs A_2OA_5 z' und z''', längs A_5B_2 z'' und z''' denselben absoluten Betrag haben, etc.] Damit ist es nun leicht, die Verzweigung der Wurzeln z', z'', z''' und die Reihenfolge, in der sie durch die rationalen Functionen


I.
IV
I
II
III

Mit wachsendem n häufen sich die Nullstellen von $P_n(x)$ auf diesen drei Strecken OB_1, OB_2, OB_3 mehr und mehr an. Analog be-



decken mit wachsendem n die Nullstellen von $P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2$ die drei Strecken OA_1, OA_2, OA_3.

Cap. 2.

Der Fall $\nu = 2$.

§ 1.

Zurückführung auf einen speciellen Fall.

Eine besondere Anwendung des vorigen Capitels soll noch den einfachsten Fall, den Fall einer quadratischen Gleichung, behandeln, weil sich hier einige Anwendungen auf aus der Theorie der trigonometrischen und der Kugelfunctionen Bekanntes machen lassen.

Die quadratische Gleichung laute

$$f(z) = z^2 - g(x)\,z + h(x) = 0. \tag{1}$$

Die Gleichung der Curve $F = 0$ lässt sich hier direct aufstellen; ist nämlich

$$z_1 = re^{\varphi i}, \quad z_2 = re^{\psi i},$$

so wird

$$g(x) = r(e^{\varphi i} + e^{\psi i}),$$
$$h(x) = r^2 e^{(\varphi+\psi)i}.$$

Ferner

$$g^2(x) = r^2(e^{2\varphi i} + 2e^{(\varphi+\psi)i} + e^{2\psi i}) = r^2 e^{(\varphi+\psi)i}(e^{(\varphi-\psi)i} + 2 + e^{(\psi-\varphi)i})$$
$$= r^2\left(2 + 2\cos(\varphi - \psi)\right) e^{(\varphi+\psi)i}.$$

Demnach

$$\frac{g^2(x)}{4h(x)} = \frac{1 + \cos(\varphi - \psi)}{2}. \tag{2}$$

D. h. Der Quotient $\frac{g^2(x)}{4h(x)}$ muss reell sein und zwischen 0 und 1 liegen.

In der That ist auch auf anderem Wege leicht einzusehen, dass dies die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Eintreten zweier absolut gleicher Wurzeln ist. Sind die $P_n(x)$ bestimmt durch

$$P_{n+2}(x) = g(x)\,P_{n+1}(x) - h(x)\,P_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{3}$$

so setzen wir

$$P_n(x) = h^{\frac{n}{2}}(x)\,Q_n(x), \tag{4}$$

(oder, was dasselbe ist $z = \xi\sqrt{h(x)}$).

Dann wird

$$Q_{n+2}(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}\,Q_{n+1}(x) - Q_n(x). \tag{5}$$

Führen wir nun für $\frac{g(x)}{2\sqrt{h(x)}}$ eine neue Variable t ein, so wird

$$\xi^2 - 2t\xi + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \xi_{1,2} = t \pm \sqrt{t^2 - 1} \tag{6}$$

und

$$Q_{n+2}(x) = 2t\,Q_{n+1}(x) - Q_n(x). \tag{7}$$

Für diese quadratische Gleichung ist nun die Curve $F(\xi, \eta) = 0$ leicht aufzustellen. Da das Product beider Wurzeln gleich 1 ist, müssen beide auf dem Einheitskreise liegen, falls sie denselben absoluten Betrag haben sollen. Die Gleichung

$$\xi^2 - 2t\xi + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \xi + \frac{1}{\xi} = 2t$$

stellt aber eine Abbildung dar, bei der den concentrischen Kreisen um den Nullpunkt der ξ-Ebene und ihren Durchmessern ein System von confocalen Ellipsen und Hyperbeln in der t-Ebene entspricht. Dem Einheitskreise der ξ-Ebene entspricht das zwischen -1 und $+1$ gelegene Stück der reellen Axe der t-Ebene. Dieses Stück bildet also die Curve $F = 0$ und nur für

$$-1 < t < +1$$

haben die Wurzeln ξ_1 und ξ_2 denselben absoluten Betrag. Auf die x übertragen lautet dies aber

$$-1 < \frac{g(x)}{2\sqrt{h(x)}} < +1$$

oder

$$0 < \frac{g^2(x)}{4h(x)} < 1.$$

Stellen wir die Bedingung, dass $\frac{g^2(x)}{h(x)}$ reell sein soll, in einer algebraischen Form (algebraische Gleichung zwischen ξ und η) auf, so lautet sie

$$\frac{g_2(\xi,\eta)}{g_1(\xi,\eta)} - \frac{g_1(\xi,\eta)}{g_2(\xi,\eta)} + 2\frac{h_1(\xi,\eta)}{h_2(\xi,\eta)} = 0.$$

Doch nur für einen Theil dieser Curve haben z_1 und z_2 denselben absoluten Betrag, und zwar lässt sich derselbe leicht angeben. Wir können auch schreiben

$$F = g^2(x) - 4\lambda h(x) = 0 \quad 0 < \lambda < 1.$$

Für $\lambda = 0$ liefert diese Curve die Nullpunkte von $g(x)$, und zwar jeden doppelt; es sind dieses die Punkte, in denen $z_1 = -z_2$ ist.

$\lambda = 1$ giebt die Verzweigungspunkte von z

$$g^2 - 4h = 0,$$

wo also

$$z_1 = z_2$$

ist.

Wir erhalten sonach von jedem Nullpunkte von $g(x)$ ausgehend zwei Zweige, die in zwei Verzweigungspunkten von z endigen. D. h. Setzen wir

$$z_1 = re^{\varphi i}, \quad z_2 = re^{\psi i},$$

so läuft $\varphi - \psi$ auf der Curve $F = 0$ stetig von 0^0 bis 180^0 [und so war es auch im zweiten Beispiele des vorigen Capitels].

Dadurch ist die Art der Curve $F = 0$ im Falle $\nu = 2$ bekannt, und es bleibt nur noch übrig, die in diesem Falle auftretenden Functionen $P_n(x)$ zu behandeln. Da diese soeben auf die in einem speciellen Falle auftretenden Functionen zurückgeführt sind, ist jetzt noch dieser Fall

$$f(z) = z^2 - 2xz + 1 = 0$$

und die zu ihm gehörenden Functionen $P_n(x)$ zu erörtern.

§ 2.

Der Specialfall: $f(z) = z^2 - 2xz + 1 = 0.$

Wir fanden oben, dass in diesem Falle die Curve $F(\xi, \eta) = 0$ durch das zwischen -1 und $+1$ gelegene Stück der reellen Axe gebildet wird. Sonach werden die Functionen $P_n(x)$ für diese Strecke und für die übrige Ebene getrennt zu betrachten sein. Für diese Strecke können wir

$$x = \cos\varphi$$

setzen; dadurch wird

$$z_1 = e^{+\varphi i}, \quad z_2 = e^{-\varphi i}.$$

Zwei specielle Lösungen unserer Recursionsformel

(1) $$P_{n+2} = 2\cos\varphi\, P_{n+1} - P_n$$

sind dann die Potenzen der Wurzeln, $e^{n\varphi i}$ und $e^{-n\varphi i}$, oder lineare Verbindungen derselben

(2) $$P_{n,1} = \cos n\varphi \quad \text{und} \quad P_{n,2} = \sin n\varphi.$$

In der That ist

$$\cos(n+2)\varphi = 2\cos\varphi\cos(n+1)\varphi - \cos n\varphi,$$
$$\sin(n+2)\varphi = 2\cos\varphi\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi,$$

und die allgemeinste ganze Function n^{ten} Grades von x, die der Formel (1) genügt, wird sich für

$$-1 < x < +1$$

in die Form bringen lassen

(3) $$P_n(x) = \lambda_1 \cos n\varphi + \lambda_2 \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

wobei λ_1, λ_2 willkürliche, von n unabhängige Grössen sind.

Beachten wir noch die bekannten Formeln

$$\sin n\varphi = \frac{(-1)^{n-1} n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}},$$

$$\cos n\varphi = \frac{(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \sqrt{1-x^2}\, \frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n},$$

so können wir, für jeden Werth von x gültig, sagen:

Die allgemeinste ganze, rationale Function, welche der Recursionsformel

(1) $$P_{n+2} = 2x\, P_{n+1} - P_n$$

genügt, hat die Form

(5) $$P_n = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)} \sqrt{1-x^2}$$
$$\cdot \left\{ f_1(x) \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^{n+1}} + (-1)^n (n+1) f_2(x) \frac{d^n(x^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} \right\},$$

wobei $f_1(x)$, $f_2(x)$ beliebige ganze, rationale Functionen von x sind, die aber n nicht enthalten.

Die Gültigkeit unserer allgemeinen Sätze ist hier ganz evident:

Nach dem Rolle'schen Theorem liegen in der That die Nullpunkte von $P_{n,1}(x)$ und $P_{n,2}(x)$ auf der reellen Axe zwischen $+1$ und -1. Dass dann bei beliebiger Wahl von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für wachsendes n

die Nullpunkte von $P_n(x)$ sich ebenfalls mehr und mehr an diese Strecke anschliessen werden, lässt sich unschwer übersehen.

Ferner nähert sich der Quotient $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ in der ganzen Ebene einem Grenzwerth, nur nicht für $F = 0$; in der That ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{\cos(n+1)\varphi}{\cos n\varphi} \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}$$

ganz unbestimmt.

Definiren wir aber $\sqrt{x^2-1}$ für reelles $x > 1$ als positiv und

$$z_1 = x + \sqrt{x^2-1}, \quad z_2 = x - \sqrt{x^2-1},$$

legen wir ferner den Verzweigungsschnitt auf der reellen Axe von -1 nach $+1$, so ist z_1 überall die absolut grösste Wurzel, und es wird für jeden Werth von x ausserhalb des Verzweigungsschnitts

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = x + \sqrt{x^2-1}, \tag{6}$$

also im Speciellen

$$\lim_{n=\infty} \frac{\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^{n+1}}}{\frac{d^n(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}} = (2n+1)(x+\sqrt{x^2-1}),$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\frac{d^n(x^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}}{\frac{d^{n-1}(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}} = -(2n+1)(x+\sqrt{x^2-1}). \tag{7}$$

Die Entwicklung irgend einer ganzen Function $F(x)$ nach den Functionen $P_{n,1}(x)$ oder $P_{n,2}(x)$ convergirt in einem Gebiete, für das

$$|x + \sqrt{x^2-1}| < \varrho \tag{8}$$

ist, also in einer Ellipse mit den Brennpunkten $+1$ und -1 (dieselbe Ellipse bildet auch den Convergenzbereich für die Entwicklung nach Kugelfunctionen einer Variabeln, worauf wir noch zurückkommen).

Die Darstellung der P_n als Entwicklungscoefficienten von $\frac{g(z)}{f(z)}$ nach steigenden Potenzen von z liefert die bekannten Formeln

$$\log(z^2 - 2xz + 1) = -2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z^n}{n} \cos n\varphi,$$

$$\frac{1}{z^2 - 2xz + 1} = \sum_{1}^{\infty} z^{n-1} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}.$$

Wir können hier noch die folgende Bemerkung anfügen:

Die Recursionsformel

$$(1) \qquad P_{n+2}(x) = 2x\,P_{n+1}(x) - P_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

lautet in der Variabeln φ für $P_n = \sin n\varphi$ resp. $\cos n\varphi$

$$(9) \qquad P[(n+2)\varphi] = 2\cos\varphi\, P[(n+1)\varphi] - P[n\varphi]$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

so dass sie in die Form einer Functionalgleichung für die *eine* zu bestimmende Function $P(\varphi)$ übergeht (es ist dieses eine Art von Multiplicationstheorem für $P(\varphi)$). Nach dem Obigen hat dieselbe zwei specielle Lösungen,

$$P_1(\varphi) = \cos\varphi, \qquad P_2(\varphi) = \sin\varphi$$

aus denen sich die allgemeine

$$P(\varphi) = a\cos\varphi + b\sin\varphi$$

zusammensetzt.

Wir können uns nun die allgemeinere Functionalgleichung vorlegen

$$(10) \quad P[(n+\nu)\varphi] = g_1(\varphi)\,P[(n+\nu-1)\varphi] + \cdots + g_\nu(\varphi)\,P[n\varphi]$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

die natürlich auch als Recursionsformel aufgefasst werden kann.

Differenziren wir diese Gleichung nach n [was, wenn auch die Gleichung zunächst nur für ganzzahlige n gilt, doch stets erlaubt ist] und setzen

$$\frac{dP(\varphi)}{d\varphi} = P'(\varphi),$$

also

$$\frac{dP(n\varphi)}{d(n\varphi)} = P'(n\varphi),$$

so wird

$$(11) \quad P'[(n+\nu)\varphi] = g_1(\varphi)\,P'[(n+\nu-1)\varphi] + \cdots + g_\nu(\varphi)\,P'[n\varphi].$$

D. h. Genügt $P(\varphi)$ der obigen Functionalgleichung, so auch $P'(\varphi)$, $P''(\varphi), \ldots$.

Daraus folgt nach dem Früheren

$$(12) \qquad P^{(\nu)}(n\varphi) = A_1(\varphi)\,P^{(\nu-1)}(n\varphi) + \cdots + A_\nu(\varphi)\,P(n\varphi)$$
$$(n = 1, 2, \cdots, \infty),$$

wobei nun zunächst die $A_1(\varphi)$, $A_2(\varphi)$, $\ldots$, $A_\nu(\varphi)$ von n unabhängig sind.

D. h. $P(\varphi)$ genügt der linearen Differentialgleichung

$$(13) \qquad P^{(\nu)}(\varphi) = A_1(\varphi)\,P^{(\nu-1)}(\varphi) + \cdots + A_\nu(\varphi)\,P(\varphi).$$

Die $A_1(\varphi), \ldots, A_\nu(\varphi)$ sind aber auch von φ unabhängig; denn wenn ich $n\varphi$ für φ setze, müssen sie ungeändert bleiben; sonach sind sie constante Zahlen.

$$(14) \qquad P^{(\nu)}(\varphi) = c_1\,P^{(\nu-1)}(\varphi) + \cdots + c_\nu\,P(\varphi).$$

Also

(15) $$P(\varphi) = d_1 e^{b_1\varphi} + d_2 e^{b_2\varphi} + \cdots + d_\nu e^{b_\nu\varphi},$$

wenn wir den Specialfall von Doppelwurzeln zunächst ausschliessen. Daraus folgt nun sofort

$$f(z) = z^\nu - g_1(\varphi)\, z^{\nu-1} - \cdots - g_\nu(\varphi) = \prod_{i=1}^{i=\nu} (z - a_i e^{b_i\varphi}) = 0.$$

Denn dann wird in der That

$$P_n(\varphi) = P(n\varphi) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \cdots + C_\nu z_\nu^n.$$

Sonach folgt:

Soll die Function $P(\varphi)$ der Functionalgleichung

(10) $$P[(n+\nu)\varphi] = g_1(\varphi) P[(n+\nu-1)\varphi] + \cdots + g_\nu(\varphi) P(n\varphi)$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

genügen, so müssen die Wurzeln von

(16) $$f(z) = z^\nu - g_1(\varphi) z^{\nu-1} - \cdots - g_\nu(\varphi) = 0$$

die Form

(17) $$z_i = a_i e^{b_i\varphi}$$

haben, und es wird dann

(18) $$P(\varphi) = d_1 e^{b_1\varphi} + d_2 e^{b_2\varphi} + \cdots + d_\nu e^{b_\nu\varphi}$$

die gesuchte Function.

Nur dieser einfache Fall ermöglicht eine Lösung jener Functionalgleichung. —

Hat $f(z)$ vielfache Wurzeln, so treten als Ersatz für die zusammenfallenden Terme der Function $P(\varphi)$ in bekannter Weise Glieder hinzu, die durch mehrfache Differentiation von $e^{b_k\varphi}$ nach den b_k entstehen, also Terme der Form

(19) $$\varphi e^{b_k\varphi}, \quad \varphi^2 e^{b_k\varphi}, \ldots .$$

So genügen die beiden Functionen e^φ und φe^φ, und sonach allgemein

$$P(\varphi) = e^\varphi (a + b\varphi)$$

der Functionalgleichung

$$P[(n+2)\varphi] = 2e^\varphi P[(n+1)\varphi] - e^{2\varphi} P[n\varphi]$$

und es wird

$$f(z) = (z - e^\varphi)^2.$$

§ 3.

Recursionsformeln mit von n abhängigen Coefficienten.

Wie die Functionen $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ der Recursionsformel

(1) $$P_{n+2} = 2\cos\varphi\, P_{n+1} - P_n \quad (n = 1, 2, \cdots, \infty)$$

genügen, so befriedigen auch die Functionen

$$P_n^{(k)} = \frac{(n-k)!}{(n+k-1)!\,n}\,\frac{d^k \sin n\varphi}{dx^k}, \quad \text{resp.} \quad \frac{(n-k)!}{(n+k-1)!\,n}\,\frac{d^k \cos n\varphi}{dx^k}$$

eine Recursionsformel, nämlich

$$(2) \qquad (n+k)\,P_{n+1}^{(k)} - 2nx\,P_n^{(k)} + (n-k)\,P_{n-1}^{(k)} = 0$$
$$(n = 1, 2, \ldots \infty)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Der charakteristische Unterschied der beiden Recursionsformeln ist jedoch der, dass die Coefficienten der zweiten von n selbst abhängen, dass sich also auf sie unsere allgemeinen Sätze zunächst nicht anwenden lassen. Beachten wir indessen, dass (2) mit wachsendem n, falls k endlich ist, in die oben behandelte (1) übergeht, so können wir unsere Resultate, da sie sich auf den Fall $n = \infty$ beziehen, auch hier anwenden. Sonach wird

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}^{(k)}}{P_n^{(k)}} = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

wenn x nicht auf der reellen Axe zwischen $+1$ und -1 liegt. Dass die Nullstellen von $P_n^{(k)}$ auf dieser Strecke liegen, folgt schon aus dem Rolle'schen Theorem.

Nur der eine Fall, dass k zugleich mit n unendlich gross wird, ist noch von Interesse. Setzen wir

$$k = \alpha n,$$

wobei

$$0 < \alpha < 1$$

ist, so geht Formel (2) mit wachsendem n über in

$$(4) \qquad (1+\alpha)\,P_{n+1}^{(k)} - 2x\,P_n^{(k)} + (1-\alpha)\,P_{n-1}^{(k)} = 0.$$

Die zugehörige, quadratische Gleichung

$$(5) \qquad (1+\alpha)\,z^2 - 2xz + (1-\alpha) = 0$$

hat als Wurzeln

$$(6) \qquad z = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + \alpha^2 - 1}}{1+\alpha},$$

sodass nunmehr die Nullstellen von $P_n^{(k)}(x)$ nicht mehr auf der ganzen Strecke von -1 bis $+1$ liegen, sondern sich auf das engere Intervall

von $\quad -\sqrt{1-\alpha^2} \quad$ bis $\quad +\sqrt{1-\alpha^2}$

zusammenziehen. Wenn αn eine ganze Zahl $< n$ ist, so liegen die Nullstellen der ganzen Functionen von $x = \cos\varphi$

$$(7) \qquad \frac{d^{\alpha n} \sin n\varphi}{dx^{\alpha n}} \quad \text{und} \quad \frac{d^{\alpha n} \cos n\varphi}{dx^{\alpha n}}.$$

zwischen

$$-\sqrt{1-\alpha^2} \quad \text{und} \quad +\sqrt{1-\alpha^2}$$

auf der reellen Axe. Für

$$n = 8, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

wird z. B. $$P_8(x) = 56x^4 - 24x^2 + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 0{,}618, \quad x_{3,4} = \pm 0{,}216$$

und $$\sqrt{1-\alpha^2} = \pm 0{,}866.$$

Im Wesentlichen bleiben also unsere allgemeinen Sätze auch in dieser Erweiterung bestehen.

Damit ist nun zum Schluss auch die Möglichkeit einer Anwendung auf die Kugelfunctionen gegeben, zu welcher uns die Analogie vieler durch unsere allgemeinen Sätze erhaltenen Resultate mit solchen aus der Theorie der Kugelfunctionen noch besonders veranlasst.

Die Kugelfunctionen $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ genügen der Recursionsformel

$$(8) \qquad (n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,P_n(x) + n\,P_{n-1}(x) = 0$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Die Coefficienten enthalten hierin zwar n; lassen wir jedoch n in's Unendliche wachsen, worauf es bei unseren bisherigen, wie überhaupt bei allen auf die Convergenz bezüglichen Untersuchungen allein ankommt, so geht diese Formel in die soeben ausführlich behandelte über

$$(1) \qquad P_{n+1}(x) - 2x\,P_n(x) + P_{n-1}(x) = 0,$$

sodass hierin wesentlich die erwähnte Uebereinstimmung mancher Sätze beruht. So liegen die Nullpunkte der Kugelfunctionen auf der reellen Axe zwischen $+1$ und -1; so convergiren Entwicklungen nach Kugelfunctionen innerhalb einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1. Sonach müssen sich auch die Kugelfunctionen mit wachsendem n unseren oben behandelten Functionen nähern, sich also z. B. in der Form darstellen lassen

$$(9) \qquad g_1(x)\,(x + \sqrt{x^2-1})^n + g_2(x)\,(x - \sqrt{x^2-1})^n,$$

oder in dem Ausnahmefalle, dass

$$-1 < x < +1$$

ist, in der Form

$$(9a) \qquad f_1(\varphi)\cos n\varphi + f_2(\varphi)\sin n\varphi.$$

In der That treten einerseits diese Darstellungen aus gewissen von Heine*) gegebenen Formeln in Evidenz, andrerseits ergiebt sich hieraus eine sehr einfache Ableitung für jene Formeln.

*) Heine: Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Aufl., S. 174.

Es handelt sich bei Heine gerade um die Bestimmung der Grenzwerthe, welchen sich die Kugelfunctionen mit wachsendem n nähern; es findet sich dort für reelles, positives $x > 1$ und unendliches n

$$(10)\qquad \begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{n\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ Q_n(x) &= \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\sqrt{\frac{\pi}{n}} \end{aligned},$$

wenn

$$\xi = x - \sqrt{x^2-1}$$

ist.

In der That wird also

$$(11)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = x+\sqrt{x^2-1},\quad \lim_{n=\infty}\frac{Q_{n+1}(x)}{Q_n(x)} = x-\sqrt{x^2-1}.$$

Dass sich der zweite Quotient der kleineren Wurzel nähert, liegt daran, dass $Q_n(x)$ nicht dem Bereich der ganzen rationalen Functionen angehört, dass sonach in dem durch $Q_n(x)$ erweiterten Bereich $f(z) = 0$ zerfallen kann.

Ferner gilt nach dem Früheren obiges Resultat für beliebiges x, nur nicht für

$$-1 < x < +1$$

also weiter als bei Heine angegeben.

Den Ausnahmefall

$$-1 < x < +1 \quad \text{oder} \quad |\xi| = 1$$

muss Heine gesondert behandeln, und da dieses gerade der Fall ist, in welchem die quadratische Gleichung zwei conjugirt complexe Wurzeln besitzt, nähert sich jetzt der Quotient auch nicht einem Grenzwerthe.

Für grosses n muss daher jetzt eine Darstellung der folgenden Art gelten

$$(9a)\qquad P_n(x) = c_n\left(f(\varphi)\cos n\varphi + g(\varphi)\sin n\varphi\right),$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1,$$

wie wir auch direct dadurch zeigen können, dass wir hieraus die entsprechenden Heine'schen Formeln ableiten. Zur Bestimmung der Functionen $f(\varphi)$ und $g(\varphi)$ dient dabei die Differentialgleichung, welcher die Kugelfunctionen genügen

$$(10)\qquad \frac{d^2y}{d\varphi^2} + \operatorname{cotg}\varphi\,\frac{dy}{d\varphi} + n(n+1)\,y = 0, \quad x = \cos\varphi.$$

Setzen wir hierin

$$(11)\qquad y = f(\varphi)\cos n\varphi + g(\varphi)\sin n\varphi,$$

so ergiebt sich für grosse Werthe von n

$$2g'(\varphi) + g(\varphi)\operatorname{cotg}\varphi + f(\varphi) = 0,$$
$$2f'(\varphi) + f(\varphi)\operatorname{cotg}\varphi - g(\varphi) = 0,$$

woraus

$$4f''(\varphi) + 4\operatorname{cotg}\varphi f'(\varphi) - \frac{1}{\sin^2\varphi} f(\varphi) = 0 \tag{12}$$

folgt, welcher Differentialgleichung auch $g(\varphi)$ genügt. 2 particuläre Integrale derselben sind

$$\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{\varphi}{2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\operatorname{cotg}\tfrac{\varphi}{2}};$$

sonach wird

$$y_1 = \sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{\varphi}{2}}\cos n\varphi + \sqrt{\operatorname{cotg}\tfrac{\varphi}{2}}\sin n\varphi,$$
$$y_2 = \sqrt{\operatorname{cotg}\tfrac{\varphi}{2}}\cos n\varphi - \sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{\varphi}{2}}\sin n\varphi. \tag{13}$$

Da nun

$$\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{\varphi}{2}} = \sin\tfrac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{2}{\sin\varphi}},$$
$$\sqrt{\operatorname{cotg}\tfrac{\varphi}{2}} = \cos\tfrac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{2}{\sin\varphi}}$$

ist, so wird

$$y_1 = \sqrt{\frac{2}{\sin\varphi}}\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\varphi,$$
$$y_2 = \sqrt{\frac{2}{\sin\varphi}}\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\varphi,$$

oder

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}}\sin\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\varphi + \tfrac{\pi}{4}\right],$$
$$y_2 - y_1 = \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}}\cos\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\varphi + \tfrac{\pi}{4}\right]. \tag{14}$$

Dieses sind aber bis auf gewisse, leicht zu bestimmende Zahlenfactoren die Formeln (28b und 28c, S. 175), welche Heine für die Functionen $P_n(\cos\varphi)$ und $Q_n(\cos\varphi)$ aufgestellt hat.

Unsere früheren Ableitungen werden sich also bisweilen auch auf den Fall ausdehnen lassen, in welchem die Coefficienten der Recursionsformel die Grösse n selbst enthalten

$$P'_{n+\nu} = a_{n,1}P'_{n+\nu-1} + a_{n,2}P'_{n+\nu-2} + \cdots + a_{n,\nu}P'_n \quad (n = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{15}$$

wenn sich nämlich die Coefficienten mit wachsendem n festen, von n unabhängigen Grenzwerthen:

$$\lim_{n=\infty} a_{n,k} = a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{16}$$

nähern.

Doch gehen wir hierauf, da hierdurch die Natur der früheren Betrachtungen wesentlich geändert würde, nicht näher ein.

Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Functionen. II.

Von

J. Lüroth in Freiburg i. Br.

Im 42. Bande dieser Annalen Seite 457 ff. habe ich einen Beweis des von Bertini gegebenen Satzes veröffentlicht, dass ein lineares System von ganzen Functionen, wenn jede Function des Systems zerfällt, entweder einen allen Functionen des Systems gemeinsamen Factor hat, oder in Functionen zerfällt, die alle einem Büschel angehören. Ich stützte mich bei diesem Beweise auf einen Satz von Gordan über rationale Functionen, deren Werthe eine Mannigfaltigkeit von einer Dimension bilden. In der vorliegenden zweiten Mittheilung über den fraglichen Gegenstand will ich zeigen, dass der Satz Bertini's auch ohne Benützung des Gordan'schen Theoremes bewiesen werden kann und dann seinerseits dieses herzuleiten gestattet. Citate von Paragraphen oder Gleichungen der ersten Abhandlung, von der ich nur die ersten fünf Paragraphen hier benütze, sollen durch eine vorgesetzte römische Eins bezeichnet sein.

§ 1.

Die Gleichung I (8) Seite 461

$$\Gamma(x;\xi;y)\,.\,\Delta(x;\xi;y) = f(\xi)\,f(x;y;\varphi)$$

lautet, wenn man für $f(x;y;\varphi)$ seinen Werth setzt,

(1) $$\Gamma(x;\xi;y)\,\Delta(x;\xi;y) = f(\xi)\,.\,f(x;y;z) - f(x)\,.\,f(\xi;y;z).$$

Man bestimme nun die Grössen $\xi_1'\,\xi_2'\ldots\xi_p'$ so, dass

(2) $$g(\xi';y;z;w') = 0,\quad g(\xi';y;z;w'') \neq 0 \cdots g(\xi';y;z;w^{(n)}) \neq 0,\quad f(\xi') \neq 0$$

ist. Dies ist möglich, denn die Functionen $g(\xi';y;z;w^{(\lambda)})$, für $\lambda = 1, 2, \ldots n$, sind in Bezug auf die x gegenseitig theilerfremd (I § 2); und $f(x)$ ist theilerfremd zu $g(x;y;z;w')$, weil ein gemeinsamer Theiler nur die x enthalten könnte, also ein von den y und z

unabhängiger Theiler von $f(x; y; z)$ wäre, einen solchen aber haben wir ausgeschlossen. Trägt man diese Werthe der ξ in die Gleichung (1) ein, so folgt

$$(3) \qquad f(x; y, z) = \frac{\Gamma(x; \xi'; y) \cdot \Delta(x; \xi'; y)}{f(\xi')}.$$

Die Function $\Gamma(x; \xi; y)$ ist, weil sie (I Seite 461)

$$= \gamma(\xi; y)\, g\left(x; y; \varphi(\xi; y); W(\xi; y)\right)$$

ist, in Bezug auf die x von der m^{ten} Dimension höchstens. Wäre nun $\Gamma(x; \xi'; y)$ von niedrigerer Dimension oder würde sie zerfallen, so hätte nach (3) $f(x; y; z)$ einen Factor, dessen Dimension in den z kleiner als m wäre, gegen die in I § 2 gemachte Annahme über m. Also muss $\Gamma(x; \xi'; y)$ von der m^{ten} Dimension und unzerlegbar sein.

Daraus folgt, dass auch $\Gamma(x; \xi; y)$, wo nun die ξ ganz beliebig sind, unzerlegbar und von der m^{ten} Dimension in Bezug auf die z sein muss. Nach einer Bemerkung gegen Ende von I § 3 Seite 461 kann aber Γ auch keinen Factor haben, der von den x frei ist. Somit ist es als Function der x, der ξ und der y unzerlegbar.

Vertauscht man in (1) die x mit den ξ, so folgt

$$(4) \qquad \Gamma(x; \xi; y) \cdot \Delta(x; \xi; y) = -\Gamma(\xi; x; y)\, \Delta(\xi; x; y).$$

Wäre $\Delta(x; \xi; y)$ nicht prim zu $\Gamma(\xi; x; y)$, so müsste es durch diese Function theilbar sein. Dann aber würde $\Delta(\xi; \xi; y)$ gleich Null sein, entgegen I § 3 Ende. Folglich muss $\Gamma(x; \xi; y)$ durch $\Gamma(\xi; x; y)$ theilbar sein. Ist $c(x; \xi; y)$ der in den x, den ξ und den y ganze Quotient, so ist

$$\Gamma(x; \xi; y) = \Gamma(\xi; x; y) \cdot c(x; \xi; y).$$

Vertauscht man die x mit den ξ, so erhält man die Gleichung

$$c(x; \xi; y) \cdot c(\xi; x; y) = 1,$$

die zeigt, dass c constant ist und den Werth $+1$ oder -1 hat. Wäre $c = +1$, so gäbe (4)

$$\Delta(x; \xi; y) = -\Delta(\xi; x; y)$$

und

$$\Delta(x; x; y) = 0,$$

was nicht möglich ist. Also muss $c = -1$ und

$$\Gamma(x; \xi; y) = -\Gamma(\xi; x; y)$$

sein, welche Gleichung lehrt, dass Γ auch in Bezug auf die ξ von der Dimension m ist.

Sind in der Function $f(x; y; z)$ keine y vorhanden, so enthält auch Γ diese Variabeln nicht. Sind aber y vorhanden, so muss entweder Γ oder Δ von ihnen unabhängig sein. Wäre Δ nicht von den y abhängig, so wäre es nach Gleichung (1) ein Theiler der Functionen I (9) Seite 461, also entweder deren grösster gemeinsamer Theiler oder

ein Factor dieses Theilers. Das erste ist nicht möglich, weil sonst nach I § 5 Seite 464 (Schluss) $\Delta(x; x; y) = 0$ sein müsste. Wäre aber Δ nicht der volle grösste gemeinsame Theiler, so müsste nach (1) ein weiterer Factor von ihm Γ theilen und dies ist nicht möglich, weil Γ unzerlegbar ist. Folglich muss Δ die y enthalten und Γ von ihnen frei sein, so dass man es einfach mit $\Gamma(x; \xi)$ bezeichnen kann.

§ 2.

Aus den Gleichungen (3) und I (2) Seite 459 folgt nun

$$\Gamma(x; \xi').\Delta(x; \xi'; y) = Ch(y; z) f(\xi') g(x; y; z; w') \ldots g(x; y; z; w^{(n)}).$$

Da $\Gamma(x; \xi')$ als Function der x nicht zerfällt, so muss einer der Factoren rechts durch diese Function theilbar sein. Wäre es einer aus der Reihe

$$g(x; y; z; w''), \cdots g(x; y; z; w^{(n)}),$$

so müsste, weil $\Gamma(\xi'; \xi') = 0$ ist, die betreffende Function $g(x; y; z; w^{(\lambda)})$ verschwinden, wenn die x den ξ' gleich gesetzt werden, gegen die Bedingungen (2). Folglich muss $g(x; y; z; w')$ theilbar sein. Da diese Function in den x von derselben Dimension ist wie $\Gamma(x; \xi')$, so ist der Quotient von den x unabhängig. Bezeichnen also die $t_1 t_2 \ldots t_p$ ganz unbestimmte Werthe, so ist

$$\frac{\Gamma(x; \xi')}{g(x; y; z; w')} = \frac{\Gamma(t; \xi')}{g(t; y; z; w')}.$$

Somit verschwindet die ganze Function der ξ

$$g(x; y; z; w') \Gamma(t; \xi) - g(t; y; z; w') \Gamma(x; \xi)$$

immer dann, wenn die ξ die Bedingungen (2) erfüllen. Weil aber die Function $g(\xi; y; z; w')$ nicht zerfällt als Function der ξ und die Bedingungen (2) erfüllbar sind, muss die letzte Differenz durch $g(\xi; y; z; w')$ theilbar sein. Da $\Gamma(t; \xi)$ und $\Gamma(x; \xi)$ in den ξ von der m^{ten} Dimension sind, wie $g(\xi; y; z; w')$, so ist der Quotient von den ξ nicht abhängig und kann bestimmt werden, indem man für die ξ die x setzt. So findet er sich $= \Gamma(t; x)$, womit sich die Gleichung

$$g(x; y; z; w') \Gamma(t; \xi) - g(t; y; z; w') \Gamma(x; \xi) = g(\xi; y; z; w') \Gamma(t; x)$$

ergiebt. Da diese Gleichung in den y und z rational ist, so gilt sie nicht nur für die eine Wurzel w' der Gleichung I (1) Seite 458, sondern für alle Wurzeln. Und da man weiter annehmen kann, $g(x; y; z; w)$ sei in Bezug auf w ganz und höchstens vom Grade $n - 1$, so gilt auch identisch für beliebige w die Gleichung

(5) $g(x; y; z; w) \Gamma(t; \xi) = g(t; y; z; w) \Gamma(x; \xi) - g(\xi; y; z; w) \Gamma(x; t).$

§ 3.

Aus dieser Gleichung kann man die beiden ganzen Functionen g und Γ finden. Bezeichnet man mit $A_1(x), A_2(x) \ldots$ die linear unabhängigen Potenzen und Producte der x, wie sie in einer ganzen Function m^{ter} Dimension vorkommen können, in einer beliebigen Folge, so kann man setzen

$$g(x; y; z; w) = \sum A_\lambda(x) B_\lambda(y; z; w),$$

wo die $B_\lambda(y; z; w)$ rationale Functionen der Argumente bezeichnen. Man kann in Uebereinstimmung mit der Festsetzung, dass ein Coefficient von g gleich Eins sei, annehmen, es sei $B_1 = 1$. Weiter kann man setzen

$$\Gamma(x; \xi) = \sum A_\lambda(x) C_\lambda(\xi)$$

wo die C_λ ganze Functionen der ξ sind.

Ersetzt man in (5) die Functionen, die die x enthalten, durch ihre Ausdrücke, so müssen, weil die $A_\lambda(x)$ linear unabhängig sind, deren Coefficienten rechts und links gleich sein. Weil $B_1 = 1$ ist, entstehen so die Beziehungen

$$\begin{gathered} \Gamma(t; \xi) = g(t; y; z; w)\, C_1(\xi) - g(\xi; y; z; w)\, C_1(t), \\ \Gamma(t; \xi) B_\lambda(y; z; w) = g(t; y; z; w)\, C_\lambda(\xi) - g(\xi; y; z; w)\, C_\lambda(t) \\ (\lambda = 2, 3 \ldots). \end{gathered} \tag{6}$$

Die Gleichung (6) zeigt zunächst, dass die Function C_1 nicht identisch Null sein kann und liefert dann weiter

$$\sum A_\lambda(t) C_\lambda(\xi) = C_1(\xi) \sum A_\lambda(t) B_\lambda(y; z; w) - C_1(t)\, g(\xi; y; z; w)$$

oder

$$\sum_{\lambda=2} A_\lambda(t) \frac{C_\lambda(\xi) - C_1(\xi) B_\lambda(y; z; w)}{g(\xi; y; z; w)} = - C_1(t). \tag{7}$$

Wären die Coefficienten der $A_\lambda(t)$ nicht alle constant, so könnte man durch Abänderung der Werthe der ξ, y, z und w und Subtraction der so entstehenden Gleichung von der ursprünglichen eine homogene lineare Gleichung zwischen den $A_\lambda(t)$ erhalten, die nicht möglich ist. Folglich ist

$$\frac{C_\lambda(\xi) - C_1(\xi) B_\lambda(y; z; w)}{g(\xi; y; z; w)} = D_\lambda \quad (\lambda = 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

von den ξ, y, z und w unabhängig. Es können nicht alle D_λ Null sein. Denn sonst wäre

$$B_\lambda(y; z; w) = \frac{C_\lambda(\xi)}{C_1(\xi)},$$

daher beide Grössen constant, und g wäre von den y, z, w unabhängig.

Es sei die Bezeichnung so eingerichtet, dass $D_2 \neq 0$ sei. Aus den beiden in (8) enthaltenen Gleichungen

$$C_2(\xi) - C_1(\xi) B_2(y; z; w) = D_2 g(\xi; y; z; w),$$
$$C_\lambda(\xi) - C_1(\xi) B_\lambda(y; z; w) = D_\lambda g(\xi; y; z; w),$$
$$(\lambda = 3, 4 \ldots)$$

ergiebt sich jetzt die Gleichung

$$\frac{D_\lambda C_2(\xi) - D_2 C_\lambda(\xi)}{C_1(\xi)} = D_\lambda B_2(y; z; w) - D_2 B_\lambda(y; z; w)$$

die, wegen der Trennung der Variabeln, zeigt, dass beide Seiten constant, $= -d_\lambda$ sind und dass

$$B_\lambda(y; z; w) = \frac{D_\lambda}{D_2} B_2(y; z; w) + \frac{d_\lambda}{D_2},$$
$$C_\lambda(\xi) = \frac{D_\lambda}{D_2} C_2(\xi) + \frac{d_\lambda}{D_2} C_1(\xi)$$
$$(\lambda = 3, 4 \ldots)$$

ist. Mit den Bezeichnungen

$$A(x) = A_1(x) + \frac{1}{D_2}\{d_3 A_3(x) + d_4 A_4(x) + \cdots\},$$
$$B(x) = A_2(x) + \frac{1}{D_2}\{D_3 A_3(x) + D_4 A_4(x) + \cdots\}$$

wird dann

$$g(x; y; z; w) = A(x) + B_2(y; z; w) B(x),$$
$$\Gamma(x; \xi) = A(x) C_1(\xi) + B(x) C_2(\xi). \tag{9}$$

Die Gleichung (7) giebt aber

$$-C_1(t) = \sum_{\lambda=2} A_\lambda(t) D_\lambda = D_2 B(t)$$

und die erste der Gleichungen (8)

$$C_2(\xi) = D_2 A(\xi),$$

so dass

$$\Gamma(x; \xi) = D_2 [A(\xi) B(x) - A(x) B(\xi)]$$

wird. Da ein constanter Factor unwesentlich ist, kann man

$$\Gamma(x; \xi) = A(x) B(\xi) - A(\xi) B(x) \tag{10}$$

setzen. Der nämliche Ausdruck ergiebt sich auch wenn man die

Function g so bestimmt, dass sie verschwindet, wenn die x den ξ gleichgesetzt werden. Der Ausdruck von g in (9) ist, abgesehen von der Bezeichnung, mit dem am Schlusse von I § 9 Seite 470 gegebenen identisch.

§ 4.

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ zwei ganze, theilerfremde Functionen der $x_1 x_2 \ldots x_p$ sind und wenn $f(x) - \varepsilon g(x)$ bei unbestimmtem ε mit Hilfe von zwei ganzen Functionen $a(x)$ und $b(x)$ der x sich in Factoren der Form

$$a(x) - \lambda b(x)$$

zerlegen lässt, so werden $f(x)$ und $g(x)$ ganze homogene Functionen gleichen Grades von $a(x)$ und $b(x)$ und der Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$ lässt sich durch den $\frac{a(x)}{b(x)}$ rational ausdrücken. Wenn umgekehrt der Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$ sich rational durch $\frac{a(x)}{b(x)}$ darstellen lässt, dessen Zähler und Nenner ganze theilerfremde Functionen der x sind, so kann man

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi\big(a(x), b(x)\big)}{\psi\big(a(x), b(x)\big)}$$

setzen, wo nun φ und ψ ganze homogene Functionen gleichen Grades, die man als theilerfremd annehmen kann, der $a(x)$ und $b(x)$ sein werden.

Diese beiden Functionen sind aber auch als Functionen der x theilerfremd. Denn sonst müsste ein Linearfactor $\alpha a(x) + \beta b(x)$ des Zählers mit einem $\gamma a(x) + \delta b(x)$ des Nenners einen gemeinsamen Theiler haben, woraus folgen würde, dass $a(x)$ und $b(x)$ nicht theilerfremd wären, weil ja $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ sein muss. Da in der letzten Gleichung beiderseits in Zähler und Nenner theilerfremde Functionen stehen, muss also

$$f(x) = \varphi\big(a(x), b(x)\big),$$
$$g(x) = \psi\big(a(x), b(x)\big)$$

sein. Dann kann man auch $f(x) - \varepsilon g(x)$ in lauter Factoren der Form $a(x) - \lambda b(x)$ zerlegen, während ε unbestimmt ist.

Hat man $\frac{f(x)}{g(x)}$ als rationale Function von $\frac{a(x)}{b(x)}$ dargestellt, so kann man vielleicht diesen letzten Bruch selbst wieder durch einen andern ausdrücken, dann nämlich, wenn auch $a(x) - \varepsilon b(x)$ bei beliebigem ε zerfällt. Dies geht nicht an, wenn man $\frac{f(x)}{g(x)}$ rational durch die Quotienten der beiden Functionen $A(x)$ und $B(x)$ ausdrückt, die sich ergeben, wenn man $f(x) - \varepsilon g(x)$, nach der Vorschrift der ersten Abhandlung,

in Factoren von möglichst niedriger Dimension zerlegt; dann ist ja $g(x; z; w)$, das nach (9) § 3, $= A(x) + B_2(z; w)\, B(x)$ ist, unzerlegbar und umsomehr ist $A(x) - \lambda B(x)$ bei unbestimmtem λ nicht weiter zerlegbar.

Des kürzeren Ausdrucks wegen will ich im folgenden einen Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$ *normal und von der n^{ten} Dimension* nennen, *wenn $f(x) - z\,g(x)$ für unbestimmte z unzerlegbar und von der n^{ten} Dimension ist.*

Ein rationaler Bruch ist also entweder normal oder er lässt sich durch einen normalen Bruch rational ausdrücken.

§ 5.

Es mögen die beiden Brüche $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{h(x)}{k(x)}$ von den Dimensionen ν_1 und ν_2, wo Zähler und Nenner relativ prim sind, einer Gleichung

$$F\left(\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{h(x)}{k(x)}\right) = 0$$

genügen, wobei $F(t, u)$ eine ganze Function von t und u ist, deren Coefficienten die x nicht enthalten sollen. Sind beide Brüche normal und von verschiedener Dimension, so sei etwa $\nu_1 > \nu_2$. Man wähle nun t' so, dass $f(x) - t'\,g(x)$ nicht zerfällt und von der Dimension ν_1 ist, was nach der Annahme möglich ist. Die Gleichung

$$F(t', u) = 0$$

möge dann die verschiedenen Wurzeln $u', v', \ldots$ haben. Dann muss für *die x*, für welche $f(x) - t'\,g(x)$ verschwindet, das Product

$$\big(h(x) - u'\,k(x)\big) \cdot \big(h(x) - v'\,k(x)\big) \cdots$$

gleich Null sein und also, weil $f(x) - t'\,g(x)$ irreducibel ist, einer der Factoren durch diese Function theilbar sein. Alle diese Factoren sind aber niedrigerer Dimension, so dass eine Theilung nicht angeht, ausser es wäre $\frac{h(x)}{k(x)}$ constant, was selbstverständlich ausgeschlossen ist. Daher kann ν_1 nicht $> \nu_2$ sein; ebensowenig kann es $< \nu_2$ sein. Ist es aber $= \nu_2$ und etwa der erste jener Factoren theilbar, so ist der Quotient constant $= c'$, so dass also

$$h(x) - u'\,k(x) = c'\,\big(f(x) - t'\,g(x)\big)$$

sich ergiebt. Ersetzt man t' durch einen andern Werth t'', so kommt eine Gleichung

$$h(x) - u''\,k(x) = c''\,\big(f(x) - t''\,g(x)\big).$$

Da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nicht constant sein soll und $t' \neq t''$ ist, kann auch u' nicht $= u''$

sein und die beiden Gleichungen ergeben dann, dass $\frac{h(x)}{k(x)}$ eine linear gebrochene Function von $\frac{f(x)}{g(x)}$ ist.

Ist der eine der beiden Brüche, etwa $\frac{f(x)}{g(x)}$, nicht normal, so kann man ihn durch den normalen Bruch $\frac{A(x)}{B(x)}$ in rationaler Form darstellen. Die gegebene algebraische Gleichung geht dann in eine Gleichung zwischen $\frac{A(x)}{B(x)}$ und $\frac{h(x)}{k(x)}$ über, die beide normal sind, daher dann $\frac{h(x)}{k(x)}$ eine lineare gebrochene Function von $\frac{A(x)}{B(x)}$ sein muss. Ist auch $\frac{h(x)}{k(x)}$ nicht normal, so kann man diesen Bruch als rationale Function eines normalen Bruches $\frac{C(x)}{D(x)}$ darstellen. Die algebraische Gleichung liefert dann eine Beziehung zwischen den beiden normalen Brüchen $\frac{A(x)}{B(x)}$ und $\frac{C(x)}{D(x)}$, welche lehrt, dass der eine von diesen eine linear gebrochene Function des andern ist. Es kann also dann $\frac{h(x)}{k(x)}$ als rationale Function von $\frac{A(x)}{B(x)}$ betrachtet werden. Im Ganzen kann man somit sagen: besteht zwischen zwei rationalen Functionen der x eine algebraische Gleichung, deren Coefficienten die x nicht enthalten, so sind beide Functionen rationale Functionen der nämlichen rationalen Function $\frac{A(x)}{B(x)}$ der x.

§ 6.

Nach § 4 hat man dann

$$f(x) = \varphi\,\big(A(x), B(x)\big),$$
$$g(x) = \psi\,\big(A(x), B(x)\big),$$
$$h(x) = \varphi_1\big(A(x), B(x)\big),$$
$$k(x) = \psi_1\big(A(x), B(x)\big),$$

wobei von den ganzen homogenen Functionen $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1$ einerseits φ und ψ, andererseits φ_1 und ψ_1 von gleicher Dimension sind. Es haben also die beiden Functionen

$$\begin{aligned} &f(x)\,g(\xi) - f(\xi)\,g(x),\\ &h(x)\,k(\xi) - h(\xi)\,k(x), \end{aligned} \tag{11}$$

in welchen die $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_p$ ganz unbestimmte Variable sind, als Functionen der x und der ξ sicher den gemeinsamen Theiler

$$A(x)\,B(\xi) - A(\xi)\,B(x);$$

aber der ist möglicherweise nicht der grösste gemeinsame Theiler der

Functionen (11). Wie § 8 gezeigt werden wird, hat der grösste gemeinsame Theiler die Form

$$m(x)\,n(\xi) - m(\xi)\,n(x),$$

wo m und n ganze Functionen bezeichnen. Man kann also setzen

$$f(x)\,g(\xi) - f(\xi)\,g(x) = \{m(x)\,n(\xi) - m(\xi)\,n(x)\}\,.\,R(x;\xi).$$

Wenn man die ganze Function $R(x;\xi)$ der x und der ξ nach Potenzen und Producten der ξ ordnet, so mögen die Coefficienten, die ganze Functionen der x sind, $R_1, R_2, R_3, \ldots$ sein. Vergleicht man nun die Coefficienten der Potenzen und Producte der ξ in obiger Gleichung, so entstehen Gleichungen der Form

$$(12) \qquad g_i f(x) - f_i g(x) = m(x) \sum n_\varkappa R_\lambda - n(x) \sum m_\varrho R_\sigma,$$

in denen f_i, g_i, m_ϱ, $n_\varkappa$ die Coefficienten der Functionen $f(\xi)$, $g(\xi)$, $m(\xi)$, $n(\xi)$ sind. Die Summen auf der rechten Seite sind dabei je nach dem Index i verschieden zusammengesetzt, aber stets linear und homogen in den $R_1, R_2, \ldots$. Weil die Dimension der Function $R(x;\xi)$ in Bezug auf die ξ kleiner ist als die der Functionen $f(\xi)$ und $g(\xi)$, so ist die Zahl der Gleichungen (12) grösser, als die der Coefficienten $R_1, R_2, \ldots$, so dass man diese auf verschiedene Art eliminiren kann. Es entstehen dann Gleichungen der Form

$$f(x)\,P_1\big(m(x),\,n(x)\big) - g(x)\,Q_1\big(m(x),\,n(x)\big) = 0,$$
$$f(x)\,P_2\big(m(x),\,n(x)\big) - g(x)\,Q_2\big(m(x),\,n(x)\big) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die, ihrer Herleitung gemäss, identisch in den x sind und in denen P_1 und Q_1, P_2 und $Q_2, \ldots$ ganze homogene Functionen der Argumente bezeichnen. Diese Gleichungen ergeben

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Q_1\big(m(x),\,n(x)\big)}{P_1\big(m(x),\,n(x)\big)} = \frac{Q_2\big(m(x),\,n(x)\big)}{P_2\big(m(x),\,n(x)\big)} = \ldots$$

und weil diese für beliebige x bestehen, so müssen auch die Gleichungen

$$\frac{Q_1(y,\,z)}{P_1(y,\,z)} = \frac{Q_2(y,\,z)}{P_2(y,\,z)} = \ldots$$

für beliebige y und z richtig sein.

Es wäre möglich, dass in P_1 alle Coefficienten gleich Null herauskämen, so dass $P_1(y,z)$ bei beliebigen y und z Null wäre. Dann müsste es aber, weil $g(x)$ nicht $= 0$ ist, auch bei Q_1 eintreffen und umgekehrt, so dass immer die beiden Functionen eines Paares, P_i und Q_i, gleichzeitig identisch Null sein müssten.

Dies kann jedoch nicht bei allen Functionspaaren stattfinden, die man nach obiger Methode erhalten kann. Denn wären alle identisch Null, so würden die Ausdrücke

$$\eta P_1(y, z) - \xi Q_1(y, z),$$
$$\eta P_2(y, z) - \xi Q_2(y, z)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

für beliebige η, ξ, y und z Null sein. Diese entstehen aber, wie die Vergleichung mit (12) lehrt, aus den Gleichungen

$$g_i\eta - f_i\xi = y\sum n_\varkappa r_\lambda - z\sum m_\varrho r_\sigma$$

durch Elimination der r und ihr Verschwinden sagt aus, dass man diesen letzten Gleichungen durch passende Werthe der $r_1 r_2 \ldots$ genügen kann. Die Multiplication mit den entsprechenden Potenzen und Producten der ξ liefert dann die Gleichung

$$\eta g(\xi) - \xi f(\xi) = \big(yn(\xi) - zm(\xi)\big)\, r(\xi),$$

in der $r(\xi)$ eine ganze Function der ξ ist. Eine solche Gleichung ist aber nicht möglich. Man kann also sicher $\frac{f(x)}{g(x)}$ als rationale Function von $\frac{m(x)}{n(x)}$ darstellen, und das Gleiche gilt von $\frac{h(x)}{k(x)}$. Zu bemerken ist dass hierbei $\frac{m(x)}{n(x)}$ nicht ein normaler Bruch zu sein braucht. Man kann also unter Umständen $\frac{m(x)}{n(x)}$ rational durch einen andern Bruch $\frac{A(x)}{B(x)}$ ausdrücken, wobei aber dann die Umkehrung nicht möglich ist, also dieser nicht aus jenem rational berechnet werden kann. Da die Function $m(\xi) - \frac{m(x)}{n(x)}\, n(\xi)$ der grösste gemeinsame Theiler der Functionen

$$f(\xi) - \frac{f(x)}{g(x)}\, g(\xi),$$
$$h(\xi) - \frac{h(x)}{k(x)}\, k(\xi)$$

in Bezug auf die ξ ist, so kann sie rational durch die Coefficienten dieser beiden letzten Functionen dargestellt werden, so dass $\frac{m(x)}{n(x)}$ sich rational durch $\frac{f(x)}{g(x)}$ und $\frac{h(x)}{k(x)}$ ausdrücken lässt mit Coefficienten, die aus denen dieser beiden Brüche sich rational zusammensetzen, oder, wie man sagen kann, mit diesen einem Körper Ω angehören, in dem dann also auch die Coefficienten der Functionen $m(x)$ und $n(x)$ enthalten sind. In den linearen Gleichungen (12) kommen nur die Coefficienten der Functionen f, g, h, k, m, n vor; also sind die Coefficienten, mit welchen die Potenzen von $\frac{m(x)}{n(x)}$ in den Ausdrücken von $\frac{f(x)}{g(x)}$ und $\frac{h(x)}{k(x)}$ behaftet sind, ebenfalls in Ω enthalten.

Gesetzt es gäbe eine zweite rationale Function $\frac{m'(x)}{n'(x)}$ mit der Eigenschaft, dass sich $\frac{f(x)}{g(x)}$ und $\frac{h(x)}{k(x)}$ rational durch $\frac{m'(x)}{n'(x)}$ darstellen lassen und umgekehrt dieses wieder eine rationale Function jener beiden Brüche wird, dann muss sich $\frac{m(x)}{n(x)}$ rational aus $\frac{m'(x)}{n'(x)}$ berechnen lassen und umgekehrt, so dass der eine Bruch eine linear gebrochene Function des andern wird.

§ 7.

Wenn q rationale Functionen $f_1, f_2, \ldots f_q$, der Variabeln x, $q-1$ von einander unabhängigen algebraischen Gleichungen genügen, deren Coefficienten die x nicht enthalten, so kann man durch Elimination algebraische Gleichungen zwischen je zweien der q Functionen herleiten, deren Coefficienten ebenfalls von den x frei sind. Wenn nun die sämmtlichen Functionen normal sind, so folgt, dass jede sich als linear gebrochene Function einer jeder andern ausdrücken lässt. Sind nicht alle Functionen normal, sondern nur die $f_1, f_2, \ldots f_r$, so lassen sich die andern $f_{r+1} \ldots f_q$ als rationale Functionen von andern rationalen Functionen $\varphi_{r+1} \ldots \varphi_q$ darstellen, die selbst normal sind. Die gegebenen algebraischen Gleichungen gehen dann in solche zwischen den normalen Functionen $f_1 f_2 \ldots f_r\, \varphi_{r+1} \ldots \varphi_q$ über, aus welchen folgt, dass $f_2 \ldots \varphi_q$ linear gebrochene Functionen von f_1 sein müssen. Dann sind also $f_{r+1} \ldots f_r$ rationale Functionen von f_1. Ist endlich keine der Functionen f normal, so ergiebt sich auf ähnlichem Wege, dass alle Functionen $f_1 \ldots f_q$ sich rational durch eine andere Function müssen ausdrücken lassen. In allen Fällen giebt es also eine Function $\frac{A(x)}{B(x)}$, wo Zähler und Nenner ganz und theilerfremd sind, durch die sich alle Functionen $f_1(x), f_2(x) \ldots f_q(x)$ rational darstellen lassen.

Sei nun

$$f_i(x) = \frac{g_i(x)}{h_i(x)},$$

g_i und h_i ganz und theilerfremd, so folgt wie im § 4

$$g_i(x) = G_i(A, B),$$
$$h_i(x) = H_i(A, B),$$

wobei G_i und H_i ganze homogene Functionen gleichen Grades bezeichnen. Somit haben alle Functionen

(13) $\qquad g_i(x)\, h_i(\xi) - g_i(\xi)\, h_i(x) \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots q)$

den Factor

$$A(x)\, B(\xi) - A(\xi)\, B(x)$$

und folglich haben sie auch einen grössten gemeinsamen Theiler, dessen Form

$$m(x)\,n(\xi) - m(\xi)\,n(x)$$

ist. Die Function $\frac{m(x)}{n(x)}$ drückt sich dabei rational aus durch die Functionen $f_1(x), \ldots f_q(x)$ mit Coefficienten, die aus denen dieser Functionen sich rational zusammensetzen. Die Coefficienten in $\frac{m(x)}{n(x)}$ gehören daher dem Körper Ω an, der die Coefficienten der gegebenen Functionen enthält. Weil

$$g_i(x)\,h_i(\xi) - g_i(\xi)\,h_i(x),$$

für $i = 1, 2, \ldots q$, durch

$$m(x)\,n(\xi) - m(\xi)\,n(x)$$

theilbar ist, so folgt wie in § 6, dass auch $\frac{g_i(x)}{h_i(x)}$ eine rationale Function von $\frac{m(x)}{n(x)}$ wird mit Hülfe von Coefficienten, die Ω angehören.

Wenn also die q rationalen Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ $\ldots$ $f_q(x)$ $q-1$ unabhängigen algebraischen Gleichungen genügen, so kann man aus ihnen einen rationalen Ausdruck zusammensetzen, durch den sich jede der gegebenen Functionen in rationaler Weise darstellen lässt. Die dabei auftretenden Coefficienten sind alle in Ω enthalten. Hiermit ist der Satz von Gordan bewiesen (Math. Ann. Bd. 29, Seite 318).

§ 8.

Um den vorhin benutzten Satz über die Form des grössten gemeinsamen Theilers zu beweisen, seien

$$g_1(x),\ h_1(x);\ g_2(x),\ h_2(x);\ \ldots\ g_q(x),\ h_q(x)$$

q Paare von ganzen Functionen der Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_p$ so beschaffen, dass die Functionen eines jeden Paares relativ prim sind, besonders also, dass deren Quotient nicht constant ist. Ob Gleichungen zwischen diesen Functionen bestehen, wie dies zuletzt vorausgesetzt wurde, kommt hier nicht in Betracht.

Es handelt sich dann um den grössten gemeinsamen Theiler $M(x;\xi)$ der Functionen

$$g_i(x)\,h_i(\xi) - g_i(\xi)\,h_i(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots q) \tag{14}$$

in denen, wie bisher, durch ξ ein ganz unbestimmtes Werthsystem der Variabeln bezeichnet ist, wenn diese Functionen einen gemeinsamen Theiler haben, was nicht der Fall zu sein braucht. Wenn man die in I, § 3, Seite 459 durchgeführte Untersuchung auf die Function $g_1(x) - z h_1(x)$ anwendet, so findet man, dass die Function

$$g_1(x)\,h_1(\xi) - g_1(\xi)\,h_1(x)$$

keinen Theiler hat, der nur die x enthält, woraus folgt, dass sie auch keinen Theiler hat, der nur von den ξ abhängt. Weiter zeigt die citirte Betrachtung, dass jene Function auch keinen Theiler in einer höheren als der ersten Potenz enthalten kann. Also kann auch der grösste gemeinsame Theiler $M(x;\xi)$ des Functionssystems (14) weder einen Factor haben, der nur die x oder nur die ξ enthielte, noch einen Factor in höherer als der ersten Potenz enthalten. Durch eine Betrachtung, die der in I, §§ 4 und 5 angestellten ganz analog ist und bei der nur die dort benutzten Ungleichungen $f(x^0)\neq 0$, $f(\xi^0)\neq 0$ hier durch die Bedingungen zu ersetzen sind, dass keine der Functionen $h_i(x^0)$ und $h_i(\xi^0)$, für $i = 1, 2 \ldots q$, verschwindet, folgen dann, wenn

$$g_i(x)\,h_i(\xi) - g_i(\xi)\,h_i(x) = M(x;\xi)\,R_i(x;\xi)$$
$$(i = 1, 2 \ldots q)$$

gesetzt wird, aus $M(x^0;\xi^0) = 0$ und gewissen Ungleichungen, die Gleichungen

$$g_i(x^0)\,h_i(\eta) - g_i(\eta)\,h_i(x^0) = \frac{h_i(x^0)}{h_i(\xi^0)}\,M(\xi^0;\eta)\;Q_i(\xi^0;\eta),$$

die lehren, dass $M(\xi^0;\eta)$ die sämmtlichen Functionen links und also deren grössten gemeinsamen Theiler $M(\eta;x^0)$ theilt. Der Quotient beider wird constant, weil beide in η von der Dimension μ sind, so dass

$$M(x^0;\eta) = c\,M(\xi^0;\eta)$$

ist, wo c von den η nicht abhängt.

Setzt man also für die η ein ganz beliebiges Werthsystem $\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_p$, so folgt, dass

$$M(x^0;\eta)\,M(\xi^0;\zeta) - M(x^0;\zeta)\,M(\xi^0;\eta) = 0$$

ist, wenn die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Da aber die Ungleichungen mit der Gleichung $M(x^0;\xi^0) = 0$ verträglich sind und $M(x;\xi)$ keine Primfactoren in höherem als dem ersten Grad enthält*), muss

$$M(x;\eta)\,M(\xi;\zeta) - M(x;\zeta)\,M(\xi;\eta)$$

durch $M(x;\xi)$ theilbar sein. Der Quotient kann, wegen der Gleichheit der Dimensionen, die x und die ξ nicht enthalten, so dass er eine Function $T(\eta;\zeta)$ der η und der ϱ allein ist. Vertauscht man die x mit den ξ, so kommt dann

$$M(x;\xi) = -M(\xi;x);$$

und hieraus folgt weiter

$$M(x;x) = 0.$$

*) I, Seite 464, Z. 15 v. o. muss es statt „durch $A(x;\xi)$ theilbar sein" heissen „muss mit $A(x;\xi)$ einen gemeinsamen Theiler haben".

Setzt man andererseits die ξ den η gleich, so ergiebt sich

$$M(\varphi; \xi)\, M(\xi; \zeta) = M(x; \xi)\, T(\xi; \zeta),$$

womit $T(\eta; \zeta) = M(\eta; \zeta)$ bestimmt ist. Somit hat man endlich die Gleichung

$$M(x; \eta)\, M(\xi; \zeta) - M(x; \zeta)\, M(\xi; \eta) = M(x; \xi)\, M(\eta; \zeta).$$

Ertheilt man den η und ζ solche speciellen Werthe $\eta_1^0\, \eta_2^0 \ldots \eta_p^0$, $\zeta_1^0\, \zeta_2^0 \ldots \zeta_p^0$, dass $M(\eta^0; \zeta^0) \neq 0$ ist und bezeichnet die ganzen Functionen

$$\frac{M(x; \eta^0)}{\sqrt{M(\eta^0; \zeta^0)}} \text{ mit } m(x),$$

$$\frac{M(x; \zeta^0)}{\sqrt{M(\eta^0; \zeta^0)}} \text{ mit } n(x),$$

so ergiebt sich die oben gebrauchte Form

$$M(x; \xi) = m(x)\, n(\xi) - m(\xi)\, n(x).$$

Freiburg i. Br., im Januar 1894.

Ueber Abbildungen.

Von

Paul Stäckel in Halle a./S.

1.

Man erhält eine stetige Abbildung einer krummen Oberfläche S_1 auf eine andere krumme Oberfläche S_2, wenn man jede von beiden durch zwei Curvensysteme in unendlich kleine Vierecke theilt und jeder Curve auf S_1 stetig eine Curve auf S_2 entsprechen lässt; denn zu jedem Schnittpunkte P_1 von zwei Curven verschiedener Systeme auf S_1 gehört als Bild der Schnittpunkt P_2 der entsprechenden Curven auf S_2.

Beschränkt man sich auf hinreichend kleine Umgebungen der Punkte P_1 und P_2, welche als regulär vorausgesetzt werden, so ist das Entsprechen von Gegenstand und Bild ein umkehrbar eindeutiges, und im Unendlichkleinen ist, wie wohl zuerst Tissot*) erkannt und verwerthet hat, jede stetige Abbildung *projectiv*.

Daher ist dem Strahlenbüschel der Flächentangenten in P_1 das Strahlenbüschel der Flächentangenten im Bildpunkte P_2 projectiv zugeordnet, und es giebt demnach unter den Paaren orthogonaler Tangenten in P_1 stets eins und im allgemeinen auch nur eins, welchem wieder ein Paar orthogonaler Tangenten in P_2 entspricht. Hieraus folgert Tissot, *dass zu jeder stetigen Abbildung von S_1 auf S_2 ein Orthogonalsystem von S_1 gehört, welchem wiederum ein Orthogonalsystem von S_2 entspricht.* Umgekehrt aber gehören zu jedem Paare von Orthogonalsystemen auf S_1 und S_2 unendlich viele Abbildungen, da die Art der Zuordnung der Curven noch willkürlich bleibt.

Als Ausnahmefall ergiebt sich die Möglichkeit, dass die beiden Strahlenbüschel in P_1 und P_2 *congruent* sind, sodass jedem Paare rechtwinkliger Tangenten in P_1 wieder ein Paar solcher Tangenten in

*) Sur les cartes géographiques, Comptes rendus, t. 49, S. 673, 1859. Eine ausführliche Begründung des ohne Beweis ausgesprochenen Satzes gab Tissot 1878 in den Nouvelles Annales de Mathematiques, 2e série, t. XVII und 1881 in seinem Werke: Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques.

P_2 entspricht. Gilt diese Eigenschaft für alle Punkte der betrachteten Flächenstücke S_1 und S_2, so entspricht jedem Orthogonalsystem von S_1 ein Orthogonalsystem von S_2, und man erhält die von Lambert (1772), Lagrange (1781), Gauss (1822) und Bonnet (1852) untersuchte *conforme* oder winkeltreue Abbildung.

2.

Lie hat das Verdienst die wahre Bedeutung des Tissot'schen Satzes festgestellt zu haben*). Er machte darauf aufmerksam, dass den Schlüssen Tissot's eine stillschweigende Voraussetzung zu Grunde liegt, welche keineswegs immer erfüllt zu sein braucht, dass es sich nämlich um *reelle* Abbildungen *reeller* Flächen handelt, und zeigte, wie man den Tissot'schen Satz ergänzen muss, wenn auch imaginäre Abbildungen und imaginäre Flächen zugelassen werden.

Eine wesentliche Rolle spielen bei den Betrachtungen Lie's die *Minimalcurven***), welche zu den krummen Oberflächen S_1 und S_2 gehören. Die Tangenten der beiden Minimalcurven von S_1 in P_1 gehen nämlich nach dem unendlich fernen imaginären Kugelkreise, sind also die *Doppelelemente der Involution der orthogonalen Tangentenpaare* in diesem Punkte. Entsprechendes gilt für den Bildpunkt P_2 auf S_2. Da nun die Abbildung im Unendlichkleinen projectiv ist, so ist das Bild der Involution der orthogonalen Tangentenpaare in P_1 wieder eine Involution in P_2, deren Doppelelemente die Tangenten der Bildcurven sind, welche auf S_2 zu den Minimalcurven in P_1 gehören.

Im Allgemeinen werden die Bildcurven der Minimalcurven in P_1 nicht mit den Minimalcurven in P_2 zusammenfallen und dann giebt es ein Tangentenpaar in P_2, *das zu den Doppelelementen der beiden Involutionen in P_2 gleichzeitig harmonisch ist.* Hiermit ist zugleich nachgewiesen, dass bei reellen Abbildungen reeller Flächen das Tissot'sche Orthogonalsystem ebenfalls *reell* ausfällt.

Wenn aber die Doppelelemente der beiden Involutionen in P_2 zusammenfallen, so giebt es unendlich viele Tangentenpaare, welche der eben ausgesprochenen Bedingung genügen. Mithin kann die conforme Abbildung als eine solche definirt werden, bei welcher den Minimalcurven von S_1 die Minimalcurven von S_2 entsprechen.

Lässt man Imaginäres zu, so giebt es noch einen, von Lie entdeckten Ausnahmefall, welcher darin besteht, dass nur die eine der

*) Ueber geodätische Linien. Note I: Ueber die allgemeinste geodätische Abbildung einer reellen oder imaginären Fläche. Diese Annalen Bd. 20, S. 419, 1882.

**) Ueber den Begriff der *Minimalcurven* vergleiche man Lie's Abhandlung: Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. Diese Annalen Bd. 14, S. 337, 1878.

Minimalcurven in P_1 wieder eine Minimalcurve in P_2 zum Bilde hat, sodass die beiden Involutionen in P_2 nur in einem der Doppelelemente übereinstimmen. Soll dann ein Tangentenpaar zu beiden Paaren von Doppelelementen in P_2 harmonisch sein, so fallen diese beiden Tangenten nothwendig mit den coincidirenden Doppelelementen zusammen und statt eines gemeinschaftlichen Orthogonalsystems erhält man die Minimalcurven, welche einander entsprechen.

3.

Man kann auch, was meines Wissens noch nicht durchgeführt worden ist, auf *analytischem* Wege zu diesen Resultaten gelangen.

Benutzt man die einander entsprechenden Curvensysteme auf S_1 und S_2 als Coordinatenlinien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$, so mögen die Linienelemente ds_1 und ds_2 von S_1 und S_2 gegeben werden durch*)

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2, \tag{1}$$

$$ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 du dv + G_2 dv^2. \tag{2}$$

Dann stellt die Gleichung:

$$0 = a_{11} du^2 + 2a_{12} du dv + a_{22} dv^2 \tag{3}$$

eine Doppelschaar von Curven dar, deren zwei Tangenten im Punkte (u, v) zu den Tangentenpaaren der Curven $ds_1^2 = 0$ und $ds_2^2 = 0$ in demselben Punkte harmonisch sind, wenn die Coefficienten a_{11}, a_{12} und a_{22} den Bedingungen genügen:

$$0 = G_1 a_{11} - 2F_1 a_{12} + E_1 a_{22}, \tag{4}$$

$$0 = G_2 a_{11} - 2F_2 a_{12} + E_2 a_{22}. \tag{5}$$

Durch Elimination von a_{11}, $-a_{12}$ und a_{22} erhält man daher für die Tissot'schen Orthogonalsysteme die *Differentialgleichung:*

$$0 = \begin{vmatrix} du^2 & -dudv & dv^2 \\ G_1 & F_1 & E_1 \\ G_2 & F_2 & E_2 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Diese Gleichung stellt, solange ihre Discriminante:

$$\Delta = (E_1 G_2 - E_2 G_1)^2 - 4(F_1 E_2 - F_2 E_1)(G_1 F_2 - G_2 F_1) \tag{7}$$

nicht identisch verschwindet, eine Doppelschaar von Curven dar. Da nun die Resultante der beiden Gleichungen $ds_1^2 = 0$ und $ds_2^2 = 0$ gerade derselbe Ausdruck Δ ist, so bedeutet $\Delta = 0$, dass die beiden Ausdrücke ds_1^2 und ds_2^2 einen gemeinschaftlichen Factor haben, und die Rechnung zeigt, dass er genau gleich der Quadratwurzel aus der

*) Ich bediene mich hier und im Folgenden durchaus der Bezeichnungen, welche Herr J. Knoblauch in seinem bekannten Werke: Einleitung in die Flächentheorie, Leipzig 1888, gebraucht.

rechten Seite der Gleichung (6) wird, welche, wenn Δ verschwindet, in ein vollständiges Quadrat übergeht. Man gelangt so zu dem Lie'schen Ausnahmefall, es sei denn, dass (6) identisch besteht. Dann aber sind die *Fundamentalgrössen erster Ordnung* von S_1 den entsprechenden Grössen von S_2 proportional, und daher wird auch ds_1 proportional ds_2, sodass man wieder auf die conforme Abbildung geführt wird.

4.

Bei dieser Auffassung erscheint der Tissot'sche Satz von der Existenz eines gemeinsamen Orthogonalsystems als besonderer Fall eines allgemeineren Theorems. Definirt man nämlich auf S_1 eine Doppelschaar von Curven durch eine Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad 0 = A'_{11}\,du^2 + 2A'_{12}\,du\,dv + A'_{22}\,dv^2,$$

und ebenso auf S_2 durch:

$$\text{(II)} \qquad 0 = A''_{11}\,du^2 + 2A''_{12}\,du\,dv + A''_{22}\,dv^2,$$

und betrachtet die beiden Involutionen, deren Doppelelemente beziehungsweise die Flächentangenten der Curven (I) in P_1 und der Curven (II) im Bildpunkte P_2 sind, so entsteht die Frage, ob es in der ersten Involution ein Tangentenpaar giebt, welchem vermöge der Abbildung ein Tangentenpaar in P_2 entspricht, das der zweiten Involution angehört.

Um diese Frage zu beantworten braucht man nur zu bedenken, dass das Bild der ersten Involution wieder eine Involution in P_2 ist, deren Doppelelemente die Tangenten der Bildcurven sind, welche zu den Curven (I) auf S_1 gehören. Das gesuchte Tangentenpaar ist also dasjenige, welches gleichzeitig zu den Doppelelementen der beiden Involutionen in P_2 harmonisch ist. Mithin gehören zu den Curvensystemen (I) und (II) im Allgemeinen ganz bestimmte Curvensysteme auf S_1 und S_2, welche einander vermöge der Abbildung entsprechen und welche die Eigenschaft haben, dass ihre Tangentenpaare bei der Abbildung zu den Tangentenpaaren der Curven (I) und (II) harmonisch bleiben. Es dürfte daher passend sein, ein solches Curvensystem als ein *harmonisches* in Bezug auf die beiden gegebenen Doppelschaaren (I) und (II) zu bezeichnen.

Handelt es sich im Besonderen um reelle Abbildungen reeller Flächen, so ist das harmonische System sicher reell, wenn wenigstens eine der beiden Doppelschaaren (I) und (II) imaginär ist. Sind aber beide reell, so gilt dasselbe dann und nur dann von dem harmonischen Systeme, wenn in P_2 die Bilder der beiden Tangenten der Curven (I) auf S_1 in denselben Winkelraum der beiden Tangenten der Curven (II) fallen. —

Auch hier giebt es wieder zwei wesentlich verschiedene Ausnahmefälle. Fallen die Doppelelemente der beiden Involutionen in P_2 zusammen, so haben unendlich viele Tangentenpaare die Eigenschaft gleichzeitig zu ihnen harmonisch zu sein, und gilt dieses für alle Punkte der betrachteten Flächenstücke S_1 und S_2, so giebt es unendlich viele harmonische Systeme; die Abbildung von S_1 und S_2 wird dann dadurch vermittelt, dass den Curven (I) gerade die Curven (II) entsprechen. Es kann aber vorkommen, dass nur einer Schaar der Curven (I) wieder eine Schaar der Curven (II) entspricht. Dann tritt ein Ausnahmefall ein, welcher dem von Lie gefundenen analog ist, und das harmonische System wird keine Doppelschaar, sondern besteht aus der ebengenannten einen Schaar der Curven (I), welcher wieder eine Schaar der Curven (II) entspricht. —

Nunmehr ist es leicht die *Differentialgleichung der harmonischen Systeme* aufzustellen. Schreibt man sie in der Form:

$$0 = a_{11}du^2 + 2a_{12}du\,dv + a_{22}dv^2, \tag{III}$$

so müssen die Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} den Bedingungen genügen:

$$0 = A'_{22}a_{11} - 2A'_{12}a_{12} + A'_{11}a_{22}, \tag{IV}$$

$$0 = A''_{22}a_{11} - 2A''_{12}a_{12} + A''_{11}a_{22}; \tag{V}$$

man findet daher die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ A'_{22} & A'_{12} & A'_{11} \\ A''_{22} & A''_{12} & A''_{11} \end{vmatrix}, \tag{VI}$$

deren Discussion die Ergebnisse der geometrischen Untersuchung bestätigt.

5.

Seit Dupins classischen *Développements* (1813) spielt in der Flächentheorie eine wichtige Rolle die Involution der in Bezug auf die Dupins'sche Indicatrix conjugirten Tangenten, deren Doppelelemente die asymptotischen Tangenten sind. Es sollen daher die allgemeinen Theorien des vorhergehenden Abschnittes auf den besonderen Fall angewendet werden, dass die beiden Doppelschaaren (I) und (II) die Asymptotenlinien der Flächen S_1 und S_2 sind; es braucht kaum erwähnt zu werden, dass die Flächen vom Krümmungsmaasse Null bei der folgenden Untersuchung auszuschliessen sind. Solange nicht das Gegentheil ausdrücklich angegeben ist, beschränke ich mich auf reelle Abbildungen reeller Flächen.

Zunächst erkennt man, dass es unter den Paaren conjugirter Tangenten in P_1 sicher eins und im allgemeinen auch nur eins giebt, welchem wieder ein Paar conjugirter Tangenten im Bildpunkte P_2

entspricht. Hieraus folgt dann, dass *jede stetige Abbildung von S_1 auf S_2 immer bewirkt werden kann, indem man einem conjugirten Systeme auf S_1 wieder ein conjugirtes System auf S_2 entsprechen lässt**). Das gemeinschaftliche conjugirte System ist **reell, solange** wenigstens eine der beiden Flächen positives **Krümmungsmass besitzt**, es kann imaginär werden, wenn beide Flächen reelle **Asymptotenlinien** haben.

Als Ausnahmefall ergiebt sich die Möglichkeit, **dass die Asymptotenlinien** auf S_1 zu Bildern gerade die **Asymptotenlinien auf** S_2 haben: in diesem Falle geht jedes conjugirte System bei **der Abbildung** wieder in ein conjugirtes System über. **Man erhält so als Analogon** der *conformen* Abbildung, bei welcher die Winkel **unverändert** bleiben, eine neue Art von Abbildung, welche die **Beziehung des** Conjugirtseins invariant lässt. Einem Vorschlage meines **Freundes** F. Engel folgend will ich sie als *conjunctiv* bezeichnen**).

Reelle conjunctive Abbildung von zwei reellen **Flächenstücken** S_1 und S_2 ist nur möglich, wenn beide entweder **positives oder** negatives Krümmungsmass haben. Dann giebt es aber **sogar unendliche** viele Abbildungen dieser Art; denn es ist dazu nur **erforderlich**, dass die Asymptotenlinien der beiden Flächen einander **zugeordnet** werden, ebenso wie man bei der conformen Abbildung die **Minimalcurven** der beiden Flächen aufeinander bezieht.

Um schliesslich die Differentialgleichungen des **gemeinschaftlichen** conjugirten Systemes aufzustellen, hat man **zunächst mit** Hilfe der *Fundamentalgrössen zweiter Ordnung* die Gleichungen **der Asymptotenlinien** von S_1 und S_2 zu bilden. Man erhält dann:

$$(1^*) \qquad 0 = L_1 du^2 + 2M_1 du\,dv + N_1 dv^2,$$

$$(2^*) \qquad 0 = L_2 \delta u^2 + 2M_2 du\,dv + N_2 dv^2,$$

woraus sich die gesuchte Gleichung in der Form:

$$(6^*) \qquad 0 = \begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ N_1 & M_1 & L_1 \\ N_2 & M_2 & L_1 \end{vmatrix}$$

ergiebt. Das analytische Kennzeichen der *conjunctiven* **Abbildung** besteht also darin, dass die Fundamentalgrössen *zweiter* **Ordnung** von S_1 und S_2 einander proportional sind, während bei der *conformen* Abbildung dasselbe für die Fundamentalgrössen *erster* **Ordnung** gilt.

---

*) Diesen Satz hat wohl zuerst K. Peterson bewiesen in seinem interessanten aber wenig bekannten Werke: *Ueber Curven und Flächen*, Erste Lieferung, Moskau und Leipzig, 1868, S. 37.

**) P. Peterson nennt sie (a. a. O. S. 40) *Conjugation*. Die Bezeichnung im Texte hat den Vortheil die von Peterson nicht bemerkte Analogie mit der *conformen* Abbildung zum Ausdruck zu bringen.

6.

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass eine Abbildung *zugleich conform und conjunctiv* ist, dass also die Minimalcurven und die Asymptotenlinien einander entsprechen, oder, analytisch ausgedrückt, dass sowohl die Fundamentalgrössen erster als auch diejenigen zweiter Ordnung eines Punktes und seines Bildpunktes einander proportional sind.

Behufs Untersuchung der *conform-conjunctiven* Abbildungen sollen die *Fundamentalgleichungen von Gauss und Mainardi* unter der Voraussetzung gebildet werden, dass die Curven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ Asymptotenlinien sind. Bei dieser Annahme ist:

$$L = 0, \quad N = 0. \tag{8}$$

Setzt man noch:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{\sqrt{EG - F^2}}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} 4W = {} & 2(EG - F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\right) \\ & - E\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] \\ & - F\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} + 4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial v}\right] \\ & - G\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial u} - \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{10}$$

so lauten die Fundamentalgleichungen:

$$(EG - F^2)^2 \cdot \mathfrak{M}^2 = W, \tag{A}$$

$$(EG - F^2) \cdot \frac{\partial \log \mathfrak{M}}{\partial u} = F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u}, \tag{B}$$

$$(EG - F^2) \cdot \frac{\partial \log \mathfrak{M}}{\partial v} = F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v}. \tag{C}$$

Handelt es sich um zwei Flächenstücke S_1 und S_2, so sind alle Grössen und Gleichungen, je nachdem sie sich auf die erste oder zweite Fläche beziehen, mit dem Index 1 oder 2 versehen.

Durch die Einführung der Asymptotenlinien als Curven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ ist schon erreicht, das die Abbildung eine conjunctive ist. Soll sie auch eine conforme sein, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$E_2 = \varkappa^2 E_1, \quad F_2 = \varkappa^2 F_1, \quad G_2 = \varkappa^2 G_1. \tag{11}$$

Um die sechs Fundamentalgleichungen zu befriedigen hat man also zur Verfügung nur die 6 Grössen E_1, F_1, G_1, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ und $\varkappa$. *Es wäre*

jedoch voreilig, hieraus zu schliessen, dass nur die Flächen einer besonderen Classe conform-conjunctive Abbildungen gestatten, vielmehr lässt sich zeigen, dass für jedes beliebige Flächenstück S_1 solche Abbildungen existiren. Genügen nämlich E_1, F_1, G_1 und $\mathfrak{M}_1$ den Gleichungen (A_1), (B_1) und (C_1), so sind die Gleichungen (A_2), (B_2) und (C_2) identisch erfüllt, wenn man $\varkappa$ als constant annimmt, und

$$\mathfrak{M}_2 = \pm \frac{1}{\varkappa} \mathfrak{M}_1, \tag{12}$$

also auch $M_2 = \pm \varkappa M_1$, setzt. Man erhält daher eine conform-conjunctive Abbildung von S_1, wenn man daraus durch irgend eine *Aehnlichkeitstransformation* eine Fläche S_2 erzeugt und hierdurch gleichzeitig S_1 auf S_2 abbildet. *Dagegen scheint es für eine allgemeine Fläche S_1 keine anderen conform-conjunctiven Abbildungen als die Aehnlichkeitstransformationen zu geben**).

Dass aber für besondere Flächen conform-conjunctive Abbildung auch auf andere Art möglich ist, zeigen folgende Beispiele.

7.

Besteht bei einer *reellen* Fläche die eine Schaar der Asymptotenlinien aus Minimalcurven, so muss auch die andere Schaar diese Eigenschaft besitzen. Da nun der Krümmungsradius ϱ_1 eines Normalschnittes in P_1 von S_1 durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{E_1 du^2 + 2F_1 du\,dv + G_1 dv^2}{L_1 du^2 + 2M_1 du\,dv + N_1 dv^2} \tag{13}$$

gegeben wird, so besitzen alle Normalschnitte in P_1 dieselbe Krümmung, folglich ist S_1 ein Stück einer *Kugelfläche.*

Will man jetzt ein Stück S_1 einer Kugelfläche conform-conjunctiv auf ein anderes Flächenstück S_2 abbilden, so müssen auch auf S_2 Minimalcurven und Asymptotenlinien zusammenfallen, S_2 ist also auch ein Stück einer Kugelfläche. Bildet man also eine Kugelfläche S_1 conform auf eine andere Kugelfläche S_2 ab, so ist die Abbildung zugleich conjunctiv.

---

*) Bestätigt sich diese Vermuthung, so folgt daraus eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung des Bonnet'schen Satzes, dass eine krumme Oberfläche durch Angabe der Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung bis auf ihre Lage im Raume vollständig bestimmt ist. Es würde nämlich durch Angabe der Verhältnisse der Fundamentalgrössen erster Ordnung und der Verhältnisse der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung eine krumme Oberfläche im Allgemeinen bis auf eine Aehnlichkeitstransformation festgelegt sein.

Ein anderes Beispiel geben die *Minimalflächen*, welche bekanntlich die charakteristische Eigenschaft haben, dass ihre Asymptotenlinien ein Orthogonalsystem bilden. Hieraus folgt sofort, dass eine Minimalfläche conform-conjunctiv nur wieder auf eine Minimalfläche abgebildet werden kann. Nun lässt sich aber bei Einführung der Asymptotenlinien als Coordinatenlinien das Quadrat des Linienelements jeder Minimalfläche durch:

$$ds^2 = 2r(du^2 + dv^2) \tag{14}$$

darstellen*); r bedeutet den positiven Hauptkrümmungsradius im Punkte (u, v). Mithin wird durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} ds_1^2 = 2r_1(du^2 + dv^2), \\ ds_2^2 = 2r_2(du^2 + dv^2) \end{cases} \tag{15}$$

eine conform-conjunctive Abbildung der beiden Minimalflächen S_1 und S_2 definirt.

Allgemeiner lässt sich eine Fläche, *bei welcher in jedem Punkte die asymptotischen Richtungen denselben Winkel ω mit einander bilden*, für die also der Quotient der beiden Hauptkrümmungsradien constant ist, conform-conjunctiv nur auf Flächen derselben Art abbilden. Im besonderen erhält man eine solche Abbildung, wenn man

$$\begin{cases} ds_1^2 = E_1(u, v)(du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2), \\ ds_2^2 = E_1(\lambda u + a, \lambda v + b)(du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2), \end{cases} \tag{16}$$

nimmt, wo λ, a und b Constanten bedeuten. Im Vorbeigehen möge bemerkt werden, dass E_1, sobald $\cos\omega$ von 0 und $\pm\frac{1}{2}$ verschieden ist, abgesehen von einer multiplicativen Constanten, gleich

$$[e^{u+v} + e^{-(u+v)}]^{2:(1-2\cos\omega)} \tag{17}$$

zu setzen ist.

8.

Zum Schluss sollen die Resultate des vierten Abschnittes auf die besondere Art der conformen Abbildung angewendet werden, welche man *Biegung* nennt.

Ist eine Biegung von S_1 in S_2 zugleich eine conjunctive Abbildung, so geht nothwendig S_2 aus S_1 durch eine Bewegung oder eine Bewegung und eine Spiegelung hervor. Denn hat man

$$E_2 = E_1, \quad F_2 = F_1, \quad G_2 = G_1, \tag{18}$$

$$L_2 = \mu L_1, \quad M_2 = \mu M_1, \quad N_2 = \mu N_1, \tag{19}$$

*) Vergl. Ossian Bonnet, Comptes rendus, t. 37, S. 532 (1853).

so folgt aus der Invarianz des Gauss'schen Krümmungsmasses, dass

$$\mu^2 = 1 \tag{20}$$

sein muss.

Schliesst man also Bewegungen und Spiegelungen aus, so gilt der Satz, dass *auf jeder Biegungsfläche einer krummen Oberfläche ein reelles oder imaginäres conjugirtes System existirt, welches bei der Biegung aus einem conjugirten Systeme der ursprünglichen Fläche hervorgegangen ist.*

Eine Spur dieses Satzes findet sich bereits bei Bour*), welcher sagt: „Si l'on considère une surface appuyée contre un de ses plans tangents supposé fixe; et que, laissant la surface dans cette position, on lui fasse subir une déformation *infiniment petite;* la surface primitive et sa transformée se couperont suivant deux courbes tangentes à deux diamètres *conjugées* de l'indicatrice."

Dann hat ihn K. Peterson**) in seiner vollen Allgemeinheit ausgesprochen und zwar als eine Folgerung aus dem Theoreme, dass gemeinschaftliche conjugirte Systeme bei jeder Abbildung existiren.

Wenn daher derselbe Satz kürzlich von Koenigs***) wieder entdeckt worden ist, *so muss ausdrücklich hervorgehoben werden, dass damit keine besondere Eigenschaft der Abbildung durch Biegung gegeben wird. Vielmehr kann jede stetige Abbildung durch das Entsprechen von conjugirten Systemen vermittelt werden.*

Koenigs scheint zu seinem Theorem gekommen zu sein, indem er davon ausging, dass die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z jedes Punktes P einer Fläche S, wenn die Curven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ ein conjugirtes System bilden, derselben partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v} + A(u,v)\frac{\partial\Theta}{\partial u} + B(u,v)\frac{\partial\Theta}{\partial v} = 0 \tag{D}$$

genügen. Man wird dann fragen, ob sich die Coefficienten A und B nicht so wählen lassen, dass die 6 Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 entsprechender Punkte zweier Biegungsflächen S_1 und S_2 gleichzeitig Lösungen der Gleichung (D) sind, und findet, dass stets eine solche Gleichung (D) existirt.

Die hier gegebenen Entwickelungen zeigen, dass S_1 und S_2 gar

---

*) Théorie de la déformation des surfaces, Journal de l'Ecole polytechnique, Cahier 39, pag. 28 (1862).

**) K. Peterson, a. a. O. S. 58. Peterson nennt die Linien des gemeinschaftlichen conjugirten Systemes Biegungslinien und gründet auf sie eine Theorie der Biegung krummer Oberflächen, welche einer genaueren Durchführung werth sein dürfte.

***) Un théorème de géometrie infinitésimale, Comptes rendus, t. 116, p. 569 (März 1893).

nicht Biegungsflächen zu sein brauchen, sie geben einen Beweis für das allgemeine Theorem:

Sind zwei Flächen S_1 und S_2 in stetiger Weise auf einander abgebildet, so lassen sich die Curven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$, welche die Abbildung vermitteln, immer in der Art wählen, dass die sechs Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 entsprechender Punkte P_1 und P_2 alle derselben Differentialgleichung:

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} + A \frac{\partial \Theta}{\partial u} + B \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0 \quad .$$

genügen.

9.

Wird eine krumme Oberfläche S_1 in stetiger Weise gebogen, so dass aus ihr etwa ∞^1 Biegungsflächen S_h entstehen, so giebt es immer für S_1 und S_h ein gemeinschaftliches conjugirtes System. Im allgemeinen werden es immer andere conjugirte Systeme auf S_1 sein, welche, wenn h variirt, S_1 und S_h gemeinsam sind, und es wird so auf S_1 eine Schaar von ∞^1 conjugirten Systemen entstehen. Ein ganz besonderer Fall wird es sein, wenn man stets dasselbe conjugirte System auf S_1 erhält, wenn also S_1 sich in stetiger Weise so biegen lässt, dass ein conjugirtes System von S_1 während des ganzen Verlaufes der Biegung stets conjugirt bleibt.

Besteht dieses conjugirte System aus *Krümmungslinien*, so sind, wie zuerst Codazzi*) gezeigt hat, abgesehen von den abwickelbaren Flächen die Flächen S_h *surfaces moulures* und werden nach Bour**) dargestellt durch:

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} x_h = h\,U(u)\cos\frac{v}{h} + \int V(v)\sin\frac{v}{h}\,dv, \\ y_h = h\,U(u)\sin\frac{v}{h} - \int V(v)\cos\frac{v}{h}\,dv, \\ z_h = \int \sqrt{1 - h^2\,U'^2(u)}\,du; \end{cases}$$

die Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ sind die Krümmungslinien. Für $V = 0$ ergiebt sich die Minding'sche Schaar der Biegungsflächen einer Rotationsfläche, welche wieder Rotationsflächen sind.***)

Ein anderes Beispiel sind die *Translationsflächen*

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

*) Intorno alle superficie le quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura. Annali di Tortolini, serie 1. t. VII, pag. 410 (1856).

**) a. a. O. pag. 89.

***) Ueber die Biegung krummer Flächen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 18, S. 367 (1838).

Denn nach Peterson*) gehören zu jeder Fläche,

$$z_1 = f(u) + g(v), \quad y_1 = \int \sqrt{1 - f'^2 u}\, du, \quad x_1 = \int \sqrt{1 - g'^2(v)}\, dv$$

die ∞^1 Biegungsflächen:

$$(22) \qquad \begin{cases} z_h = hf(u) + \frac{1}{h} g(v), \\ y_h = \int \sqrt{1 - h^2 f'^2(u)}\, du, \\ x_h = \int \sqrt{1 - \frac{1}{h^2} g'^2(v)}\, dv. \end{cases}$$

Bei jeder *Translationsfläche* bilden nämlich die beiden Schaaren der erzeugenden Curven, also in diesem Falle die Curven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$, ein *conjugirtes* System.**)

Man kann allgemeiner die Translationsflächen suchen, welche sich in stetiger Weise so biegen lassen, dass die erzeugenden Curven in erzeugende Curven übergehen. Bei anderer Gelegenheit werde ich zeigen, dass es ausser den *Cylindern* und den *Translationsflächen* $s = 0$, nur noch *zwei* Flächenclassen giebt, welche die verlangte Eigenschaft haben. Eine von ihnen ist bekannt, es sind die *Minimalflächen;* denn bei der Biegung einer Minimalfläche in eine Minimalfläche gehen die erzeugenden *Minimalcurven* wieder in Minimalcurven über; in diesem Falle ist das gemeinschaftliche conjugirte System imaginär.***) Die Flächen der vierten Classe, welche neu sein dürften, haben die interessante Eigenschaft, durch gewisse Affinitäten in Minimalflächen überzugehen.

Berlin, December 1893.

---

*) K. Peterson, a. a. O. S. 71, vergl. auch Mlodzieiowski, Sur la déformation des surfaces, Bulletin des sciences mathématiques, série 2, t. XV, S. 17. 1891, wonach Peterson diese ∞^1 Biegungsflächen bereits 1866 in dem Journale der Mathematischen Gesellschaft zu Petersburg mitgetheilt hat. Unabhängig von ihm sind sie dann 1878 von Bianchi wiederentdeckt worden: Sopra la deformazione di una classe di superficie, Giornale matematiche pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini, t. XVI, pag. 467.

**) Vergl. Lie, diese Annalen Bd. 14, S. 334.

***) Vergl. Ossian Bonnet, Journal de l'Ecole polytechnique. Cah. 42, p. 27 (1867), K. Peterson, a. a. O. S. 67 und H. A. Schwarz, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 80, S. 288 (1875).

Die Kreisbogenvierseite und das Princip der Symmetrie.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

I. Verschiedene Typen von Kreisbogenvierseiten. Problemstellung.

In einer Ebene, die späterhin die Trägerin der Werthe einer complexen Variabelen ζ sein soll, möge ein von vier Kreisen $K_1, \ldots, K_4$ eingegrenzter Bereich B gezeichnet sein; derselbe soll ein *Kreisbogenvierseit* genannt werden, obschon diese Bezeichnungsweise, wie man sehen wird, in einigen Fällen nicht völlig treffend ist. Die hauptsächlichen Typen von Kreisbogenvierseiten B sollen gleich hier durch Figuren erläutert werden.

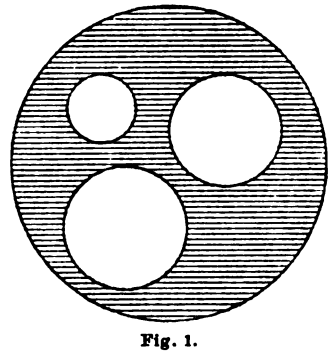


Fig. 1.

In Figur 1 verlaufen die vier Kreise K durchaus getrennt von einander und grenzen einen *vierfach zusammenhängenden Bereich* B ein, der durch Schraffirung kenntlich gemacht ist. Dadurch dass man hier zwei oder mehrere unter den vier Kreisen bis zur Berührung einander nahe kommen lässt, entspringt eine Reihe von Grenzfällen der Figur 1, von denen einer in Figur 7 näher dargestellt ist, und die der Mehrzahl nach unten besonders ausführlich untersucht werden.

Ohne Gewähr der Vollständigkeit, für welche erst später systematische Mittel entwickelt werden, mögen aus dem Bereich B der Figur 1 folgende weitere Typen von Vierseiten hergeleitet werden.

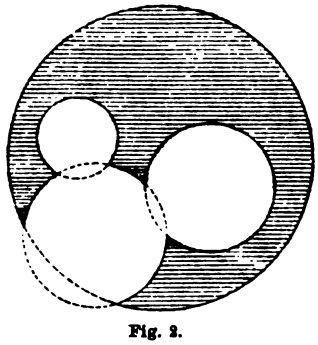


Fig. 2.

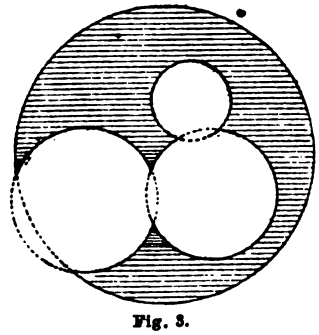


Fig. 3.

Einmal hat man in den Figuren 2 und 3 einfach zusammenhängende *Kreisbogensechsecke* als Bereiche B durch die vier Kreise eingegrenzt.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Typen ist der, dass in Figur 2 einer der Kreise drei Seiten des Sechsecks liefert, die andern drei Kreise je nur eine Seite, während in Figur 3 zwei Kreise je zwei Seiten liefern, die beiden andern je nur eine.

Es folgen mehrere weitere Möglichkeiten, *bei denen der ursprünglich zusammenhängende Bereich B in zwei, drei oder vier getrennte Theile zerfällt*, die wir dann etwa als Bereiche $B, B', \ldots$ unterscheiden können. In Figur 4 hat man es mit einem Fünfeck und einem Dreieck

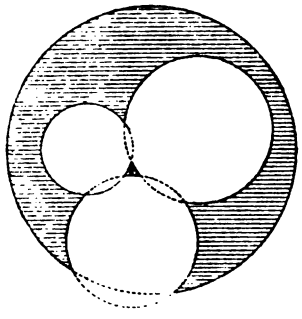


Fig. 4.

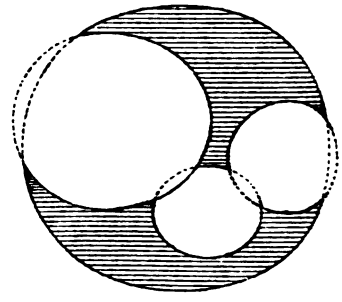


Fig. 5.

zu thun, in Figur 5 mit zwei Vierecken, in Figur 6 mit einem Viereck und zwei Dreiecken und endlich in Figur 7 mit vier Dreiecken. Das

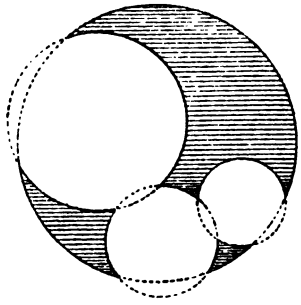


Fig. 6.

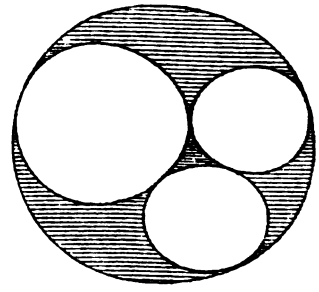


Fig. 7.

hierbei sämmtliche Winkel der Dreiecke gleich 0 gewählt wurden, ist nur particulär; in Folge dieser Annahme liesse sich Figur 7, wie schon angedeutet, als Grenzfall von Figur 1 ansehen.

Sobald *Dreiecke* als Theile des Gesammtbereichs B auftreten, hat man zu unterscheiden, *ob dieselben von der ersten oder dritten Art sind**), was späterhin besonders folgereich wird. Im Uebergangsfall von der ersten zur dritten Art hat sich das Dreieck auf einen Punkt zusammengezogen; dieser Fall kommt in den obigen Figuren nicht zur Darstellung, soll aber späterhin volle Berücksichtigung finden. —

*) Es wird hier und später von der Bezeichnungsweise der „*Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen*“ von Klein und dem Verf. (Bd. I, Leipzig, 1890) Gebrauch gemacht, auf welche der Kürze halber verwiesen werden muss.

Man macht nun das Vierseit B in einer nachgerade sehr bekannten Art, nämlich durch immer wiederholte *Spiegelung* an den Randkreisen zum Ausgangsraum eines ganzen Netzes von Bereichen $B, B_1, B_2, \ldots$, welches die ζ-Ebene sei es theilweise, sei es ganz bedeckt. Es wird solcherweise zur Vorbereitung künftiger functionentheoretischer Untersuchungen der rein geometrische Inhalt des *Principes der Symmetrie* auf die vorgelegten Ausgangsbereiche B zur Anwendung gebracht. Die Abgrenzung für die folgende Untersuchung wird so getroffen, dass das Bereichnetz die ζ-Ebene, *wo überhaupt, nur einfach* bedecken soll. Es entspringt derart eine Vorarbeit für die Theorie der *eindeutigen* automorphen Functionen der Veränderlichen ζ, und man könnte die zu behandelnde Frage geradezu so stellen, *dass es sich um Angabe derjenigen Vierseite B handeln soll, welche Discontinuitätsbereiche für die Gruppen linearer ζ-Substitutionen sind, die aus den Spiegelungen an den vier Kreisen $K_1, \ldots, K_4$ entspringen.* Der Begriff des Discontinuitätsbereichs ist hierbei in jenem Sinne gebraucht, welchen derselbe innerhalb der Theorie der *eigentlich* discontinuirlichen Gruppen besitzt.

Die Methode der nachfolgenden Untersuchung besteht in einer ausführlichen und übrigens rein geometrischen Betrachtung der Bereichnetze $B, B_1, \ldots$. Dabei haftet das Hauptinteresse am *Grenzgebilde* des einzelnen Netzes, dessen Punkten man durch hinreichend weit getriebenen Spiegelungsprocess zwar beliebig nahe kommen kann, ohne sie indessen im *endlichen* Progress je zu erreichen. Die hierauf bezüglichen Betrachtungen gestalten sich bei den aus *drei* Spiegelungen zu erzeugenden Gruppen noch verhältnissmässig inhaltsarm, weil man es hier stets mit sogenannten Hauptkreisgruppen zu thun hat, sofern überhaupt Gruppen mit unendlich vielen Grenzpunkten vorliegen. Demgegenüber weisen die Gruppen der Vierseite stets unendlich viele Grenzpunkte auf, und der Hauptkreisfall ist ganz particulär; es wird sich vielmehr eine ganze Reihe höchst verschiedenartiger Grenzgebilde entsprechend den verschiedenen Typen Figur 1 bis 7 ergeben, und es ist Hauptzweck unserer Betrachtungen, der wunderbaren Eigenart dieser Grenzgebilde nachzugehen, soweit dies mit den einfachen Hülfsmitteln der unmittelbaren geometrischen Anschauung möglich ist.

Ehe indess an die hiermit gekennzeichnete Untersuchung gegangen werden kann, ist es nöthig betreffs der *Invarianten der Kreisbogenvierseite* die nachfolgende Entwicklung vorauszusenden*).

*) Es handelt sich hierbei um einen Specialfall einer allgemeinen Theorie der Invarianten von Fundamentalbereichen oder Gruppen, welche neuerdings eine besondere Förderung gefunden hat durch die Arbeit von Vogt, *Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre*, Annales de l'Ecole Normale, serie 3, Bd. 6 (1889).

II. Die Invarianten der Kreisquadrupel. Rationalitätsbereich der Substitutionscoefficienten.

Die vier Kreise $K_1, \ldots$ mögen vorab eine ganz beliebige Lage in der ζ-Ebene haben, ohne schon jetzt nothwendig einen zusammenhängenden Bereich einzugrenzen. Von den so entspringenden Figuren kommen hier nur die Eigenschaften in Betracht, welche invariant gegenüber einer beliebigen Transformation der directen oder indirecten Kreisverwandtschaft sind. Der einzelne Kreis hängt aber von drei reellen Constanten ab, das Kreisquadrupel also von zwölf. Da es andererseits ∞^6 Transformationen der Kreisverwandtschaft giebt, so folgt: *Die Kreisquadrupel $K_1, \ldots$ besitzen gegenüber den Kreisverwandtschaften sechs reelle Invarianten.*

Um dieselben in zweckmässiger Art analytisch zu fixiren, führe man die zu den vier Kreisen $K_1, \ldots$ gehörenden Spiegelungen $V_1, V_2, \ldots$ ein und schreibe explicite:

$$(1) \qquad \zeta' = V_m(\zeta) = \frac{\alpha_m \bar{\zeta} + \beta_m}{\gamma_m \bar{\zeta} - \bar{\alpha}_m}, \quad \alpha_m \bar{\alpha}_m + \beta_m \gamma_m = 1;$$

hierbei sind β und γ reell, α und $\bar{\alpha}$ ebenso wie ζ und $\bar{\zeta}$ conjugirt imaginär; durch die rechts zugefügte Gleichung sind die Substitutionscoefficienten bis auf einen gemeinsamen Zeichenwechsel bestimmt.

Man verstehe nun unter m und n irgend zwei unter den Zahlen 1, 2, 3, 4 und bilde die Substitution erster Art $V_m V_n$. Die Summe des ersten und vierten Coefficienten in der letzteren, die $2j_{mn}$ heissen möge, hat bekanntermaassen Invarianteneigenschaft, *und in der That können die durch:*

$$(2) \qquad 2j_{mn} = \alpha_m \bar{\alpha}_n + \alpha_n \bar{\alpha}_m + \beta_m \gamma_n + \beta_n \gamma_m$$

gegebenen sechs Grössen $j_{12}, \ldots, j_{34}$ als die gesuchten sechs reellen Invarianten des Kreisquadrupels $K_1, \ldots$ dienen, insofern nämlich die Unabhängigkeit dieser sechs Grössen von einander bei den folgenden Betrachtungen leicht evident werden wird.

Zur geometrischen Interpretation der Invarianten j_{mn} projicire man die ζ-Ebene stereographisch auf eine Kugel und setze die letztere zur Fundamentalfläche einer auf den Raum bezogenen projectiven Maassbestimmung. Die Kreise K_m, K_n werden auf der Kugel durch zwei Ebenen ausgeschnitten, *und es ist der mit richtigem Zeichen versehene Cosinus des Winkels dieser beiden Ebenen gleich j_{mn}*. Aus der conformen Beziehung der Kugel auf die ζ-Ebene folgt weiter für die gewöhnliche Maassbestimmung innerhalb der letzteren Ebene: *berühren einander die Kreise K_m und K_n, so ist $\pm j_{mn} = 1$, schneiden sie sich, so ist $\pm j_{mn}$ gleich dem Cosinus des Schnittwinkels.*

Mit Angabe des Kreisquadrupels sind die Invarianten einzeln erst bis auf das Vorzeichen bestimmt, so jedoch, dass das Vorzeichen von $(j_{mn} \cdot j_{np} \cdot j_{pm})$ von vornherein mit dem Quadrupel gegeben ist. Man könnte daraufhin z. B. bei j_{12}, j_{13}, j_{14} die Vorzeichen willkürlich wählen, worauf sie bei den drei übrigen Invarianten bestimmt sind.

Fasst man alle mit einander kreisverwandten Quadrupel in eine *Classe* zusammen, so gilt der Satz, *dass ein überhaupt vorkommendes Werthsystem der j_{mn} auch nur eine einzige Classe eindeutig definirt.* Man bringt diesen Satz dadurch zum Nachweise, dass man durch zweckmässige Einzelvorschriften aus der einzelnen Classe ein möglichst günstig gelegenes Quadrupel herausgreift, um für diese Lage die Substitutionscoefficienten in (1) aus den j_{mn} zu berechnen. Kommt man dabei zu lauter kreisverwandten Möglichkeiten für das System der $V_1, \ldots, V_4$, so definiren die j_{mn} eben nur *eine* Classe.

Bei diesen Rechnungen schreibe man unter Trennung des Reellen vom Imaginären $\alpha_m = \alpha'_m + i\alpha''_m$ und $\zeta = \xi + i\eta$; es wird alsdann:

$$\begin{aligned} &\alpha_m'^2 + \alpha_m''^2 + \beta_m \gamma_m = 1, \\ (3) \qquad &2j_{mn} = 2\alpha'_m \alpha'_n + 2\alpha''_m \alpha''_n + \beta_m \gamma_n + \beta_n \gamma_m, \end{aligned}$$

und die Gleichung des Kreises K_m gewinnt die Gestalt:

$$(4) \qquad \gamma_m(\xi^2 + \eta^2) - 2\alpha'_m \xi - 2\alpha''_m \eta - \beta_m = 0.$$

Es kommen überdies in den folgenden Formeln zwei rationale ganze Verbindungen der j_{mn} vor, die hier vorab erklärt werden mögen. Ist m, n, p, q irgend eine Anordnung der Indices 1, 2, 3, 4, so definire man erstlich die Invariante j_m durch die Gleichung:

$$(5) \qquad j_m = -1 + j_{np}^2 + j_{qp}^2 + j_{qn}^2 - 2j_{np}j_{pq}j_{qn}.$$

Die im Verlaufe der folgenden Rechnungen leicht zu bestätigende Bedeutung der Invarianten j_m ist die, *dass j_m positiv, negativ oder gleich null ist, je nachdem die drei Kreise K_n, K_p, K_q einen reellen oder imaginären Orthogonalkreis haben oder durch einen Punkt gehen.* Endlich ist die besonders wichtige Invariante:

$$(6) \qquad j = -\begin{vmatrix} 1 & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{12} & 1 & j_{23} & j_{24} \\ j_{13} & j_{23} & 1 & j_{34} \\ j_{14} & j_{24} & j_{34} & 1 \end{vmatrix}$$

zu nennen, welche in den j_{mn} vom *vierten* Grade ist. Die geometrische Bedeutung derselben ist, wie wir hier gleichfalls vorgreifend angeben wollen, die folgende: *Das Verschwinden von j ist charakteristisch dafür, dass die vier Kreise $K_1, \ldots$ einen gemeinsamen Orthogonal- oder Hauptkreis haben*, der aber sowohl reell wie punktförmig oder imaginär sein mag; die Grösse j soll dementsprechend als *Hauptkreisinvariante*

bezeichnet werden. Liegt der Hauptkreisfall nicht vor, *so ist j stets positiv*. Die vier Grössen j_m stellen sich als die ersten Unterdeterminanten von (6), genommen nach den Elementen der Diagonalreihe, dar.*)

Zur Ausführung der vorhin in Aussicht genommenen Rechnung nehmen wir *erstlich* an, dass K_1, K_2, K_3 einen reellen Orthogonalkreis haben. Letzterer soll alsdann die reelle ξ-Axe sein und K_1 insbesondere die imaginäre; für K_2 schreiben wir vor, dass dieser Kreis durch den Punkt $\xi = 1$ hindurchzieht, und dass sein Mittelpunkt zwischen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ liegt. Man nehme alsdann j_{12} positiv und verstehe unter $u_{11}, u_{12}, \ldots$ die mit richtigem Vorzeichen versehenen dreigliedrigen Unterdeterminanten der positiv genommenen Determinante (6), so dass im speciellen $u_{nn} = j_n$ wird. Für die vier Spiegelungen $V_1, \ldots, V_4$ ergeben sich alsdann nach leichter Zwischenrechnung die Gestalten:

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} V_1(\xi) = -\bar{\xi}, \qquad V_2(\xi) = \dfrac{j_{12}\bar{\xi} + 1 - j_{12}}{(1+j_{12})\bar{\xi} - j_{12}}, \\[2ex] V_3(\xi) = \dfrac{j_{12}\bar{\xi} + \dfrac{j_{23} - j_{12}j_{13} + \sqrt{j_4}}{1+j_{12}}}{\dfrac{j_{23} - j_{12}j_{13} - \sqrt{j_4}}{1-j_{12}}\bar{\xi} - j_{12}}, \\[2ex] V_4(\xi) = \dfrac{\dfrac{j_{14}\sqrt{j_4} + i\sqrt{j}}{\sqrt{j_4}}\bar{\xi} + \dfrac{u_{24} + (j_{34} - j_{12}j_{14})\sqrt{j_4}}{(1+j_{12})\sqrt{j_4}}}{\dfrac{-u_{24} + (j_{24} - j_{12}j_{14})\sqrt{j_4}}{(1-j_{12})\sqrt{j_4}}\bar{\xi} - \dfrac{j_{14}\sqrt{j_4} - i\sqrt{j}}{\sqrt{j_4}}}. \end{array}\right.$$

*) Die Formeln und Entwicklungen des Textes stehen in mannigfacher Beziehung zu Untersuchungen, welche die elementare Kreisgeometrie in der Ebene und auf der Kugeloberfläche betreffen. Identificirt man j_{12}, j_{23}, j_{31} mit den Cosinus der Seiten eines sphärischen Dreiecks, so wird $\sqrt{j_4}$ im Sinne v. Staudt's der Sinus jener dreiseitigen Ecke, deren Ebenen die Kreise K_1, K_2, K_3 auf der Kugel ausschneiden (siehe darüber v. Staudt in Bd. 24 von *Crelle's Journal* oder Baltzer's Determinantentheorie, pag. 199). Sollen die j_{mn} somit genau die Bedeutung des Textes behalten, so müsste man vom ersten sphärischen Dreieck zum reciproken gehen. Man vergl. ferner die Arbeiten von Frobenius, *Anwendungen der Determinantentheorie auf die Geometrie des Maasses*, Crelle's Journ. Bd. 79 und von Study, *Ueber Distanzrelationen*, Schlömilch's Zeitschrift Bd. 27, wo weitere in Betracht kommende Arbeiten von Darboux und d'Ovidio genannt sind. Die im Texte zur Geltung gekommene Art symmetrischer Determinanten findet sich übrigens bereits bei Schering in den Göttinger Nachrichten von 1870 und 1873 bei Gelegenheit von Untersuchungen in nicht-euklidischen Räumen. Vor allem aber muss hier nochmals auf die schon obengenannte Arbeit von Vogt hingewiesen werden, in welcher das Problem, Fundamentalbereiche oder Gruppen durch ihre Invarianten ein- oder endlichdeutig zu bestimmen, unter weit grösserer Allgemeinheit der Voraussetzungen und freilich unter ein wenig anderer Gedankenwendung als im Texte behandelt wird.

Die verschiedenen in diesen Formeln vorkommenden Wurzeln $\sqrt{j_4}$ sind mit einerlei Zeichen zu nehmen, ebenso die beiden Wurzeln $\sqrt{j}$ der letzten Formel; man wähle etwa beide Vorzeichen positiv. Den vier möglichen Zeichencombinationen entsprechend gewinnt man hier im ganzen vier Kreisquadrupel. Indessen sind dieselben mit einander kreisverwandt, da es in der That zwei directe und zwei indirecte Kreisverwandtschaften giebt, welche K_1, K_2 und die reelle ξ-Axe zugleich in sich transformiren. Bei gegebenen Invarianten ist somit die Classe der Kreisquadrupel, wie oben behauptet, eindeutig bestimmt, und man sieht zugleich, dass sich die obigen Angaben über die Bedeutung von j_m und j im vorliegenden Falle bestätigen.

Ist *zweitens* der Orthogonalkreis von K_1, K_2, K_3 imaginär, so ist es die am meisten naturgemässe Lage, auf der Kugeloberfläche die genannten drei Kreise als grösste Kugelkreise zu wählen. Man kann daraufhin beim Rückgang zur ξ-Ebene erreichen, dass K_1 der Einheitskreis wird, K_2 durch die beiden Punkte $\xi = \pm i$ zieht und K_3 den Kreis K_1 in zwei diametralen Punkten schneidet. Es ergeben sich bei dieser Anordnung folgende Gestalten für die vier Spiegelungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} V_1(\xi) = \dfrac{1}{\bar{\xi}}, \qquad V_2(\xi) = \dfrac{\sqrt{1-j_{12}^2}\,\bar{\xi} + j_{12}}{j_{12}\,\bar{\xi} - \sqrt{1-j_{12}^2}}, \\[2ex] V_3(\xi) = \dfrac{\dfrac{j_{23} - j_{12}j_{13} + i\sqrt{-j_4}}{\sqrt{1-j_{12}^2}}\,\bar{\xi} + j_{13}}{j_{13}\,\bar{\xi} - \dfrac{j_{23} - j_{12}j_{13} - i\sqrt{-j_4}}{\sqrt{1-j_{12}^2}}}, \\[2ex] V_4(\xi) = \dfrac{\dfrac{(j_{24} - j_{12}j_{14})\sqrt{-j_4} - iu_{24}}{\sqrt{-j_4}\sqrt{1-j_{12}^2}}\,\bar{\xi} + \dfrac{j_{14}\sqrt{-j_4} + \sqrt{j}}{\sqrt{-j_4}}}{\dfrac{j_{14}\sqrt{-j_4} - \sqrt{j}}{\sqrt{-j_4}}\,\bar{\xi} - \dfrac{(j_{24} - j_{12}j_{14})\sqrt{-j_4} + iu_{24}}{\sqrt{-j_4}\sqrt{1-j_{12}^2}}}; \end{cases}$$

hierbei sind wieder alle auftretenden Wurzeln $\sqrt{1-j_{12}^2}$ von einerlei Zeichen zu nehmen, desgleichen alle $\sqrt{-j_4}$ und $\sqrt{j}$. Da K_2 durch obige Vorschrift erst zweideutig bestimmt ist, so musste im Ausdruck von V_2 eine Quadratwurzel auftreten. Die zwei weiteren Quadratwurzeln müssen sich dann noch deshalb einfinden, weil wieder K_1 und K_2 unter Wahrung des gemeinsamen (imaginären) Orthogonalkreises durch zwei Transformationen der directen und zwei der indirecten Kreisverwandtschaft in sich übergehen. Die obigen Angaben über die Vorzeichen von j_4 und j haben sich auch hier bestätigt.

Auch wenn *drittens* K_1, K_2, K_3 einen Punkt gemeinsam haben, bestätigt man wieder leicht durch Rechnung, dass zu jedem System j_{mn} nur *eine* Classe kreisverwandter Quadrupel gehört. Bei den bezüglichen Formeln, die hier nicht ausführlich wiedergegeben werden, tritt

freilich die Bedingung $j \geqq 0$ nicht in Evidenz; doch ergiebt sich dieselbe hier aus der leicht zu bestätigenden Identität:

$$j(1 - j_{12}^2) = u_{34}^2 - j_3 j_4, \tag{9}$$

wenn man beachtet, dass gegenwärtig $j_3 = 0$ und $-1 < j_{12} < +1$ ist. Allgemein folgt aus dem Bisherigen: *Die Bedingung $j \geqq 0$ ist nicht nur eine nothwendige, sondern es giebt auch umgekehrt zu jedem dieselbe befriedigenden Werthsystem der Invarianten eine und nur eine Classe kreisverwandter Quadrupel.* —

Aus den später allein zur Geltung kommenden Kreisquadrupeln lässt sich stets wenigstens ein Tripel mit reellem Orthogonalkreis herausgreifen. Nennt man die Kreise dieses Tripels K_1, K_2, K_3, so können die Substitutionen (7) als die Normalgestalten der erzeugenden Substitutionen der später zu betrachtenden Gruppen gelten. Man sieht, dass die Coefficienten dem etwa durch $[j_{12}, \ldots, j_{34}]$ oder kurz $[j_{\mu\nu}]$ zu bezeichnenden Rationalitätsbereiche angehören, dem aber noch die beiden Quadratwurzeln $\sqrt{j}$ und $\sqrt{j_4}$ adjungirt sind. Diese letzteren Irrationalitäten kann man durch Transformation nicht mehr entfernen, ohne dass an ihrer Stelle neue eingeführt würden. Um dies zu zeigen, betrachte man zuvörderst die drei Kreise K_1, K_2, K_3 und dementsprechend die Irrationalität $\sqrt{j_4}$. Wäre es möglich, die letztere *ohne* Einführung einer neuen Irrationalität durch Transformation zu entfernen, so würden V_1, V_2, V_3 in der neuen Gestalt Coefficienten des Bereichs $[j_{12}, j_{13}, j_{23}]$ haben, die also reell sind. Nach Festlegung der Kreise K_1, K_2 ist aber K_3 durch die Forderung *reeller* Coefficienten erst *zwei*deutig bestimmt*), und man stellt durch eine elementare Zwischenrechnung fest, dass die Discriminante der hier eintretenden quadratischen Gleichung gleich j_4, multiplicirt mit einem in den Coefficienten von V_1 und V_2 *quadratischen* Ausdruck, ist; die Wurzel $\sqrt{j_4}$ lässt sich also auf keine Weise mehr entfernen. Eine analoge Betrachtung gilt bei Hereinnahme des Kreises K_4 für die Irrationalität $\sqrt{j}$.

Beachtet man nun, dass der Rationalitätsbereich einer Gruppe durch ihre Erzeugenden bereits festgelegt ist, so folgt: *Durch zweckmässige Auswahl des Quadrupels $K_1, \ldots$ aus seiner Classe kreisverwandter Quadrupel kann man als denkbar einfachsten Rationalitätsbereich für die Substitutionscoefficienten der Gruppe:*

$$[j_{12}, j_{13}, \ldots, j_{34}, \sqrt{j}, \sqrt{j_4}]$$

erreichen. Zu bemerken bliebe hier nur noch, dass $\sqrt{j_4}$ auch durch irgend eine der drei anderen Wurzeln $\sqrt{j_m}$ ersetzt werden könnte,

*) Geometrisch folgt dies aus der Existenz einer elliptischen Substitution der Periode zwei, welche K_1, K_2 und die reelle Axe zugleich in sich transformirt.

sofern das gewählte $j_m > 0$ ist; doch ist diese Aenderung des Rationalitätsbereiches nur durch eine *irrationale*, und zwar im allgemeinen *complexe* Transformation der Gruppe zu erzielen. —

III. Der Raum R_6 der j_{mn} und dessen Punktäquivalenzen. Systematische Aufsuchung aller Kreisquadrupel.

Man setze die sechs Grössen j_{mn} zu Cartesischen Coordinaten eines Raumes R_6 von sechs Dimensionen und bezeichne den im R_6 durch $j = 0$ dargestellten fünfdimensionalen R_5 vierten Grades als *Hauptkreisraum*. Der durch die Bedingung:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{12} & 1 & j_{23} & j_{24} \\ j_{13} & j_{23} & 1 & j_{34} \\ j_{14} & j_{24} & j_{34} & 1 \end{vmatrix} \geqq 0$$

dargestellte Theil der R_6 soll als *das Innere des Hauptkreisraumes* bezeichnet werden; hierbei sind also die Punkte des R_5 selbst mitgerechnet.

Das Innere des Hauptkreisraumes ist 1-8-deutig auf die Mannigfaltigkeit aller Classen von Kreisquadrupeln bezogen, insofern wir ja die Vorzeichen z. B. bei den drei Grössen j_{12}, j_{13}, j_{14} noch willkürlich wählen dürfen. Legt man überdies kein Gewicht auf die Reihenfolge K_1, K_2, K_3, K_4 der Kreise, so kommen noch 24 Permutationen der Coordinaten j_{mn} hinzu (den Vertauschungen der unteren Indices 1, 2, 3, 4 entsprechend), die Punkte mit gleichen Classen verbinden.

Man gehe nun gleich noch einen Schritt weiter und ziehe im einzelnen Falle die aus $V_1, \ldots, V_4$ zu erzeugende Gruppe Γ in Betracht, wobei in einander transformirbare Gruppen Γ in eine Classe zusammengefügt werden und als nicht wesentlich verschieden gelten. *Dem einzelnen Punkte des R_6 gehört in diesem Sinne nur eine Gruppe zu; umgekehrt gehört zur einzelnen Gruppe Γ immer ein System von unendlich vielen Punkten des R_6, welche letztere nunmehr mit einander äquivalent heissen sollen.* Wenn man nämlich beim zunächst vorgelegten Quadrupel den Kreis K_n durch sein längs K_m entworfenes Spiegelbild K_n' ersetzt, so wird offenbar K_m, K_n', K_p, K_q zu der gleichen Gruppe Γ führen. Dieser Ersatz hat aber zufolge leichter Rechnung für die Invarianten die rationale Transformation:

$$(2) \qquad \begin{cases} j'_{np} = 2j_{mn}j_{mp} - j_{np}, \quad j'_{nq} = 2j_{mn}j_{mq} - j_{nq}, \\ j'_{mn} = j_{mn}, \quad j'_{mp} = j_{mp}, \quad j'_{mq} = j_{mq}, \quad j'_{pq} = j_{pq} \end{cases}$$

zur Folge. Indem man aber die 12 verschiedenen, in diesen Ausdruck zusammengefassten Transformationen wiederholt ausübt, ergeben

sich aus einem bereits unendlich viele äquivalente Punkte. Doch gewinnt man, wie nebenbei bemerkt sein mag, auf diese Weise nur erst dann die gesammten mit einem äquivalenten Punkte, wenn Γ eigentlich discontinuirlich ist und an elliptischen Substitutionen höchstens solche der Perioden 2, 3, 4, 6 besitzt.

Was man ein *reducirtes Quadrupel* nennen wird, ist im Falle einer eigentlich discontinuirlichen Gruppe Γ unmittelbar klar: *die vier Kreise desselben müssen einen Discontinuitätsbereich von Γ eingrenzen.* Aber die Gesammtheit der „reducirten" Punkte des R_6 ergiebt kein sehr übersichtliches Gebilde, insofern es sich hierbei nur insoweit um ein Punktcontinuum handelt, als in Γ keine elliptischen Substitutionen vorkommen.

Um bei dieser Sachlage auf den Gebrauch der Invarianten $j_{\alpha\beta}$ eine systematische Aufstellung aller Kreisquadrupel bez. aller reducirten Quadrupel zu gründen, wird man daher zweckmässig in folgender Art eine Theilung der Aufgabe vollziehen. Man fasse alle Quadrupel, bei denen etwa die *vier* Invarianten j_{12}, j_{23}, j_{34}, j_{41} specielle Werthe $j_{12}^{(0)}, j_{23}^{(0)}, \ldots$ haben, in eine *Gattung* zusammen und untersuche jede einzelne Gattung für sich. Durch $j_{12} = j_{12}^{(0)}, \ldots, j_{41} = j_{41}^{(0)}$ ist im R_4 eine Ebene dargestellt, welche den Hauptkreisraum in einer Curve vierter Ordnung C_4 schneidet. Letztere zerlegt die genannte Ebene in eine Reihe von Parcellen, in denen abwechselnd $j > 0$ und $j < 0$ ist; nur die Parcellen mit $j > 0$ liefern Kreisquadrupel, und die Punkte derselben sind dann weiter im einzelnen darauf zu untersuchen, ob sie reducirte Quadrupel liefern oder nicht.

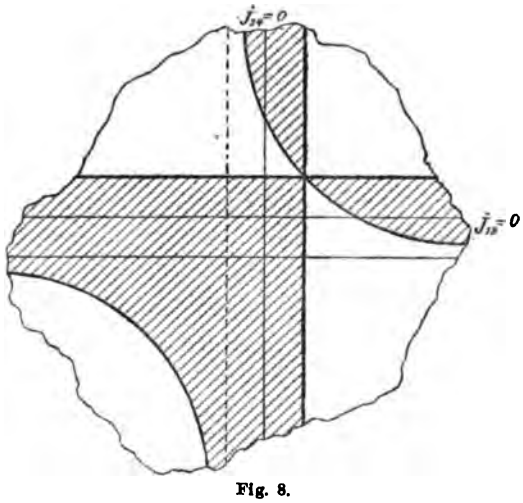


Fig. 8.

Für später ist der Fall eines eigentlichen Vierecks besonders wichtig. Damit das Viereck Discontinuitätsbereich ist, müssen bekanntlich seine Winkel aliquote Theiler von π sein; und die Gesammtheit der hiermit gemeinten Gattungen von Vierecken strebt dem Grenzfalle der Vierecke mit vier Winkeln null mehr und mehr zu. Dieser Grenzfall, für welchen der übereinstimmende Werth von j_{12}, j_{23}, j_{34}, j_{41} gleich 1 wird, möge die in Rede stehenden Verhältnisse noch ein wenig näher erläutern.

In dem gekennzeichneten Falle ist die Gleichung der C_4:

$$(3) \qquad (1-j_{13})(1-j_{24})[4-(1+j_{13})(1+j_{24})] = 0;$$

dieselbe bewirkt die in Figur 8 (vorige Seite) dargestellte Theilung der Ebene, wobei die Punkte der schraffirten Theile Kreisquadrupel liefern. Nach II (7) berechnen sich die Gleichungen der vier Kreise K, wie folgt:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = 0, \ \xi^2+\eta^2-\xi = 0, \ (1+j_{13})(\xi^2+\eta^2)-2j_{13}\xi-(1-j_{13}) = 0, \\ (3-j_{13}-j_{24}-j_{13}j_{24})(\xi^2+\eta^2)-2(1-j_{13})\xi-2\sqrt{j}\,\eta \\ \qquad +(1-j_{13})(1-j_{24}) = 0, \end{cases}$$

wodurch jedem Punkte eines schraffirten Bereiches der Figur 8 sein Kreisquadrupel zugeordnet ist. Mit Hülfe dieser Gleichungen ist es nun leicht, die Ebenentheilung der Figur 8 näher zu discutiren.

Ist $j_{13} > 1$, so sind die Kreise K_1 und K_3 durch K_2 von einander getrennt; es folgt, dass die beiden nach rechts und nach oben von $j_{13} = j_{24} = 1$ auslaufenden schraffirten Parcellen reducirte Quadrupel nicht liefern können. Der durch den unteren Hyperbelbogen und die beiden Geraden $j_{13}+1 = 0$ und $j_{24}+1 = 0$ eingegrenzte Bereich liefert Punkt für Punkt reducirte Quadrupel; und zwar gewinnen wir, falls wir von den beiden Geraden im Augenblick absehen, ein Paar nicht zerfallender Vierecke B, B' nach Art der Figur 5. Ist entweder $j_{13}+1 = 0$ oder $j_{24}+1 = 0$, so zerfällt eines der beiden Vierecke in zwei Dreiecke, und für $j_{13} = j_{24} = -1$ haben wir direct den Fall der Figur 7. Hat man $j_{13} > -1$, so sind die Punkte mit reducirten Quadrupeln auf unendlich vielen zu $j_{13} = 0$ parallelen Geraden gelegen, welche die Gerade $j_{13}+1 = 0$ zur Grenze haben, es sind dies die Geraden $j_{13} = 0, = -\frac{1}{2}, = -\frac{1}{\sqrt{2}}, = -\cos\frac{\pi}{5}, \cdots$. Wie man später sieht, liefern für $j_{24} \leqq -1$ die sämmtlichen Punkte dieser Geraden reducirte Quadrupel; für $j_{24} > -1$ kommen indessen nur die Schnittpunkte mit einem analog gelegenen zu $j_{24} = 0$ parallelen Geradensystem zur Geltung. Im ersteren Falle ist eines der beiden Vierecke B, B' in ein Paar von Dreiecken (mit reellen Orthogonalkreisen) ausgeartet, im letzteren Falle aber beide Vierecke. Für positive Werthe j_{13} oder j_{24} können niemals reducirte Quadrupel eintreten. —

IV. Das Bereichnetz und dessen Grenzgebilde für den Fall eines vierfach zusammenhängenden Bereiches B ohne Ecken.

Nach den bisherigen Vorbereitungen gehen wir zum eigentlichen Gegenstande der Untersuchung und besprechen erstlich das aus einem vierfach zusammenhängenden Bereich B (nach Art der Figur 1) entspringende Netz. Wir denken dabei den Ausgangsbereich B so gelegen,

dass der Punkt $\zeta = \infty$ im Innern desselben liegt. Man entwerfe nun zugleich an den vier Kreisen je ein Spiegelbild $B_1, \ldots, B_4$ von B, worauf weitere $4 \cdot 3$ Kreise offen bleiben. An letzteren erzeuge man aufs neue zugleich je einen neuen Bereich $B_5, \ldots, B_{16}$ und fahre so fort. *Nach dem n^{ten} Schritte des so eingeleiteten Spiegelungsverfahrens hat man ein zusammenhängendes Netz von* $(2 \cdot 3^n - 1)$ *Bereichen, während die Gesammtzahl der offenen Kreise auf* $4 \cdot 3^n$ *angewachsen ist; diese* $4 \cdot 3^n$ *Kreise verlaufen durchaus getrennt von einander.*

Man gehe nun zur Grenze $n = \infty$ über und wird im Verlauf der folgenden Rechnungen sehen, dass für lim. $n = \infty$ die Radien der $4 \cdot 3^n$ Kreise gegen 0 convergiren. Die $4 \cdot 3^n$ Kreise liefern also für lim. $n = \infty$ unendlich viele Punkte der ζ-Ebene, welche bei der fortschreitenden Bedeckung derselben mit Bereichen niemals erreicht werden können. Das hiermit gemeinte Punktsystem ist also das *Grenzgebilde* des Bereichnetzes im vorliegenden Falle. *Das Grenzgebilde besteht gegenwärtig aus einer durchaus discontinuirlichen Punktmannigfaltigkeit ohne Inhalt.**)

Die erstere Behauptung, nämlich dass wir hier mit einem durchaus discontinuirlichen Punktsystem zu thun haben, beweist man so: Sind ζ und ζ' zwei von einander verschiedene Grenzpunkte, so sei δ deren Entfernung; δ ist eine von null verschiedene, aber vielleicht sehr kleine Zahl. Man kann nun die oben gemeinte Zahl n so gross annehmen, dass die Durchmesser sämmtlicher $4 \cdot 3^n$ Kreise $< \delta$ sind. Die Punkte ζ und ζ' liegen dann in verschiedenen unter den $4 \cdot 3^n$ Kreisen und sind sonach durch einen von Grenzpunkten gänzlich freien Bereich der ζ-Ebene von einander getrennt.

Die zweite Behauptung, nämlich dass es sich hier um ein Punktsystem ohne Inhalt handelt, kommt darauf hinaus, dass der Gesammtinhalt der $4 \cdot 3^n$ offenen Kreise für lim. $n = \infty$ gegen null convergirt. Es wird dies durch eine leichte Zwischenbetrachtung bewiesen, der wir folgende Bemerkung vorausschicken. Die Invarianten j_{mn} sind gegenwärtig sämmtlich absolut > 1, die vier Invarianten j_m sind positiv, und man stellt leicht fest, dass die vier Producte $(j_{mn} \cdot j_{np} \cdot j_{pm})$ negativ sind. Man nehme nun die Wurzeln $\sqrt{j_m}$, $\sqrt{j_{mn}^2 - 1}$ positiv und bilde die 24 Ausdrücke:

$$(1) \qquad h_{mnpq} = \frac{\sqrt{j_q} + \sqrt{j_{mn}^2 - 1}}{j_{mn} j_{mp} - j_{np} + j_{mp} \sqrt{j_{mn}^2 - 1}},$$

unter der Vorschrift, dass beim einzelnen Ausdruck j_{mn} und j_{mp} positiv

*) Es ist bei Gegenständen dieser Art hier zumeist von der Terminologie der bekannten von Hrn. G. Cantor begründeten Mannigfaltigkeitslehre Gebrauch gemacht.

und also j_{np} negativ sein sollen. Da man vermöge der Definitionsgleichung II (5) von j_q leicht die Ungleichung $(j_{mn}j_{mp} - j_{np}) > \sqrt{j_q}$ bestätigt, und da $j_{mp} > 1$ ist, so stellen die 24 Zahlen h lauter *positive echte Brüche* dar; der grösste unter ihnen habe den Werth e.

Wir mögen nun im Verlaufe des Spiegelungsverfahrens bis zu einem offenen Kreise K_m gekommen sein, mit dem Inhalte J_m, der beim nächstfolgenden Schritte durch die drei offenen Kreise K_n, K_p, K_q mit den Inhalten J_n, J_p, J_q ersetzt erscheint; die Invarianten dieses Quadrupels sind natürlich wieder die anfänglichen j_{mn}. Durch eine Parallelverschiebung und eine Aehnlichkeitstransformation kann man K_m zum Einheitskreise der ζ-Ebene machen; die Verhältnisse der Kreisinhalte bleiben hierbei unverändert.

Es giebt nun ∞^3 ζ-Substitutionen, welche den Einheitskreis K_m in sich transformiren; man denke K_n, K_p, K_q an diesen Transformationen theilnehmend. Dabei wird es eine Transformation oder vielmehr gleich ∞^1 Transformationen geben, für welche der Gesammtinhalt $(J_n + J_p + J_q)$ ein absolutes Maximum ist. Wäre eine der drei Invarianten j_{mn}, j_{mp}, j_{mq} absolut $=1$, so wäre dieses Maximum gleich J_m und würde freilich durch ζ-Substitutionen mit *endlichen* Coefficienten nie völlig erreicht werden können. Im vorliegenden Falle $j_{mn}^2 > 1$ liefert der fragliche Maximalinhalt, durch J_m dividirt, einen von 1 verschiedenen echten Bruch, der sich mit Hülfe der obigen Zahlen h bez. e näher umgrenzen lässt.

Man wähle nämlich unter den ∞^3 genannten ζ-Substitutionen eine solche, durch deren Ausübung K_n mit K_m concentrisch wird. Unter K_p und K_q möge dann etwa K_q dem Einheitskreise nicht ferner liegen als K_p; man wolle dann die Figur um $\zeta = 0$ so lange drehen, bis der Mittelpunkt von K_q auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 liegt. Bei dieser Anordnung berechne man aus den gegebenen Invarianten j_{mn} die Kreisgleichungen, und man wird finden, dass der dem Einheitskreise zunächst gelegene Punkt von K_q unter Benutzung von (1) gerade durch $\zeta = h_{mnpq}$ gegeben ist.

Nunmehr führe man einen Hülfskreis K_0 ein, der durch $\zeta = h_{mnpq}$ hindurchzieht und seinen Mittelpunkt auf der reellen ζ-Axe hat, und zwar soweit zur Rechten von $\zeta = 0$, dass K_p gerade noch im Innern von K_0 liegt. Ist J_0 der Inhalt von K_0, so ist $J_0 > J_n + J_p + J_q$, wobei jedoch die rechte Seite dem Werthe der linken beliebig nahe kommen kann. Nimmt auch K_0 an den wiederholt genannten ∞^3 Transformationen theil, so wird J_0 sein Maximum erreichen, wenn K_0 concentrisch mit K_m ist. Der Radius des so gewonnenen Kreises K_0 ist nothwendig $\leq h_{mnpq} \leq e$, so dass die in der letzten Ungleichung gemeinte Zahl $J_0 \leq e^2\pi = c^2 J_m$ ist. Durch Rückgang zu dem anfänglichen Kreisquadrupel entspringt der Satz: *Ist K_m irgend ein Symmetrie-*

kreis des Netzes, und sind K_n, K_p, K_q die zunächst von ihm umschlossenen Kreise, so gilt für die Inhalte J_m, J_n, ... dieser Kreise die Ungleichung:

$$J_n + J_p + J_q < e^2 J_m, \tag{2}$$

wo e der grösste unter den echten Brüchen (1) *ist.*

Das Ausgangsvierseit (welches den Punkt $\zeta = \infty$ enthielt) liess nun zunächst noch vier Kreise offen; einer derselben sei K und habe den endlichen Inhalt J. Die von ihm zunächst umschlossenen Kreise seien K_1', K_2', K_3' mit den Inhalten J_1', J_2', J_3'; es ist dann:

$$J_1' + J_2' + J_3' < e^2 J.$$

Jeder dieser letzteren Kreise umschliesst demnächst drei weitere K_1'', K_2'', ..., K_9'' mit den Inhalten J_1'', J_2'', ..., J_9''. Dann gilt einzeln $J_1'' + J_2'' + J_3'' < e^2 J_1'$, u. s. w., sowie im ganzen:

$$J_1'' + J_2'' + \cdots + J_9'' < e^2(J_1' + J_2' + J_3') < e^4 J.$$

Man führt diese Entwicklung analog weiter und findet für die nach dem n^{ten} Schritte erhaltenen 3^n Kreise als Gesammtinhalt:

$$J_1^{(n)} + J_2^{(n)} + \cdots + J_{3^n}^{(n)} < e^{2^n} J.$$

Da J endlich ist und e einen von 1 um eine *endliche* Differenz verschiedenen echten Bruch bedeutet, so convergirt der Gesammtinhalt der $4 \cdot 3^n$ offenen Kreise für lim. $n = \infty$, wie behauptet, gegen null.

Die soeben beendete Betrachtung bezog sich auf die Frage, ob die Grenzmannigfaltigkeit *Flächen*inhalt hat oder nicht. Im Hauptkreisfalle tritt an Stelle dessen die Frage nach dem *Linearinhalte* des Grenzgebildes. *Dass dieser gleichfalls null ist*, d. h. dass im Hauptkreisfalle die *Summe der* $4 \cdot 3^n$ *Radien* mit lim. $n = \infty$ gegen 0 convergirt, ist bereits vor einiger Zeit von Weber*) und Schottky**) bewiesen.

Einige weitere Eigenschaften des Grenzgebildes sprechen sich im folgenden Satze aus: *Das Grenzgebilde stellt (im Sinne von Cantor) ein discontinuirliches Punktsystem zweiter Art vor, d. h. ein solches, von welchem keine Ableitung endlicher Ordnung verschwindet; es handelt sich zumal um eine perfecte Punktmannigfaltigkeit.* Den ersten Theil dieses Satzes beweist man so: Ist ζ ein Punkt des Grenzgebildes, so kann man den Spiegelungsprocess soweit getrieben denken, dass ζ in einem offenen Kreise liegt, dessen Durchmesser kleiner als die beliebig klein zu wählende Grösse $\delta > 0$ ist. Der fragliche Kreis ist Symmetriekreis des Netzes, und also liegen in jeder noch so kleinen Umgebung von ζ unendlich viele weitere Punkte des Grenzgebildes. Zum Beweise des zweiten Theils obiger Behauptung verstehe man unter ζ eine

*) In den Göttinger Nachrichten von 1886 pag. 359 ff.

**) In Crelle's Journal Bd. 101, pag. 227 ff.

Häufungsstelle von Punkten des Grenzgebildes, so dass sich in jeder noch so kleinen Umgebung von ζ unendlich viele Punkte des Grenzgebildes finden lassen. Würde nun ζ durch *endlich* weit fortgesetzten Spiegelungsprocess in das Bereichnetz hineingezogen werden, so läge ζ in *endlicher* Entfernung vom nächsten Punkte des Grenzgebildes. Der Punkt ζ kann demnach im endlichen Fortschritt des Spiegelungsverfahrens nicht erreicht werden, gehört also selbst dem Grenzgebilde an.

Ein einzelner Punkt ζ des Grenzgebildes liegt bei Ausführung des Spiegelungsprocesses stets in einem bestimmten unter den $4 \cdot 3^n$ Kreisen. Es ist hiermit vom Ausgangsbereiche B oder etwa von dessen Punkte $\zeta = \infty$ eine eindeutig bestimmte Kette von Bereichen des Netzes durch durchlaufen, um auf directestem Wege sich jenem Grenzpunkte ζ anzunähern. Analytisch gesprochen approximiren wir dergestalt den fraglichen Grenzpunkt durch die unendliche Reihe der Punkte:

$$V_a(\infty),\ V_a V_b(\infty),\ V_a V_b V_c(\infty), \ldots,$$

wo $a, b, c, \ldots$ Indices aus der Reihe $1, 2, 3, 4$ bedeuten und keine zwei auf einander folgende Indices identisch sind. *Jedem Grenzpunkt entspricht solchergestalt eine eindeutig bestimmte unendliche Substitutionenkette:*

$$V_a V_b V_c V_d \ldots, \tag{3}$$

und umgekehrt liefert jede derartige Kette einen Punkt des Grenzgebildes.

Es gründet sich hierauf die folgende Arteintheilung der Punkte des Grenzgebildes. Tritt in der Reihe (3) niemals eine periodische Wiederholung der unteren Indices ein, so nenne man den zugehörigen Grenzpunkt *aperiodisch.* Entsteht entweder von vorn an oder nach einer endlichen Anzahl nichtperiodischer Glieder periodische Wiederkehr der gleichen Indices, so heisse der Grenzpunkt *periodisch;* die periodischen Grenzpunkte sind Fixpunkte von Substitutionen der Gruppe und zerfallen demzufolge in hyperbolische und loxodromische Punkte. Die periodischen Grenzpunkte findet man durch Auflösen gewisser quadratischen Gleichungen, deren Coefficienten dem oben in einfachster Art festgelegten Rationalitätsbereiche der Gruppe angehören. Ein ähnlich einfaches arithmetisches Merkmal besteht für die aperiodischen Grenzpunkte nicht. Uebrigens kommen, sobald $j > 0$ ist, loxodromische Substitutionen *stets* vor; denn zwei hyperbolische Substitutionen, deren vier Fixpunkte nicht auf einem Kreise liegen, ergeben durch Combination stets eine loxodromische Substitution, so dass für $j > 0$ z. B. schon $(V_1 V_2) \cdot (V_3 V_4)$ loxodromisch wird.

In der Umgebung eines periodischen Grenzpunktes kann man sich von der Structur unseres Punktsystems dadurch eine Vorstellung bilden, dass man die zugehörigen Bahncurven in Betracht zieht und die endlich entfernten Grenzpunkte längs dieser Curven in immer grössere

Nähe des fraglichen Fixpunktes verlegt. Doch wollen wir auf diese Betrachtungen, die wir im folgenden Artikel unter anderen Verhältnissen in ausgiebiger Weise anzustellen haben, nicht näher eingehen.

V. Das Grenzgebilde bei einem in zwei Vierecke der Winkel null zerfallendem Bereiche B.

Wegen der Neuheit der eintretenden Verhältnisse ist derjenige Grenzfall des bisher betrachteten Bereiches B besonders interessant, dass B in zwei Vierecke mit lauter Winkeln null zerfällt. Es ist alsdann:

$$j_{12} = j_{23} = j_{34} = j_{41} = 1$$

und

$$j_{13} < -1, \quad j_{24} < -1$$

die charakteristische Bedingung der Invarianten, und es ist übrigens zweckmässig, von der den Gleichungen II (7) zu Grunde liegenden Gestalt des Ausgangsbereiches ein wenig abzugehen. In der That wolle man den Berührungspunkt von K_1 und K_4 nach $\zeta = i\infty$ transformiren, so dass K_1 und K_4 gerade Linien werden und der in Figur 9 schraffirte Bereich entspringt. Die Substitutionen V_1, V_2, V_4 haben dann bez. die Gestalten:

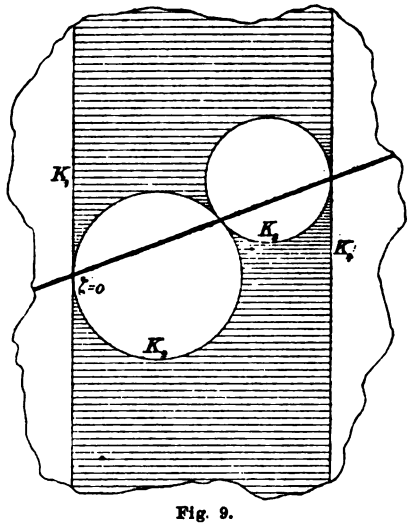


Fig. 9.

$$(1) \qquad \zeta' = -\zeta, \quad \zeta' = \frac{\bar{\zeta}}{2\bar{\zeta} - 1}, \quad \zeta' = -\bar{\zeta} + 1 - j_{24},$$

ein wenig complicirter fällt V_3 aus:

$$(2) \qquad \zeta' = \frac{\left(j_{13} - \frac{i\sqrt{j}}{1-j_{24}}\right)\bar{\zeta} + (1 - j_{13})}{-2\frac{1-j_{13}}{1-j_{24}}\bar{\zeta} - \left(j_{13} + \frac{i\sqrt{j}}{1-j_{24}}\right)}.$$

In Figur 9 ist durch eine leichte geometrische Betrachtung zu zeigen, dass die drei im Endlichen gelegenen Kreisberührungspunkte auf einer Geraden liegen. Bei Rückgang zu einer beliebigen Lage des Paares der Ausgangsvierecke ergiebt sich, *dass die Ecken des Vierecks stets auf einem Kreise liegen;* derselbe heisse K_0. Das Doppelverhältniss der vier Ecken ist somit stets *reell* und berechnet sich zu $\frac{1-j_{24}}{j_{13}-1}$. *Der*

Kreis K_0 ist gegen alle Viereckseiten $K_1, \ldots$ gleich geneigt, und der spitze Schnittwinkel ψ berechnet sich zu:

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{(1-j_{12})(1-j_{34})}{\sqrt{j}}. \tag{3}$$

Im Hauptkreisfalle, $j = 0$, den wir als elementar ausschliessen, ist $\psi = \frac{\pi}{2}$, und K_0 wird selbst Hauptkreis.

In Figur 9 liegt eine Gestalt des Vierecks vor, in welcher zwei Seiten im Vergleich zu den beiden andern unendlich klein sind. Man wolle bemerken, dass auch ohne Zuhülfenahme des Punktes $\zeta = \infty$ unser Kreisbogenviereck in ein solches kreisverwandtes transformirt werden kann, bei welchem drei Ecken einander unendlich nahe liegen, während die vierte endlich entfernt ist. Wenn man ein solches Viereck an einem seiner beiden grösseren Kreise spiegelt, entspringt immer wieder ein Viereck, bei dem die gleichen Verhältnisse vorliegen; die Spiegelung an einem der beiden kleinen Kreise führt hingegen zu einem Viereck, dessen Seiten von gleicher Grössenordnung sind.

Wenn man nun auch von einem Viereck (oder besser Viereckpaar) ausgeht, dessen Seiten von gleicher Grössenordnung sind, stets wird sich im Verfolg des Spiegelungsprocesses eine unbegrenzte Menge von Vierecken einstellen, bei denen die gekennzeichneten abnormen Verhältnisse vorliegen. Ist nämlich ζ_0 irgend eine Ecke des gewöhnlich gestalteten Vierecks, so entwerfe man an einem der beiden nach ζ_0 ziehenden Randkreise ein zweites Viereck und übe auf dieses Viereckpaar die zu ζ_0 gehörende parabolische Untergruppe aus. Geht man in der Reihe der von ζ_0 ausstrahlenden Vierecke so weit, dass die beiden sich in ζ_0 berührenden Kreise unendlich klein von *erster* Ordnung sind, so sind die beiden anderen Seiten des dann erreichten Vierecks unendlich klein von *zweiter* Ordnung, wie man mit Hülfe einer leichten Rechnung feststellt.

Die bezeichneten Umstände bedingen eine Erschwerung der Untersuchung. Ist man nämlich im Verfolg des Spiegelungsprocesses zu einem Kreise K_m gelangt, der als grösserer Kreis zwei Vierecke der abnormen Gestalt begrenzt, so wird der nächstfolgende Schritt innerhalb K_m drei neue Kreise K_n, K_p, K_q entwerfen, deren Gesammtinhalt nur noch unendlich wenig vom Inhalte des Kreises K_m abweicht. Der Satz, dass der Gesammtinhalt der $4 \cdot 3^n$ offenen Kreise mit lim. $n = \infty$ gegen 0 convergirt, ist also hier nicht ohne weiteres in der früheren Art beweisbar.

Indessen kann man den in Rede stehenden Satz durch eine leichte Abänderung des Spiegelungsverfahrens beweisen. Hat man nämlich irgend einen offenen Kreis K_m, so sei ζ_0 einer der beiden Berührungspunkte desselben mit benachbarten Kreisen. Man übe dann wie oben

gleich die *ganze* zu ξ gehörende parabolische Untergruppe aus. K_n wird alsdann mit unendlich vielen Viereckpaaren angefüllt, wobei indes noch unendlich viele Kreise K_n, K_p, K_n', K_p', ... offen bleiben. Aber der Gesammtinhalt der letzteren steht zum Inhalte von K_m in einem Verhältniss, das einen echten von 1 um eine endliche Differenz verschiedenen Bruch darstellt, und das zumal unendlich klein wird, wenn K_m ein Viereck der abnormen Gestalt als grösserer Kreis begrenzt.

Das Neue am vorliegenden Bereichnetz besteht darin, dass die $4 \cdot 3^n$ offenen Kreise eine geschlossene Kette bilden, in welcher der einzelne Kreis jeweils nur mit zwei benachbarten in Berührung ist. Der Grenzübergang zu lim. $n = \infty$ vollzieht sich bis auf die vorab schon erledigte Frage ohne Schwierigkeit, und wir können sogleich folgendes Resultat formuliren: *Auch in dem jetzt vorliegenden Falle* $j_{n,n+1} = 1$, $j_{13} < -1$, $j_{24} < -1$ *besteht das Grenzgebilde aus einer perfecten Punktmannigfaltigkeit ohne Inhalt; indes erscheinen die gesammten Punkte in eine durchaus zusammenhängende, einfach geschlossene Kette angereiht, und wir dürfen die letztere als Grenzcurve bezeichnen, insofern sie ja keine Flächen-, sondern nur Längenausdehnung hat.* Die Grenzcurve zerlegt die ξ-Ebene in zwei Theile, deren jeder von einem Viereckspetz völlig ausgefüllt ist, das eine von B, das andere von B' entspringend. Beide Viereckpetze sind stets unsymmetrisch, sofern wir den elementaren Fall $j = 0$ ausschliessen.

Die Grenzcurve, zu der wir soeben geführt wurden, zeigt einen complicirten Verlauf, und die weiterfolgenden Betrachtungen haben den Zweck, diesen Verlauf der Anschauung, soweit dies möglich ist, nahe zu legen.*)

Wenn man im Spiegelungsprocess bis zu einem solchen n gegangen ist, dass die Durchmesser aller $4 \cdot 3^n$ Kreise unterhalb der beliebig kleinen von 0 verschiedenen Zahl δ liegen, so wird die Kette der $4 \cdot 3^n$ Kreise eine angenäherte Vorstellung vom Verlauf der Grenzcurve bieten. Um den Charakter einer *Curve* besser hervortreten zu lassen, kann man den einzelnen Kreis durch die Sehne zwischen den beiden Berührungspunkten mit dem nächst folgenden und nächst vorhergehenden Kreise ersetzen; die Grenzcurve erscheint dann angenähert als eine aus $4 \cdot 3^n$ Gliedern bestehende gebrochene Linie.

Man bemerke nun, dass die letztere Vorstellungsweise einer interessanten Verschärfung fähig ist. In Figur 9 wollen wir die zu $\xi = \infty$ gehörende parabolische Untergruppe ausüben und insbesondere

*) Der erste Hinweis auf die Existenz und Beschaffenheit derartiger Grenzcurven, die nicht die Gestalt von Kreisen haben, ist von Hrn. Klein in einem Brief an Poincaré gegeben (von letzterem in den Comptes rendus von 1881 publicirt).

die nach rechts hin sich anlagernden Viereckpaare betrachten. Dieselben lassen unendlich viele abwechselnd symmetrisch und congruent liegende Kreispaare $K_3', K_2', K_2'', K_3'', \ldots$ offen, und wir wollen die zu den fraglichen Viereckpaaren gehörenden Kreise $K_0', K_0'', \ldots$ nur insoweit ziehen, als sie innerhalb der offenen Kreise $K_3', K_2', \ldots$ verlaufen. Man gewinnt so eine aus unendlich vielen Gliedern bestehende gebrochene Linie, wobei die an den Ecken auftretenden Winkel abwechselnd 2ψ und $2(\pi - \psi)$ sind, ψ in der Bedeutung von (3) gebraucht. Die durch das „Innere" von K_4 vom Berührungspunkt mit K_3 nach $\zeta = \infty$ ziehende Sehne denke man sich durch die fragliche gebrochene Linie ersetzt. Für beliebige Lage des Vierecks verallgemeinert, kommen wir hiermit auf die obige Art zurück, einen offenen Kreis K_m nur erst unter Gebrauch der zu der einen Ecke ζ_0 gehörenden parabolischen Untergruppe bis auf eine unendliche Kette offen bleibender Kreise anzufüllen. *Die Sehne von K_m erscheint alsdann durch eine gebrochene Linie ersetzt, deren einzelne Stücke Kreisbogen sind; die letzteren setzen sich (von der einen Seite gesehen) abwechselnd unter concaven und convexen Winkeln der constanten Grössen 2ψ und $2(\pi - \psi)$ an einander.* Die Radien der einzelnen Bogenstücke $K_0', K_0'', \ldots$ convergiren bei Annäherung an ζ_0 gegen null; aber sie werden unendlich im Vergleich zu den Radien der beiden offenen Kreise $K_n', K_p', K_p'', K_n'', \ldots$; innerhalb des einzelnen Kreispaares gewinnt also das zugehörige Bogenstück mehr und mehr den Charakter einer Geraden.

Jeder der unendlich vielen nun noch offenen Kreise erscheint von einer Sehne durchsetzt, die Theil einer Kreisperipherie K_0 ist. Die einzelne solche Sehne ist jetzt unter Festhaltung ihres Anfangs- und Endpunktes gerade wieder durch eine unendlich vielgliedrige gebrochene Linie zu ersetzen; das Charakteristische ist dabei, *dass je zwei benachbarte Stücke immer abwechselnd die Winkel 2ψ und $2(\pi - \psi)$ mit einander bilden, wobei 2ψ für $j > 0$ ein von π verschiedener Winkel ist.* Indem man den Process ins unendliche fortsetzt, bemerkt man an der Grenzcurve die Eigenschaft, dass sie in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich oft die Richtung wechselt und also unendlich viele Schwankungen erfährt.

Die bisherigen Betrachtungen geben nothwendig ein unvollkommenes Bild der Grenzcurve; denn sie gründen sich auf die Abstraction, dass man den einzelnen offenen Kreis durch eine in ihm verlaufende Sehne ersetzt. Wir können nun noch in einer anderen Art Aufschluss über den Verlauf der Grenzcurve gewinnen, nämlich durch Verwendung des Umstandes, dass diese Curve durch die unendlich vielen Substitutionen der zugehörigen Gruppe in sich übergeht.

Die einzelnen Punkte der Grenzcurve werden wir hier gerade wieder durch die unendlichen Ketten IV (3) vollständig und eindeutig begreifen. Die Gattung der *periodischen* Grenzpunkte zerfällt hier offenbar in die drei Arten der parabolischen, hyperbolischen und loxodromischen Punkte. Ueber den Verlauf der Grenzcurve in nächster Nähe eines periodischen Punktes kann man sich nun dadurch eine Vorstellung bilden, dass man die zu diesem Punkte als Fixpunkte gehörende Substitution der Gruppe wiederholt ausübt. Bei Theilen der Curve, die vom fraglichen Fixpunkte *endlich* entfernt sind, wird man dabei nur einen angenäherten Verlauf der Grenzcurve in Betracht zu ziehen brauchen, indem ja die dortselbst stattfindenden feinsten Schwankungen nach Transformation in die unmittelbare Nähe des Fixpunktes doch nicht mehr von Belang sein können.

Zur näheren Erläuterung ist in Figur 10 (folg. Seite) ein hierher gehörendes Polygonnetz gezeichnet. Das durch B bezeichnete Vierseit möge den Ausgangsbereich abgeben, wobei der umschliessende Kreis K_1 sein soll, auf welchen rechts K_2 u. s. w. folge. Dass K_2 mit K_1 congruent genommen wurde, ist keine Besonderheit; man hätte sogar ausserdem noch K_1 mit K_3 congruent annehmen können.*) Der Verlauf der Grenzcurve ist so genau wie möglich angegeben, und es sind in dieser Hinsicht bei Anfertigung der Zeichnung bereits die weiterhin zur Ableitung kommenden Resultate verwerthet worden.

Ueber die *parabolischen* Punkte sind von Poincaré einige Ausführungen gegeben.**) Dieselben gipfeln in dem Satze, *dass die Grenzcurve in einem parabolischen Punkte zwar eine Tangente, aber keinen Krümmungsradius habe.* Beides ist leicht deutlich. Man betrachte z. B. den Berührungspunkt ξ_0 von K_1 und K_2 in Figur 10. Unter den Bahncurven von $(V_1 V_2)$ findet sich in jedem der beiden Viereeknetze eine grösste, die gerade noch gänzlich innerhalb ihres Netzes verläuft, ohne irgendwo in das andere Netz überzutreten. Man hat so zwei einander in ξ_0 berührende Kreise, zwischen denen sich die Grenzcurve hindurchdrängt; die gemeinsame Tangente dieser Kreise ist auch Tangente der Grenzcurve in ξ_0. Demgegenüber hat jede zwischen den beiden fraglichen Kreisen verlaufende Bahncurve von $(V_1 V_2)$ den Charakter eines Krümmungskreises; letzterer ist sonach nicht mehr eindeutig bestimmt, und dies ist in obigem Satze gemeint.

Die *hyperbolischen* Punkte der Grenzcurve gehören zu Paaren zusammen, und man verstehe unter ξ_1, ξ_2 irgend ein Paar solcher Punkte. Es ist dann zu unterscheiden, ob es Bahncurven von ξ_1 nach ξ_2

*) Man erkennt im Anschluss hieran, dass sich das einzelne Viereck durch zwei neue Symmetriekreise in vier Vierecke der Winkel 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ eintheilen lässt.

**) Siehe hierüber *Acta mathematica*, Bd. 3, pag. 78 ff.

giebt, welche längs ihres ganzen Verlaufes nur innerhalb einer der beiden Viereckssnetze liegen oder nicht. *Im letzteren Falle finden sich von* ζ_1 (*oder* ζ_2) *aus nach allen Richtungen hin in jeder Nähe von* ζ_1 (*bez.* ζ_2) *weitere Punkte der Grenzcurve.* Im ersteren Falle wolle man im einzelnen Netze diejenigen beiden Bahncurven markiren, welche

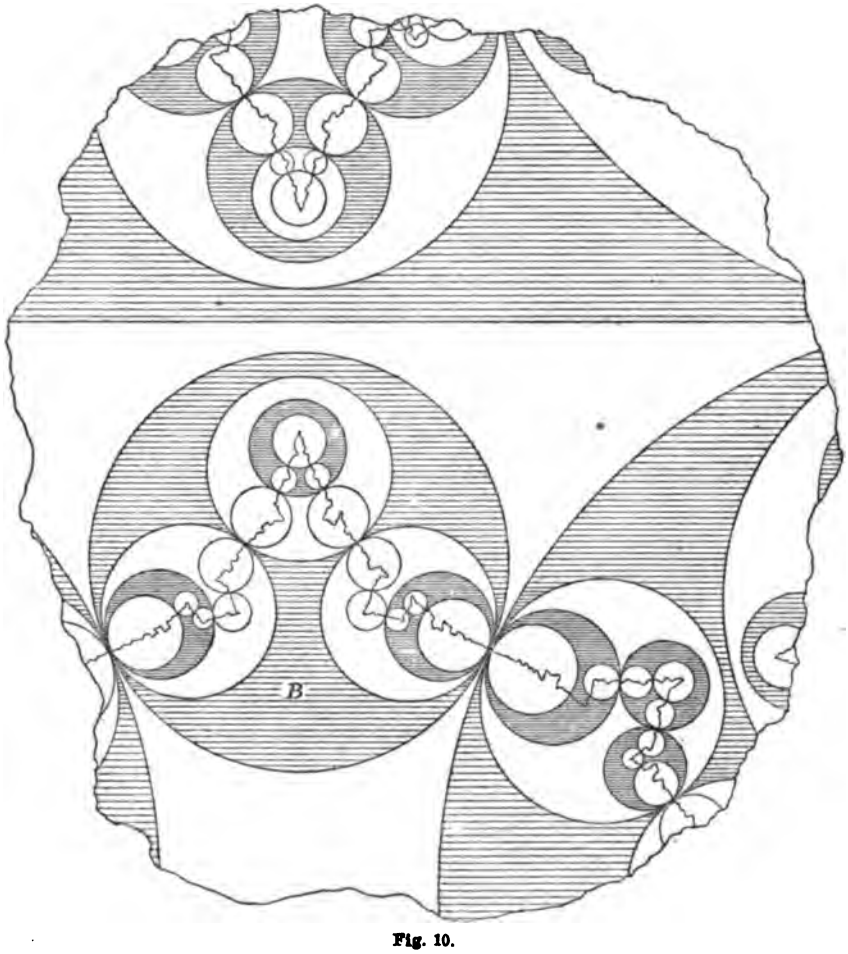


Fig. 10.

die Grenzcurve gerade streifen, ohne in das andere Netz hinüberzutreten. Durch diese beiden Paare von Bahncurven ist die ζ-Ebene in vier Zweiecke mit den Ecken ζ_1, ζ_2 getheilt, *und die Grenzcurve verläuft gänzlich in zweien unter diesen vier Zweiecken.* Von ζ_1 (oder ζ_2) aus finden sich nach allen innerhalb dieser beiden Zweiecke verlaufenden Richtungen in jeder Nähe von ζ_1 (bez. ζ_2) weitere Punkte der Grenzcurve. Die Winkel der beiden Zweiecke mögen als *die charakte-*

ristischen Winkel des hyperbolischen Punktes ξ_1 benannt werden; es sind dies die Winkel, unter denen die Grenzcurve von ξ_1 aus, nach der einen oder anderen Seite gesehen erscheint. Diese Winkel sind natürlich dieselben für alle mit einander äquivalenten Punkte.

Diese Ergebnisse sollen für die beiden hyperbolischen Substitutionen $(V_1 V_3)$, $(V_2 V_4)$ bez. deren Classen gleichberechtigter Substitutionen weiter ausgeführt werden. Für die einzelne dieser Classen sind zufolge der Symmetrie der Figur beide charakteristische Winkel einander gleich. Die Fixpunkte von $(V_1 V_3)$ seien ξ_1, ξ_2, die von $(V_2 V_4)$ ξ_1', ξ_2'; beide Punktepaare haben in Figur 10 besonders ausgezeichnete Lagen.

Zur Eingrenzung der zu $(V_1 V_3)$ gehörenden Zweiecke hat man folgende beiden Paare von Bahncurven zu ziehen:

1) *Die beiden Bahncurven von* ξ_1 *durch* ξ_1' *bez.* ξ_2' *nach* ξ_2;

2) *Die beiden Bahncurven von* ξ_1 *durch die beiden rechts bez. die beiden links gelegenen Ecken des Ausgangsvierecks* B.

Zur Bestätigung dieser, übrigens in Figur 10 hervortretenden, Angaben benutze man Figur 9. In derselben ist die reelle ξ-Axe der Orthogonalkreis von K_1, K_2, K_4, und der Mittelpunkt von K_3 gehört der positiven Halbebene an. Ist nun ξ_0 irgend einer von den vier in Figur 9 hervortretenden parabolischen Punkten, so kann man jeden parabolischen Punkt in der Gestalt:

$$V_a V_b \ldots V_g V_h (\xi_0)$$

anschreiben und also durch die successiven Spiegelungen $V_h, V_g, \ldots$ von ξ_0 aus erreichen. Man bemerke, dass durch die einzelne dieser Spiegelungen der gerade erreichte Punkt in das *Innere* des zugehörigen Kreises transformirt wird, dass hierbei aber niemals ein Punkt der reellen Axe oder positiven Halbebene in die negative Halbebene verlegt werden kann. Die Gesammtheit der Grenzpunkte stellt die erste Ableitung des Systems der parabolischen Punkte dar, und somit folgt: *Der Orthogonalkreis dreier Seiten eines der Eintheilung angehörenden Vierecks liegt gänzlich innerhalb des einen der beiden Netze und streift die Grenzcurve in unendlich vielen Punkten (übrigens von nicht loxodromischem Charakter)*. Die Anwendung dieses Satzes auf Figur 10 führt leicht zu den zu beweisenden Angaben. Man wolle sich nur veranschaulichen, dass die vier zu je drei Seiten des Ausgangsvierecks gehörenden Orthogonalkreise paarweise durch ξ_1, ξ_2 bez. ξ_1', ξ_2' hindurchziehen u. s. w.

Die charakteristischen Winkel der einzelnen Classe werden sich *durch die Invarianten* j_{13}, j_{24} *allein* ausdrücken; so findet man z. B. als den zu ξ_1 gehörenden charakteristischen Winkel:

$$(4) \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-1-j_{13}}\sqrt{3-j_{13}-j_{24}-j_{13}j_{24}}}{2\sqrt{1-j_{24}}(j_{13}j_{24}-1)+\sqrt{-1-j_{24}}(2j_{13}j_{24}-j_{13}-1)},$$

der, wie es sein muss, mit j verschwindet. Die beiden Viereckn etze ragen an den einzelnen hyperbolischen Punkt der Grenzcurve mit zwei Ecken heran, deren Winkelöffnungen natürlich für die Punkte der einzelnen Classe dieselben sind, und von denen übrigens die eine *stets convex* ist. Der Ausdruck des concaven Winkels durch die Invarianten ist:

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-1-j_{13}}\sqrt{j}}{\sqrt{1-j_{13}}(j_{13}j_{24}+j_{34}-2)};$$

die Quadratwurzeln sind in (4) und (5) stets positiv zu nehmen. Die so aufgefundenen Einknickungen der Grenzcurve in ihren hyperbolischen Punkten kommen in Figur 10 näherungsweise zum Ausdruck.

Noch complicirter gestaltet sich der Verlauf der Grenzcurve in der Umgebung eines *loxodromischen* Punktes. Sind ξ_1 und ξ_2 die Fixpunkte einer loxodromischen Substitution, so wolle man sich die ξ-Ebene in lauter ringförmige Discontinuitätsbereiche dieser Substitution zerlegt denken, welche sich gegen ξ_1 und ξ_2 hin mehr und mehr zusammenziehen. Man fasse nun den Verlauf der Grenzcurve im einzelnen Ringe auf und ziehe zugleich die Gestalt der loxodromischen Bahncurven in Betracht. Man wird nothwendig zu der Vorstellung geführt, dass sich die Grenzcurve, abgesehen von allen hinzutretenden Schwankungen, um den loxodromischen Punkt spiralig windet, um ihn erst nach unendlich vielen Windungen zu erreichen, sowie um hernach im umgekehrten Sinne zwischen den bisherigen Windungen zurückzukehren. —

Es ist solchergestalt von verschiedenen Seiten her der Versuch gemacht, vom Verlauf der Grenzcurve eine angenäherte Anschauung zu entwickeln. Eine exacte geometrische Vorstellung von derselben zu gewinnen, ist völlig ausgeschlossen. Nicht nur dass uns die aperiodischen Grenzpunkte völlig unzugänglich sind, sondern man wolle vor allem ermessen, dass sowohl die parabolischen Punkte, wie auch die hyperbolischen und loxodromischen jeder Classe die Grenzcurve *allenthalben dicht* bedecken. Die soeben geschilderten Vorkommnisse in der Umgebung periodischer Punkte werden sich demnach *in jedem endlichen Intervall* der Grenzcurve *unendlich* oft wiederholen. Man hat es mit Recht als etwas sehr Interessantes angesehen, dass wir durch den elementaren Spiegelungsprocess von der einfachen Gestalt eines Kreisbogenvierecks aus zu einer Curve geführt werden, deren unmittelbare geometrische Auffassung die Kraft unserer Raumanschauung übersteigt, und die sich der Theorie der in der überkommenen Geometrie durch *analytische* Gleichungen $f(\xi, \eta) = 0$ darstellbaren Curven entzieht. —

VI. Ausartung der Grenzcurve in Systeme unendlich vieler Kreise.

Von den beiden eben zuletzt betrachteten Viereckn etzen soll nun das eine dadurch zur Ausartung gebracht werden, dass im Ausgangsbereich die beiden Kreise K_1 und K_3 einander bis zur Berührung nahe kommen; es wird alsdann $j_{13} = -1$, während einstweilen $j_{24} < -1$ bleiben soll. Von den beiden Vierecken B, B' zerfällt das letztere in zwei Dreiecke der Winkel null, *so dass gegenwärtig der Discontinuitätsbereich der ζ-Gruppe aus dem Complex eines Vierecks und zweier Dreiecke besteht.*

Die Ausartung der Grenzcurve wolle man sich mit Hülfe der Figur 10 veranschaulichen. Die vorhin hyperbolische Substitution $(V_1 V_3)$ ist sammt allen ihren gleichberechtigten *parabolisch* geworden. Die erzeugenden Substitutionen heissen bei zweckmässigster Lage des Ausgangsbereichs:

$$(1)\qquad \begin{cases} \zeta' = -\bar{\zeta}, \qquad \zeta' = \dfrac{\bar{\zeta}}{2\bar{\zeta}-1}, \qquad \zeta' = -\bar{\zeta}+2, \\ \zeta' = \dfrac{(j_{24} - i\sqrt{2-2j_{24}})\,\bar{\zeta} + (1-j_{24})}{-(1-j_{24})\,\bar{\zeta} - (j_{24} + i\sqrt{2-2j_{24}})}. \end{cases}$$

Dem Uebergang von $(V_1 V_3)$ in eine parabolische Substitution geht die Coincidenz der beiden hyperbolischen Grenzpunkte ζ_1, ζ_2 in einen parabolischen ζ_0 parallel, wie Figur 10 leicht zur Anschauung bringt. Der vorhin benutzte Kreis durch ζ_1, ζ_2 und durch zwei Ecken des Ausgangsvierecks B, dessen Verlauf man sich gleichfalls in Figur 10 leicht veranschaulicht, streifte damals die Grenzcurve in unendlich vielen parabolischen, hyperbolischen und aperiodischen Punkten; aber das dergestalt auf dem Kreise entspringende Punktsystem war ein solches *ohne* Inhalt. Mit diesem Punktsystem geht nun in dem Augenblicke, wo $j_{13} = -1$ wird, eine discontinuirliche Aenderung vor sich; dieser Kreis ist nämlich jetzt Grenzkreis eines Netzes von Dreiecken der Winkel null geworden, und als solcher ist er *überall dicht* mit parabolischen, hyperbolischen und aperiodischen Grenzpunkten besetzt. Das hier eintretende Dreiecksnetz ist übrigens aus der Theorie der Modulfunctionen sehr bekannt, und es wird insbesondere von hier aus verständlich erscheinen, wenn wir die parabolischen Punkte des Grenzkreises auch wohl als dessen *rationale* Punkte bezeichnen.

Das vorhin von B' entspringende Viereckn etz ist nunmehr *in unendlich viele Dreiecknetze* mit Grenzkreisen zerfallen, wobei diese Dreiecknetze ein in Berührungspunkten der Grenzkreise durchaus mit einander zusammenhängendes System bilden. Die rationalen Punkte des einzelnen Grenzkreises zerfallen in drei Classen, und in jedem Punkte der dritten Classe wird der Grenzkreis von dem Kreise einer

benachbarten Dreiecktheilung berührt. *Der einzelne Grenzkreis ist solcherweise ausserhalb überall dicht von neuen ihn berührenden Grenzkreisen besetzt*, von deren Radien natürlich immer nur eine beschränkte Zahl eine beliebig klein zu wählende Grösse $\delta > 0$ überschreiten. Dieselben Verhältnisse wiederholen sich bei jedem neuen Grenzkreise, und man wird sich daraufhin mit Hülfe der Figur 10 den Zusammenhang der unendlich vielen Dreiecknetze einigermaassen anschaulich machen können.

Nicht so stark verändert (gegen früher) ist die Gestaltung des Grenzgebildes in nächster Nähe von parabolischen Punkten der beiden anderen Classen, sowie von hyperbolischen Punkten. Man betrachte z. B. den parabolischen Berührungspunkt der Kreise K_1 und K_2 des Ausgangsvierecks B der Figur 10. Der Kreis durch diesen Punkt und die beiden Fixpunkte der hyperbolischen Substitution $(V_2 V_4)$ verläuft nach wie vor gänzlich innerhalb des intact gebliebenen Viereckes; derselbe ist nun aber in Berührung mit dem Grenzkreise des am fraglichen parabolischen Punkte theilhabenden Dreiecknetzes, und die hier neu eintretenden Dreiecknetze halten sich gänzlich innerhalb der beiden schmalen zwischen beiden Kreisen verlaufenden Spitzen. An die parabolischen Punkte der dritten Classe drängt sich die Viereckstheilung selbst mit zwei Spitzen heran, was wieder in Figur 10 leicht ersichtlich ist. Das Viereck umgreift solcherweise unendlich oft den Complex aller Dreiecksnetze und lässt dabei jedesmal eine symmetrische Hälftung dieses Complexes eintreten; in Figur 10 würde dieselbe durch die verticale Symmetriegerade der Figur geleistet sein.

Bereits die parabolischen Punkte einer einzelnen Classe, z. B. die Berührungspunkte der beschriebenen Grenzkreise, bilden ein Punktsystem, dessen erste Ableitung das gesammte Grenzgebilde vorstellt. *Aber das Grenzgebilde ist keineswegs durch die Punkte aller Grenzkreise der Dreiecksnetze erschöpft.* Um nur von periodischen Grenzpunkten zu sprechen, so ist sofort ersichtlich, *dass unendlich viele Classen hyperbolischer Grenzpunkte sowie die sämmtlichen loxodromischen Punkte auf den Grenzkreisen der Dreiecksnetze nicht gelegen sein können.* Liegt nämlich der eine von zwei hyperbolischen Punkten ξ_1, ξ_2 auf dem Grenzkreise eines Dreiecksnetzes, so muss dasselbe vom andern gelten, da die betreffende Substitution das Dreiecknetz offenbar in sich transformiren muss. Nun weist man aber durch Combination zweier Spiegelungen sehr leicht hyperbolische Substitutionen nach, deren Fixpunkte unmöglich einem und demselben Grenzkreise angehören; bereits von $(V_2 V_4)$ gilt dies, und weitere Beispiele wird man mühelos aus Figur 10 entnehmen, deren Ausartung man sich ja leicht vorstellt. Dass loxodromische Punkte nicht auf den Grenzkreisen der Dreiecksnetze vorkommen können, ist unmittelbar evident, da ein Dreiecknetz

nie durch eine loxodromische Substitution in sich übergehen kann. Man muss demnach im vorliegenden Falle sagen, *dass das Grenzgebilde aus allen Grenzkreisen der Dreiecksnetze, vermehrt um deren Häufungsstellen, besteht.* Das System der Grenzkreise für sich genommen bildet demnach noch keine perfecte Mannigfaltigkeit.

Man gehe nun noch einen Schritt weiter und lasse auch j_{24} bis -1 anwachsen, so dass man den Fall $j_{12} = j_{23} = j_{34} = j_{41} = 1$, $j_{13} = j_{24} = -1$ eines *aus vier Dreiecken der Winkel* 0 bestehenden Discontinuitätsbereiches gewinnt. Es ist nun auch $(V_2 V_4)$ zu einer *parabolischen* Substitution geworden, so dass das bislang noch intact gebliebene Viereckneetz jetzt auch in den Complex von unendlich vielen Dreiecknetzen zerfallen ist.

Die erzeugenden Substitutionen der Gruppe, in einfachster Gestalt fixirt, sind:

$$(2)\quad \zeta' = -\bar{\zeta}, \quad \zeta' = \frac{\bar{\zeta}}{2\bar{\zeta}-1}, \quad \zeta' = -\bar{\zeta}+2, \quad \zeta' = \frac{(1+2i)\bar{\zeta}-2}{2\bar{\zeta}-(1-2i)}.$$

Halten wir an dieser Gestalt fest, so wird die Modulgruppe in ihrer einfachsten (ganzzahligen) Gestalt in der vorliegenden Gruppe enthalten sein. Doch handelt sich's zunächst nicht um die gesammte Modulgruppe, sondern nur um deren Untergruppe zweiter Stufe. Wenn man indessen die vier Ausgangsdreiecke (vergl. auch Figur 7) in bekannter Weise durch ihre drei Höhen jeweils in sechs kleine Dreiecke der Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 theilt, so ist die gesammte Modulgruppe ein Theil, und zwar ein unendlich kleiner Theil der erweiterten Gruppe.

Die hier in Betracht kommende Eintheilung der ζ-Ebene ist in Figur 11 des näheren zur Darstellung gebracht, und ihre Entstehungsweise kann man sich in der nachfolgenden Art näher veranschaulichen. Man markire in der ζ-Ebene zuvörderst das System aller Grenzkreise, die in Figur 11, soweit sie zur Darstellung kamen, stärker ausgezogen sind. Zwischen den Grenzkreisen, deren einzelner mit dem bekannten Dreiecknetz ausgefüllt ist, bleiben, wie man in Figur 11 sehen wolle, immer Dreiecke offen; und im Innern des einzelnen solchen Dreiecks ist der die drei Seiten berührende Kreis der nächste Grenzkreis, welcher das in Rede stehende Dreieck in drei kleinere analog gestaltete Dreiecke und übrigens das wieder von einem Dreiecksnetz erfüllte Kreisinnere zerlegt. Die Construction aller Grenzkreise kommt solcherart darauf hinaus, zu drei gegebenen Kreisen immer wieder den vierten sie berührenden Kreis zu zeichnen. Es entspringen in dieser Weise Kreisquadrupel, in denen jeder einzelne Kreis, wie man leicht überblickt, dieselbe Rolle spielt, wie jeder andere. Die reciproken Werthe e_i der

vier Durchmesser eines solchen Quadrupels sind durch die Relation verbunden:

$$(3)\quad e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2-2(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)=0,$$

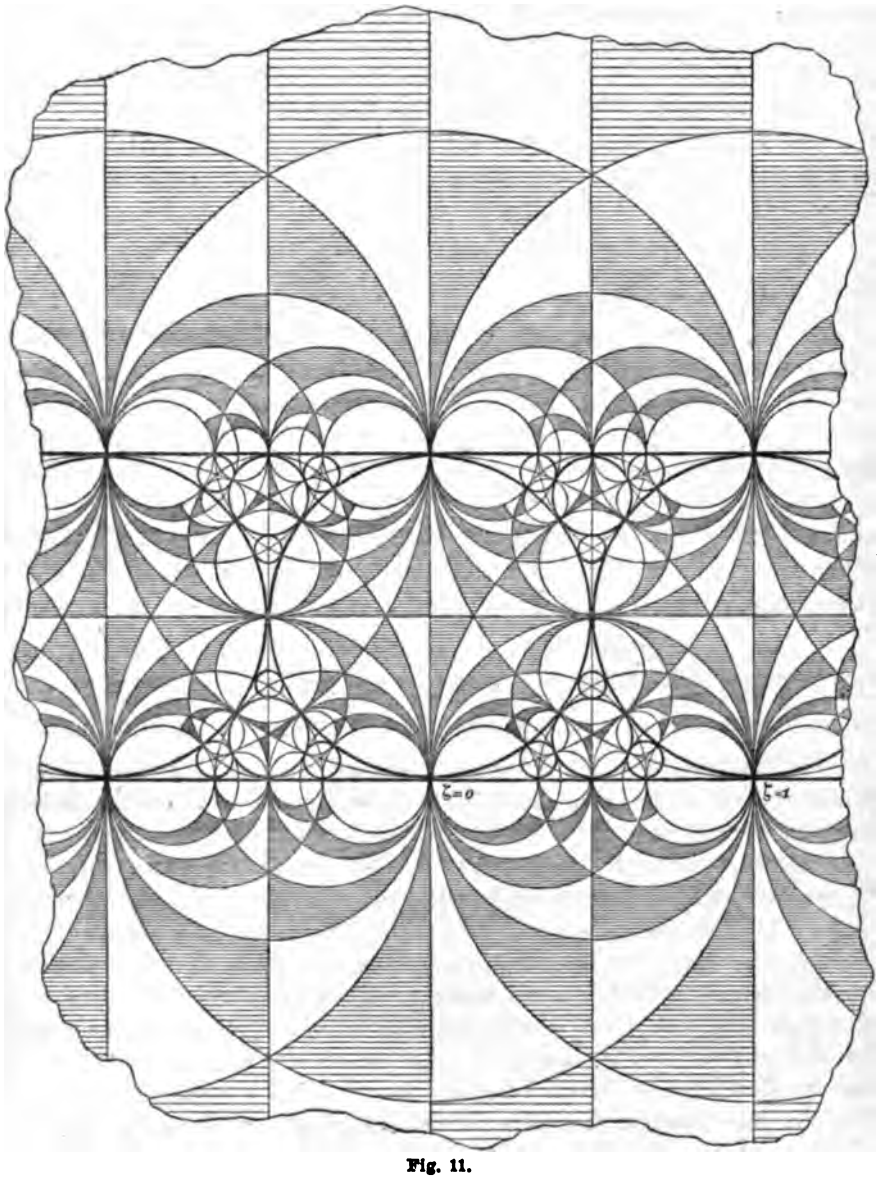


Fig. 11.

und es ist interessant zu bemerken, dass bei der Anordnung der Figur 11 die sämmtlichen e *ganze* Zahlen werden. Man kann also die ver-

schiedenen aus dem System der Grenzkreise aufgegriffenen Quadrupel einander berührender Kreise zu den ganzzahligen Punkten der durch (3) dargestellten Kugel in Beziehung setzen. Es handelt sich dabei nicht um alle ganzzahligen Punkte dieser Kugel, und es ist auch nicht schwer, in geometrischer Art die Lage der zur Geltung kommenden Punkte zu beschreiben; indess soll hierauf nicht näher eingegangen werden, da es doch schwer zu sein scheint, über das System der Grenzkreise erschöpfende arithmetische Angaben zu machen.

In dem fertig gedachten System der Grenzkreise wird jeder einzelne unter ihnen von unendlich vielen anderen von aussen berührt. Die Berührungspunkte liegen *überall dicht* auf dem Kreise; es sind in der That die *parabolischen* Punkte des einzelnen Kreises oder, arithmetisch gesprochen, die Punkte mit *rationalen* Coordinaten ξ, η, deren ζ also unter der Form $\frac{\alpha' + i\alpha''}{\gamma' + i\gamma''}$ mit *ganzen rationalen* Zahlen α, γ erscheint. Diese parabolischen Punkte projiciren sich auf die reelle ζ-Axe stets wieder in parabolische Punkte. Doch werden hierbei vom einzelnen Grenzkreis nur specielle rationale Punkte der reellen Axe getroffen, und das Allgemeine ist, dass ein auf der reellen Axe in einem rationalen Punkte errichtetes Loth auf den übrigen Grenzkreisen *hyperbolische* Punkte ausschneidet. Inzwischen ist es interessant, den Verlauf dieses Lothes in Figur 11 noch näher zu verfolgen, wobei wir dessen rationalen Fusspunkt etwa zwischen $\zeta = 0$ und $\zeta = \frac{1}{2}$ gelegen denken können. Dieses Loth wird zunächst eine unendliche Reihe von Grenzkreisen orthogonal treffen und auf ihnen lauter parabolische Punkte ausschneiden; diess gilt auch noch vom Loth in $\zeta = \frac{1}{2}$. Sehen wir im übrigen von diesem Fusspunkte ab, so werden sich die bislang durchlaufenen Grenzkreise gegen einen vom Lothe durchschrittenen Grenzpunkt irgend welcher Art häufen, jenseits dessen der Verlauf des Lothes ein complicirter wird, insofern ja die nun folgenden Grenzkreise im allgemeinen in hyperbolischen Punkten geschnitten werden. Im Speciellen tritt es indess ein, dass auf's Neue eine unendliche Reihe einander berührender Grenzkreise längs des Lothes an einander angereiht sind, von welchem jene alsdann isogonal durchschnitten werden; diess wird insbesondere der Fall sein, wenn wir von einem rationalen Punkte des Kreises um $\zeta = \frac{i}{2}$ ein Loth auf die reelle Axe fällen.

Ist das System der Grenzkreise festgelegt, so lassen sich die *Symmetriekreise* der Figur 11 leicht beschreiben. Ersichtlich giebt es *zwei* Classen von Symmetriekreisen, wobei ein solcher der ersten Classe jedesmal aus sechs Dreiecksseiten besteht, einer aus der zweiten Classe aber immer aus unendlich vielen. *Die Symmetriekreise der ersten Classe*

*sind wechselweise eindeutig den Tripeln einander berührender Grenzkreise zugeordnet, nämlich als zugehörige Orthogonalkreise; die Symmetriekreise der zweiten Classe sind in einer aus Fig. 11 sofort hervorgehenden Art wechselweise eindeutig auf die parabolischen Grenzpunkte bezogen.**)

Die parabolischen Punkte der Gruppe erscheinen in der Gestalt $\zeta = \frac{\alpha}{\gamma}$, wo α und γ ganze complexe Zahlen des quadratischen Körpers von der Basis $[1, i]$ sind, (doch kommt natürlich nur ein unendlich kleiner Theil aller möglichen rationalen Zahlen dieses Körpers zur Geltung). Für jedes Paar von Zahlen α, γ, die als relativ prim gelten dürfen, giebt es nun zweifach unendlich viele Lösungen der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ in ganzen complexen Zahlen β, δ. Für die Substitutionen unserer Gruppe kommen beim einzelnen Zahlenpaar α, γ aus diesen ∞^2 Lösungen nur zwei Reihen von einfach unendlich vielen zur Verwendung. Um welche Lösungen es sich hierbei handelt, könnte mit Hülfe von Kettenbrüchen ohne Mühe angegeben werden, wie man denn überhaupt durch Gebrauch dieses Hülfsmittels eine vollständige arithmetische Definition unserer Gruppe leicht geben kann. Beschränkt man sich auf Substitutionen erster Art, so sind die Erzeugenden der Gesammtgruppe:

$$\zeta' = \zeta + 1, \quad \zeta' = \frac{-1}{\zeta}, \quad \zeta' = -\zeta + i. \tag{3}$$

Man kann demnach sagen: *Die Substitutionen unserer Gruppe werden gerade genau von den gesammten Kettenbrüchen geliefert:*

$$\zeta' = (a_0 + e_0 i) - \frac{(-1)^{e_0}}{(a_1 + e_1 i)} - \frac{(-1)^{e_1}}{(a_2 + e_2 i)} - \ddots - \frac{(-1)^{e_{\nu-2}}}{(a_{\nu-1} + e_{\nu-1} i)} - \frac{(-1)^{e_{\nu-1}}}{(a_\nu + e_\nu i) + (-1)^{e_\nu} \zeta}, \tag{4}$$

wobei die a beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind, während die e nur die Null oder Eins bedeuten sollen. Indessen ist hiermit noch kein directes Kennzeichen für die bei den Substitutionen unserer Gruppe auftretenden Quadrupel ganzer complexer Zahlen α, β, γ, δ gewonnen. —

VII. Besprechung der Viereckgruppen mit beliebigen elliptischen Substitutionen.

Sobald die vier Kreise $K_1, \ldots, K_4$ von Null verschiedene Schnittwinkel mit einander bilden, ist die Frage, ob sie einen Discontinuitäts-

*) Es sei übrigens an dieser Stelle der Definitionsweise unserer Gruppe als einer Polyedergruppe im hyperbolischen Raume gedacht. Discontinuitätsbereich ist hier ein reguläres Tetraeder, dessen sechs Kanten die fundamentale Kugel der Maassbestimmung berühren. Man vergl. hierzu den der in Rede stehenden Gruppe gewidmeten Aufsatz von Dyck in den Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von 1883.

bereich eingrenzen, nicht mehr so leicht zu beantworten, wie in den bisher betrachteten Fällen. Mögen die Kreise erstlich nach Maassgabe der Figur 5 zwei Kreisbogenvierecke eingrenzen, so müssen jedenfalls die Winkel aliquote Theile von π sein, etwa $\frac{\pi}{\nu_{12}}, \cdots$ mit ganzen positiven Zahlen $\nu_{12}, \ldots$. Für die Invarianten entspringen nach der erforderlichen Bestimmung der Vorzeichen die Angaben:

$$(1) \quad j_{12} = \cos\frac{\pi}{\nu_{12}}, \cdots, j_{41} = \cos\frac{\pi}{\nu_{41}}, \quad j_{13} < -1, \quad j_{24} < -1,$$

wobei des Genaueren die Zahlwerthe j_{13}, j_{24} unter der angegebenen Grenze beliebig wählbar sind. *Unter den Bedingungen* (1) *bilden die beiden Vierecke stets den Discontinuitätsbereich einer Gruppe, und es entspricht somit dieser Gruppe eine Bedeckung der ganzen ζ-Ebene mit zwei durch eine Grenzcurve getrennten Viereeknetzen.*

Die Entstehung der hier vorliegenden Ebenentheilung ist von der ebenen Figur 5 aus nicht so leicht zu übersehen; aber der Beweis der eben formulirten Behauptung erledigt sich sofort, wenn man die ζ-Ebene auf die Kugel stereographisch projicirt und letztere als Fundamentalfläche einer auf das Kugelinnere bezogenen hyperbolischen Maassbestimmung setzt. Die den vier Kreisen $K_1, \ldots, K_4$ entsprechenden Ebenen des hyperbolischen Raumes grenzen hier einen prismatisch geformten Bereich ein; und bei fortgesetzter Spiegelung entspringt eine leicht übersehbare Ausfüllung des hyperbolischen Raumes mit abwechselnd symmetrischen und congruenten Prismen.

Eine ausführliche Betrachtung der Grenzcurve ist hier deshalb unnöthig, weil sie zu keinen. qualitativ neuen Ergebnissen führt. Nach wie vor bleibt bei *endlich* weit getriebener Spiegelung eine Kette von Kreisen frei, nur dass jetzt zwei auf einander folgende Kreise sich zum Theil bedecken; und bei der Darstellung der Grenzpunkte durch die Substitutionsketten $(V_a V_b \ldots)$ kann man von vorn herein auf die für die Substitutionen $V_1, \ldots, V_4$ identisch bestehenden Relationen:

$$(V_1 V_2)^{\nu_{12}} = 1, \quad (V_2 V_3)^{\nu_{23}} = 1, \ldots$$

Bedacht nehmen. Speciell für das Folgende würde es von Interesse sein, für die zu $(V_1 V_3)$ und $(V_2 V_4)$ gehörenden beiden Classen von hyperbolischen Grenzpunkten eine Untersuchung durchzubilden, welche an den entsprechenden obigen Entwicklungen ihr genaues Modell finden würden, unter unerheblicher Complication der Ausdrücke für die charakteristischen Winkel u. s. w.

Zum Schlusse gelangen wir nun noch zu besonders interessanten Ergebnissen, wenn wir unter Festhaltung der Bedingung $j_{24} < -1$ die Invariante $j_{13} = -1$ und > -1 werden lassen. Man muss dann

vor allem fordern, *dass nun auch* $-j_{13} = \cos\frac{\pi}{\nu_{13}}$ *mit ganzzahligem positiven* ν_{13} *ist.* Falls diese Bedingung erfüllt ist, *entspringt für jeden Werth* $j_{24} < -1$ *aus* $V_1, \ldots, V_4$ *eine eigentlich discontinuirliche Gruppe.* Um aber den Discontinuitätsbereich der Gruppe anzugeben, hat man eine Reihe von Möglichkeiten zu unterscheiden. In Figur 6 zerfällt das eine der beiden Ausgangsvierecke in zwei Dreiecke mit *reellen* Orthogonalkreisen, so dass die beiden Invarianten j_2 und j_4 positiv sind; dabei gehört j_2 zum Dreieck der Seiten K_1, K_3, K_4 und j_4 zu demjenigen von den Seiten K_1, K_2, K_3. Allgemein hat man nun zu unterscheiden, ob j_2 bez. j_4 positiv, null oder negativ ist, und gewinnt hierbei offenbar *sechs* wesentlich verschiedene Combinationen. Ist $j_2 = 0$, so sind die drei Zahlen $\nu_{13}, \nu_{34}, \nu_{41}$ bekanntlich auf die Möglichkeiten (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3) eingeschränkt, und für $j_2 < 0$ kommen die bekannten vier Zahlentripel der Gruppen der regulären Körper*); entsprechendes gilt für j_4. Sind demnach insbesondere beide Invarianten j_2 und j_4 null oder negativ, so bleibt für die fünf Zahlen ν_{ik} nur eine sehr beschränkte Anzahl von Möglichkeiten, welche man durch richtige Combination der fraglichen Dreiecksgruppen zu Paaren leicht abzählt. *Sind nun beide Invarianten* j_2 *und* j_4 *positiv, so besteht der Discontinuitätsbereich (für die ganze* ζ*-Ebene gedacht) aus dem Viereck und den beiden Dreiecken; ist eine der Invarianten* $\leqq 0$*, so ist das Viereck mit dem Dreieck der positiven Invariante zusammenzunehmen; ist keine der Invarianten* j_2, j_4 *positiv, so bildet das Viereck allein den Discontinuitätsbereich.* Man hat also hier zuletzt die interessante Möglichkeit, dass Vierecke mit durchaus endlichen von 0 verschiedenen Winkeln zu einem die *ganze* Ebene einfach und bis auf Grenzpunkte vollständig bedeckenden Netze hinführen können.

Von dem System der Grenzpunkte aber gilt das Folgende: *Für* $j_2 > 0$, $j_4 > 0$ *besteht das Grenzgebilde aus unendlich vielen Kreisen sammt deren Häufungsstellen; die Kreise bilden zwei Classen und stellen, sofern nicht* $j_{13} = -1$ *ist, eine durchaus discontinuirliche Mannigfaltigkeit dar. Ist nur eine Invariante* j_2 *oder* j_4 *positiv, so besteht das Grenzgebilde aus einer Classe unendlich vieler Kreise und deren Häufungsstellen, und für* $j_2 \leqq 0$, $j_4 \leqq 0$ *besteht das Grenzgebilde aus einem discontinuirlichen Punktsystem.* Sobald j_2 (oder j_4) verschwindet, tritt eine besonders erwähnenswerthe Classe von Grenzpunkten auf, die als auf Punkte zusammengezogene Kreise anzusehen sind. Man hat die fraglichen Punkte als *elliptisch-parabolische* Grenzpunkte zu bezeichnen, insofern sie bei unendlich vielen elliptischen und parabolischen Sub-

*) Man sehe das Nähere in den „*Vorlesungen über Modulfunctionen*" pag. 103 ff.

stitutionen der Gruppe an ihrer Stelle bleiben; diese Substitutionen bilden für sich eine Dreiecksgruppe derjenigen Art, bei welcher die Winkelsumme der Dreiecke gleich π ist.

Die geschehenen Angaben bestätige man nun dadurch, dass man sich den Spiegelungsprocess jedesmal im Einzelnen klar macht. Es soll dies zuvörderst für den durch Figur 6 veranschaulichten Fall $j_2 > 0$, $j_4 > 0$ geschehen. Der die Figur umschliessende Kreis sei K_1, rechts folge K_2 u. s. w.; das von K_1, K_2, K_3 eingegrenzte zu j_4 gehörende Dreieck heisse D_4, das andere Dreieck D_2; äquivalente Kreise oder Dreiecke etc. mögen durch obere Indices unterschieden werden.

Nimmt man aus Figur 6 zuvörderst K_2 heraus, so liegt ein Paar von Dreiecken $D_2, \overline{D}_2$ vor, auf welches man die Spiegelungen V_1, V_3, V_4 wiederholt ausübe. Es entsteht ein inneres und ein äusseres Dreiecknetz, durch einen Hauptkreis getrennt. Aus jedem Dreieck des äusseren Netzes $\overline{D}_2, \overline{D}_2', \ldots$ nehme man nun die Kreise $K_2, K_2', \ldots$ heraus, während das innere Netz intact bleibt. Die etwa durch $(1,3), (1,3)', \ldots$ zu bezeichnenden elliptischen Ecken des äusseren Netzes sind jeweils von $2\nu_{13}$ Dreiecken der Winkel $\frac{\pi}{\nu_{13}}, \frac{\pi}{\nu_{12}}, \frac{\pi}{\nu_{23}}$ umgeben, demnächst folgt eine den einzelnen Punkt $(1,3), \ldots$ umringende Kette von $2\nu_{13}$ offen bleibenden Kreisen, und hieran schliesst sich ein Ring von $2\nu_{13}$ Vierecken, aussen durch Kreise $K_4, K_4', \ldots$ abgeschlossen.

Man betrachte nun einen einzelnen Ring von $2\nu_{13}$ Kreisen K_2 um einen Punkt $(1,3)$ und fülle diesen Ring unter vorläufiger Vernachlässigung der Kreise $K_4, K_4', \ldots$ durch zwei Dreiecknetze vollständig aus, wobei der Hauptkreis inmitten des Ringes verläuft. Während nun das neue innere Netz wieder intact bleibt, sind aus den Dreiecken des äusseren Netzes (soweit dieselben neu sind) die Kreise $K_4'', K_4''', \ldots$ herauszunehmen. Es entspringen so wiederum inselartig gelegene Systeme zu $2\nu_{13}$ Dreiecken, umgeben durch Ringe von $2\nu_{13}$ offenen Kreisen. Jeder neue Schritt dieses Processes, der sich nun ohne Schwierigkeit weiter fortsetzt, liefert ein neues fertiges Dreiecknetz und eine Vervollständigung des einen Viereckne tzes.

Da die Möglichkeit, von einem einzelnen Viereck aus ein die *ganze* ξ-Ebene bedeckendes Netz zu gewinnen, besonderes Interesse hat, so ist ein hierher gehöriger Fall in Figur 12 besonders erläutert. Es ist hierbei das Viereck mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ gewählt, während $\nu_{13} = 3$ ist und j_{24} einen nicht weiter in Betracht kommenden Werth < -1 hat. Die beiden zu j_2 und j_4 gehörenden Kreisbogendreiecke sind hier Tetraederdreiecke, und wir könnten im Sinne einer

gleich zu bezeichnenden Sprechweise sagen, *die hier vorliegende Gruppe entstehe durch Composition der Tetraedergruppe mit sich selbst.*

Zum Verständniss der Figur 12 verfolge man das in derselben hervortretende Ineinandergreifen von Tetraedertheilungen. Nimmt man nämlich nach Maassgabe der letzt voraufgehenden Erörterungen vorab

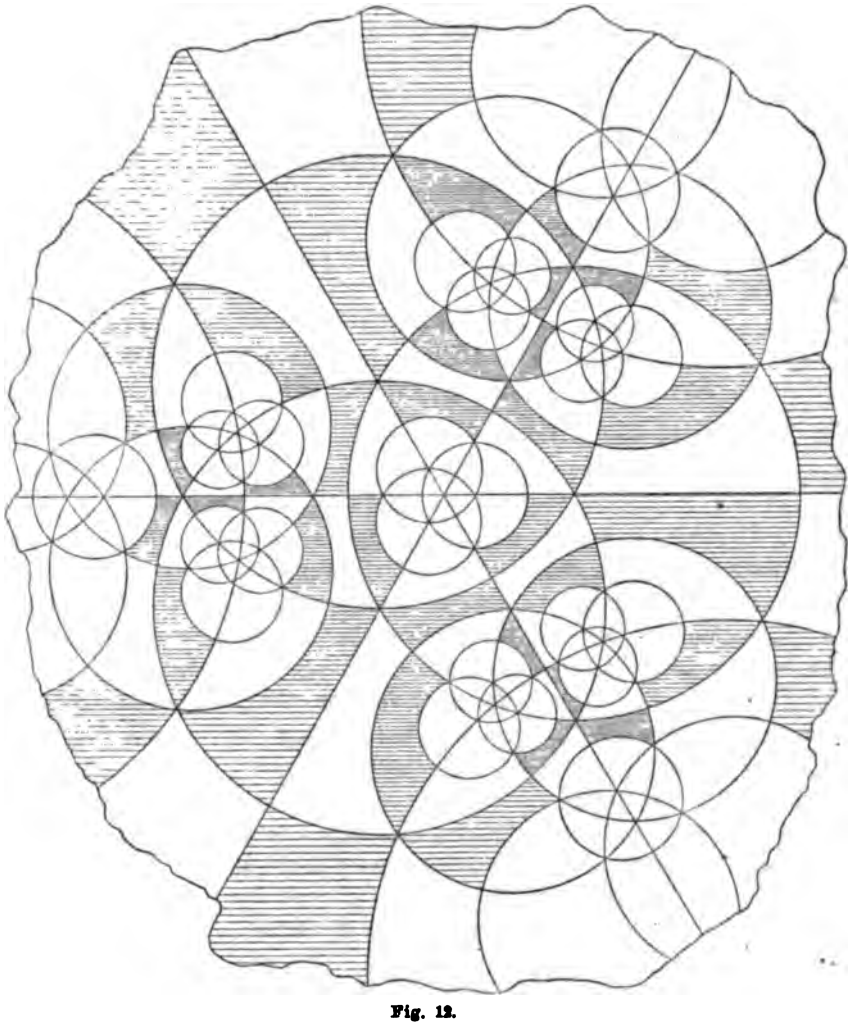


Fig. 12.

den Kreis K_2 fort, so erzeugen die übrigen Kreise die für die Tetraedergruppe charakteristische Theilung der Ebene in 24 Dreiecke. Der Zusatz der Kreise $K_2, K_2', \ldots$ liefert weiter ein in Figur 12 leicht zu isolirendes *vierfach* zusammenhängendes Netz von 24 Vierecken. Im Innern jeder noch bleibenden, von drei Kreisbogen begrenzten Oeffnung

sieht man inmitten einen Schnittpunkt zu drei Symmetriekreisen, rings herum aber drei weitere solche. Um jeden dieser letzteren herum ist wieder nach Art der Tetraedertheilung ein Tripel von Kreisen zu legen, was man in Figur 12 für drei unter den zunächst gebliebenen vier Oeffnungen noch ausgeführt findet. In der Oeffnung finden dann 18 neue Vierecke Platz; aber es stellen sich zugleich drei neue analog gebildete Oeffnungen ein, so dass der Grad des Zusammenhanges des bis dahin gewonnenen Viereckne tzes um zwei Einheiten wächst.

Geht man in dem hiermit eingeleiteten Verfahren hinreichend weit, so sinken die Inhalte der Oeffnungen unter jede Grenze, zugleich aber wächst auch ihre Anzahl unbegrenzt. Man gelangt also hier zu ganz analogen Verhältnissen wie im Artikel IV betreffs des Grenzgebildes. Auch hier könnte man wieder ohne besondere Mühe zeigen, dass das Grenzgebilde ein perfectes Punktsystem ohne Inhalt ist u. s. w.

In einigen Fällen kann man sogar das hier eintretende Punktsystem mit dem des Artikels IV als identisch ansehen. Wenn man z. B. die Tetraedergruppe in der Weise mit sich componirt, dass die Reihenfolge der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ ist, so giebt es eine Gruppe von der Art des Artikels IV, welche mit der Viereckgruppe commensurabel ist. In diesem Falle haben nämlich die Vierecke eine zu zwei Seiten (K_1 und K_3) orthogonal verlaufende Symmetrielinie; die Gesammtheit dieser Symmetrielinien liefert dann gerade das Kreissystem der fraglichen Gruppe ohne elliptische und parabolische Substitutionen. Uebrigens könnte man die hier vorliegende Gesammtgruppe auch durch Composition der Tetraeder- mit einer Diedergruppe erzeugen.

Das eben hervorgetretene *Princip der Composition zweier oder mehrerer Gruppen* ist für den weiteren Ausbau der Theorie der regulären Ebenentheilungen sehr ergiebig*). Bereits bei alleiniger Anwendung auf die Gruppen des Tetraeders, Octaeders und Icosaeders entspringen durch Composition zu Paaren 27 unterschiedene Gruppen, bei denen jedesmal ein Viereckснetz genau nach Art der Figur 12 die ganze Ebene bedeckt. Dabei handelt es sich für jede Combination noch um ∞^1 Gruppen, insofern ja die Invariante j_{24} unterhalb der Grenze -1 beliebig wählbar bleibt.

In allen besprochenen Fällen mit $j_{13} > -1$ zeigte die regulärsymmetrische Ebenentheilung ein *einziges* Viereckснetz, zu welchem eventuell noch unendlich viele Dreiecksnetze hinzutraten. Aber im Gegensatz zu den Gruppen mit nur einer Grenzcurve gilt hier der sehr wesentliche Satz, *dass der von dem Viereckснets bedeckte Bereich*

*) Man vergl. hierzu die Auseinandersetzungen von Klein in Bd. 21 der Mathem. Annalen pag. 200 u. ff.

der Ebene unendlich hohen Grad des Zusammenhanges hat; im Falle der Figur 12 hat man dabei das Grenzgebilde als *nicht* zum Viereckknetz gehörig anzusehen.

Es liegt dieses Sachverhältniss auch bereits bei den Gruppen des Artikel IV vor; jedoch herrscht zwischen den dortigen und den jetzigen Gruppen ein wesentlicher Unterschied, wenn man die *gruppentheoretischen* Folgen des unendlich hohen Zusammenhanges des Netzes ziehen will. Ein im Viereckknetz verlaufender geschlossener Weg, der das Grenzgebilde nirgends streifen soll und also nur durch eine *endliche* Anzahl von Vierecken hindurchzieht, liefert bekanntermaassen eine von den erzeugenden Substitutionen identisch erfüllte Relation, und man gewinnt *alle* derartigen Relationen von den fraglichen geschlossenen Wegen. Dabei darf der Weg *innerhalb* des einzelnen Vierecks beliebig abgeändert werden, ohne dass die Relation eine Modification erfährt.

Liegt nun irgend ein geschlossener Weg vor, so denke man sich das Viereckknetz (und zwar gerade nach der obigen Herstellungsart) soweit gebildet, dass alle vom Wege durchzogenen Vierecke gezeichnet sind. Das Netz hat dann *endlichen* Grad des Zusammenhangs, insofern nur eine *endliche* Reihe von Oeffnungen vorhanden ist. Man ziehe nun den Weg zusammen und mache sich dabei im Einzelnen deutlich, was es heisst, den Weg über eine der fraglichen Oeffnungen hinwegziehen. Es kommt das darauf hinaus, dass man in der zum Wege gehörenden Relation der $V_1, \ldots, V_4$ an einer gewissen Stelle die Combination $V^{-1} . (V_1 V_3)^{\nu_{13}} . V$ zufügt oder wegnimmt. Verfährt man aber bei einer Gruppe des Artikels IV gerade in derselben Art, so durchzieht der Weg nach Hinwegheben über eine einzelne Oeffnung zunächst gerade dieselben Vierseite wie vorher. Im übrigen kommen wir bei Behandlung der geschlossenen Wege des Viereckknetzes auf bekannte Dinge zurück*); wir geben etwa noch unter Benutzung einer von Hrn. Ritter l. c. gebrauchten Sprechweise als Resultat an, dass für $j_{13} > -1$ neben den acht *primären* Relationen:

$$V_1^2 = 1, \ldots, V_4^2 = 1, \quad (V_1 V_2)^{\nu_{12}} = 1, \ldots, (V_4 V_1)^{\nu_{41}} = 1$$

die eine *secundäre* $(V_1 V_3)^{\nu_{13}} = 1$ besteht.

Braunschweig, den 2. Januar 1894.

*) Siehe die Abhandlung von E. Ritter in den Mathem. Annalen Bd. 41, pag. 8 oder die „*Vorlesungen über Modulfunctionen*" Bd. I, pag. 452.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowsky'schen Gesellschaft.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft. Leipzig, im März 1894.)

Für das Jahr 1897.

Die von Monge, Ampère und Darboux herrührenden Integrationsmethoden der *partiellen* Differentialgleichungen zweiter oder höherer Ordnung finden bekanntlich nur für solche Gleichungen Anwendung, die mit anderen Gleichungen Lösungen gemein haben, welche nicht nur von arbiträren Constanten abhängen. Es geht andererseits aus Lie's Untersuchungen über unendliche Gruppen hervor, dass Gleichungen, die eine *unendliche* Gruppe von Berührungstransformationen gestatten, im Allgemeinen zu anderen Gleichungen in der soeben besprochenen Beziehung (Involutionsbeziehung) stehen.*) Die Gesellschaft wünscht

dass die aus dieser Bemerkung fliessenden Integrationsmethoden entwickelt und an möglichst instructiven und vollständig durchgeführten Beispielen illustrirt werden.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem *versiegelten Umschlage* begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. *November des angegebenen Jahres*, und die Zusendung ist an den Sekretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

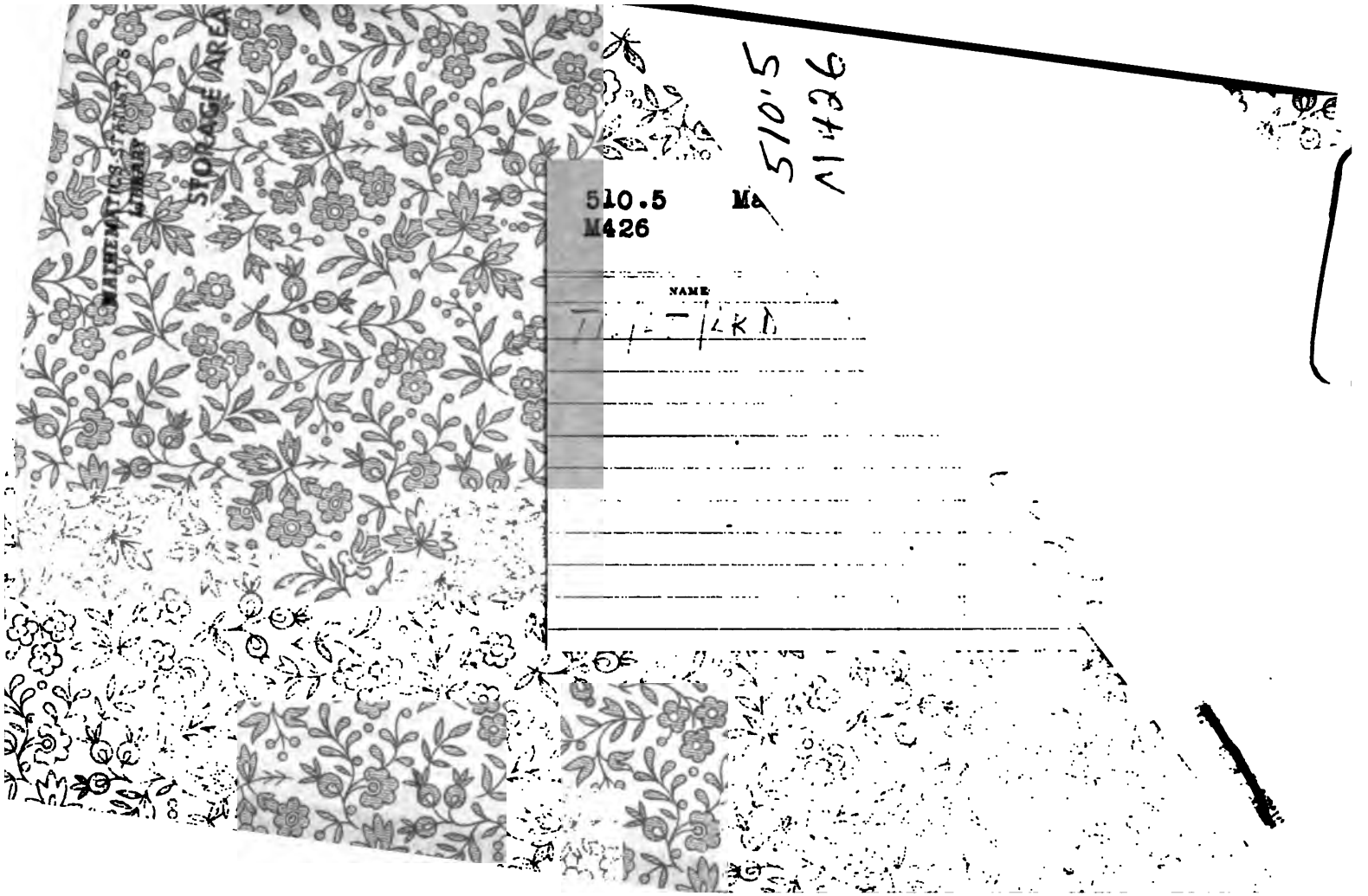
*) Vergl. Darboux, Journal de l'école normale 1870. — Lie, Berichte der Kgl. Sächs. Ges. der Wissensch., 1891—94.

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

20M-2-60-93874

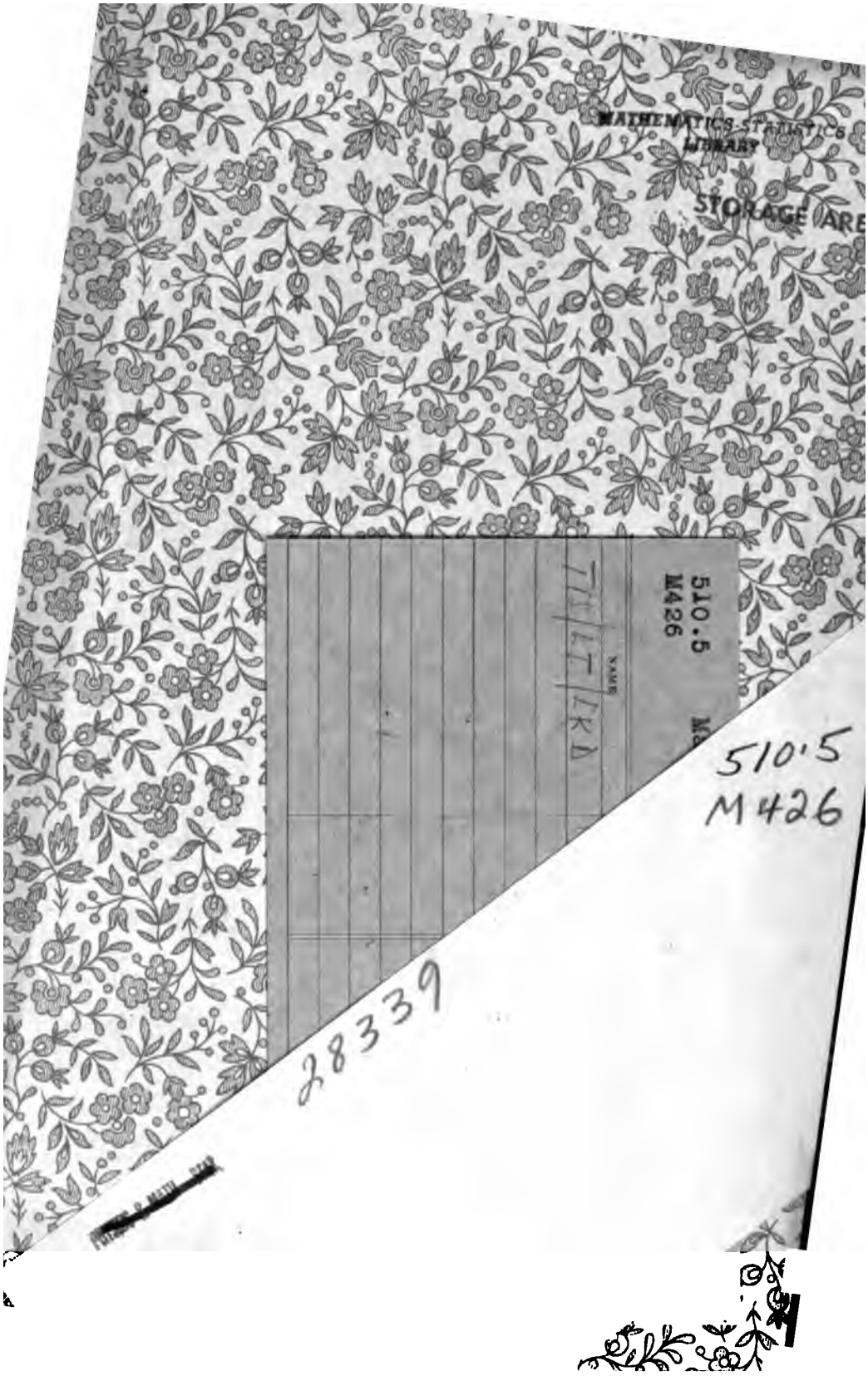
PHYSICS & MATH - STAT.

12/21/62


MATHEMATICS STATISTICS LIBRARY
STORAGE AREA
510.5
M426
NAME

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

2-2-152


MATHEMATICS STATISTICS
LIBRARY
STORAGE ARE
510.5
M426
NAME
28339
510·5
M426